

# 10 DIE ENERGIE-WIRBEL-THEORIE DER HYDRO - DYNAMIK UND DER PHYSIK DER ATMOSPHERE

## 10.1 MOTIVATION UND HEURISTISCHE ÜBERLEGUNGEN

### 10.1(a) Die antisymmetrische Struktur der kanonischen Hamilton-Theorie

Die in Kap 1.1(a), in Kap. 1.6, Beispiel 2 und in Kap. 9.4(c) angesprochenen Hamilton'schen Gleichungen lauten im einfachsten Fall eines Systems mit 2 Freiheitsgraden, also eines Teilchens, welches sich nur in einer Dimension fortbewegen kann, wie z.B. das Gewicht einer Federwaage:

$$(10-1) \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

Die hier verwendeten kanonischen Variablen  $q$  und  $p$ , also die Variablen des zweidimensionalen Phasenraumes, sind die "generalisierten" Orte und Impulse. Sei  $F = F(q,p)$  eine von ihnen abhängige Funktion, so ist deren *individuelle* Änderung gegeben durch die totale zeitliche Ableitung. Setzt man in diese Ableitung (10-1) ein, so ergibt sich der Jacobi-Operator (E-58):

$$(10-2) \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial(F,H)}{\partial(q,p)} = J_{qp}(F,H) =: \{F,H\}$$

Die hier definierte Poissonklammer  $\{F,H\}$  wird in der Mechanik *häufiger* verwendet als das Symbol für den Jacobi-Operator. Beide kennzeichnen die antisymmetrische Struktur  $\{F,H\} = -\{H,F\}$  von (10-2). Aus (10-2) folgt auch sofort, daß  $F$  eine Erhaltungsgröße ist, wenn  $F$  mit  $H$  "vertauscht",  $\{F,H\} = \{H,F\} = -\{H,F\}$ , denn dann muß  $\{F,H\} = 0$  gelten. Hiernach ist auch  $H = \text{const}$  wegen  $\{H,H\}=0$ . Der Hintergrund liegt in

$$\dot{H}(q(t),p(t)) = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = 0 \quad \text{wegen (10-1)}$$

Allerdings kann in offenen ("*nicht-autonomen*") Systemen  $\dot{H} \neq 0$  sein, wenn die Energie *explizit* zeitabhängig ist! - Die Formel (10-2) gilt auch für  $F=p$  oder  $F=q$  selbst. Wegen  $\partial p/\partial p=1$ ,  $\partial p/\partial q=0$  u.s.w. erhält man so eine alternative Form der Hamilton'schen Gleichungen:

$$(10-3) \quad \dot{q} = \{q,H\} \quad ; \quad \dot{p} = \{p,H\}$$

Nun definieren wir einen Vektor  $x$  aus den kanonischen Variablen  $q$  und  $p$ , fassen die Ableitungen  $\partial/\partial q$  und  $\partial/\partial p$  als Komponenten eines Vektors "Nabla" zusammen, und definieren einen sogenannten Poisson-Tensor  $\mathbb{P}$  aus den Zahlen  $\varepsilon_{ij}$  ( $\rightarrow$  (E-37a)):

$$(10-4) \quad \mathbf{x} = i q + j p \quad \hat{=} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

$$(10-5) \quad \nabla = i \frac{\partial}{\partial q} + j \frac{\partial}{\partial p} \quad \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

$$(10-6) \quad \mathbb{P} = (ij - ji) \quad \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ij}$$

Hier ist  $\varepsilon_{ij}$  das "zweidimensionale Äquivalent" zum dreidimensionalen Levi - Civita - Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  ( $\rightarrow$  (E-37a)). Zu beachten ist, daß  $i$  und  $j$  Einheitsvektoren *im Phasenraum* sind, und daß auch der Differentialoperator  $\nabla$  keine Ableitungen im Ortsraum zusammenfaßt, sondern solche im Phasenraum. - Mit Hilfe (10-4) bis (10-6) lassen sich die Gleichungen (10-1) oder (10-3) vektoriell zusammenfassen:

$$(10-7) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{P} \cdot \nabla H = \mathbb{P} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = (ij - ji) \cdot \nabla H = \{\mathbf{x}, H\}$$

Wenn man die allgemeingültige Definition (10-2) einer Poissonklammer auf  $F = q, p$  und  $H = q, p$  spezialisiert, so folgt  $\{q, q\} = 0$ ,  $\{q, p\} = 1$ ,  $\{p, q\} = -1$ ,  $\{p, p\} = 0$ . Die Komponenten des Poisson-Tensors  $\mathbb{P}$  sind also die Poisson-Klammern der Phasenraumkoordinaten: †

$$(10-8) \quad \mathbb{P} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{q, q\} & \{q, p\} \\ \{p, q\} & \{p, p\} \end{pmatrix}$$

Mit (10-8) schreibt sich (10-2):

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(10-9) \quad \{F, H\} = \nabla F^T \cdot \mathbb{P} \cdot \nabla H \equiv \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \mathbb{P} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbb{P} = ij - ji$$

Hier ist  $\nabla F^T \equiv \partial F / \partial \mathbf{x}^T$  der "transponierte" Vektor von  $\nabla F \equiv \partial F / \partial \mathbf{x}$ . (Bei der Transposition geht der "Spaltenvektor" in einen "Zeilenvektor" über). Die Form (10-7) der Hamiltongleichung kann weiter umgeformt werden. Aus der Vektorrechnung ist bekannt, daß eine Skalarmultiplikation eines Vektors mit einem antisymmetrischen Tensor ersetzt werden kann durch eine vektorielle Multiplikation dieses Vektors mit einem anderen Vektor ( $\rightarrow$  (E-4b),  $(\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ), mit  $\mathbf{i} = \mathbf{b}$  und  $\mathbf{j} = \mathbf{a}$  also auch  $(ij - ji) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{j}\mathbf{x}\mathbf{i}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}$ , oder

$$(10-10) \quad \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{k} \times \nabla H$$

Die antisymmetrische Struktur der Hamilton-Theorie bleibt auch für höherdimensionale Systeme bestehen. In Kap. 1.6 haben wir gezeigt, daß durch eine Legendretransformation die Hamilton'schen Gleichungen und die Lagrange'schen Gleichungen II. Art auseinander hervorgehen, und aus letzteren haben wir in Anhang B.1(a) sogar die hydrodynamische Bewegungsgleichung hergeleitet. Allerdings wurde die Herleitung der *Euler'schen Hydrodynamik* nur durch einen (dort beschriebenen) Trick erreicht. Den korrekten Weg beschreibt Névir (1993),  $\rightarrow$  auch Kap. 10.3(c)).

### 10.1(b) Die Grenzen der Hamilton'schen "Energie-Theorie"

Man erkennt durch Vergleich von (10-10) mit dem divergenzfreien Wind (4-25b),

$$\mathbf{v}_{hd} = \mathbf{k} \times \nabla_p \psi$$

daß die Hamiltonfunktion  $H$  im Phasenraum wie eine Stromfunktion  $\psi$  im Ortsraum wirkt. Ebenso wie sich im divergenzfreien Windfeld die zweidimensionale Bewegung einer Fluidpartikel allein aus der Stromfunktion  $\psi(x,y)$  ergibt, so resultiert der Geschwindigkeitsvektor des System-Zustandspunktes im Phasenraum allein aus der Hamilton'schen Energiefunktion  $H(q,p)$ :

$$\begin{aligned} v_{xd} = dx/dt &= -\partial\psi/\partial y \quad \text{entspricht} \quad dp/dt = -\partial H/\partial q \\ v_{yd} = dy/dt &= \partial\psi/\partial x \quad \text{entspricht} \quad dq/dt = \partial H/\partial p \end{aligned}$$

Die Phasentrajektorien verlaufen  $H$ -parallel, ganz analog zu den  $\psi$ -parallelen Bewegungen der Luftpartikel im Ortsraum. Die Hamilton-Theorie entspricht also einem "divergenzfreien Wind im Phasenraum". Somit zeigt die  $H$ -Konstanz während der zeitlichen Systementwicklung im Phasenraum sehr deutlich, daß die Energieerhaltung als *Zwangsbedingung* wirkt, welche im hier betrachteten Fall eines Systems mit zwei Freiheitsgraden sogar ausreicht, die gesamte Dynamik vollständig zu bestimmen! Bei autonomen Systemen ist das Phasenportrait konstant und die Phasentrajektorien sind gleich den Phasen-"Stromlinien", was in (10-10),  $dx/dt = -\mathbf{k} \times \nabla H$  direkt zu sehen ist. Diese Geschwindigkeit des Phasenpunktes kann *auch* verglichen werden mit der Formel (3-14) für den geostrophischen Wind,  $\mathbf{v}_g = 1/\rho f \mathbf{k} \times \nabla_p \phi$ , oder im  $p$ -System:

$$(10-11) \quad \mathbf{v}_g = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \phi$$

(10-11) folgt aus der Bewegungsgleichung (4-6),  $d\mathbf{v}_h/dt = -\nabla_p \phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h$ , unter der Bedingung  $d\mathbf{v}_h/dt = 0$ . So wie sich gemäß (10-10)  $\dot{\mathbf{x}}$  aus dem Phasenraum-Gradienten der Energie  $H$  errechnet, so errechnet sich gemäß (10-11)  $\mathbf{v}_g$  aus dem Ortsraum-Gradienten der Potentiellen Energie  $\phi$ . Da (4-6) letztendlich aus Hamilton'schen Gleichungen gewonnen werden kann, ( $\rightarrow$  Ende von Kap. 10.1(a)), besteht hier eine verblüffende Ähnlichkeit zwischen einer Hamilton-Gleichung und einer ihrer stationären Lösungen. Diese Übereinstimmung geht verloren in einer weniger eingeschränkten stationären Lösung der Bewegungsgleichung, sie kann jedoch in einer verallgemeinerten Hamilton-Theorie zurückgewonnen werden ( $\rightarrow$  Kap. 10.3).

Wir leiten nun die erwähnte weniger eingeschränkte stationäre Lösung her. Um weiterhin in dem durch (10-1) eingeführten zweidimensionalen Phasenraum bleiben zu können, lassen wir in (4-6) keine vertikalen Advektionsbewegungen  $\omega \partial \mathbf{v}_h / \partial p$  zu und berücksichtigen nur die horizontale Advektion:

$$\partial \mathbf{v}_h / \partial t \Big|_p + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_p \mathbf{v}_h = -\nabla_p \Phi - \mathbf{f} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h.$$

Die horizontale Advektion kann mit der Transformation

$$(E-40) \quad \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{v}_h = \nabla_h (\mathbf{v}_h^2 / 2) - \mathbf{v}_h \times (\nabla_h \times \mathbf{v}_h) = \nabla_h (\mathbf{v}_h^2 / 2) - \mathbf{v}_h \times (\zeta \mathbf{k})$$

umgeformt werden. Das ergibt

$$(10-12) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} \Big|_p = -\nabla_p \left[ \Phi + \frac{\mathbf{v}_h^2}{2} \right] - (\zeta + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h$$

Den Pseudogeostrophischen Wind  $\mathbf{v}_{ps}$  erhält man, wenn man statt  $d\mathbf{v}_h/dt$  nur die lokale Änderung  $\partial \mathbf{v}_h / \partial t = 0$  vernachlässigt und den gemäß (E-40) umgeformten Advektionsterm beibehält. Bezeichnet man die spezifische Kinetische Energie  $\mathbf{v}_h^2 / 2$  mit  $k$  und stellt um nach  $\mathbf{v}_h$  im letzten Term von (10-12), so folgt

$$(10-13) \quad \mathbf{v}_{ps} := \frac{1}{\zeta + f} \mathbf{k} \times \nabla_p \left[ \Phi + k \right]$$

Vergleicht man die beiden stationären Lösungen (10-11) bzw. (10-13) der Bewegungsgleichung, so ist die "Stromfunktion" in (10-11) vertreten durch die Potentielle Energie bzw. in (10-13) durch die Summe aus Potentieller und Kinetischer Energie. Allerdings ist  $\mathbf{v}_{ps}$  *nicht nur* aus dieser Energie bestimmt, sondern auch aus der Wirbelgröße "Absolute Vorticity"  $\zeta_a = \zeta + f$  (siehe (4-17)). Die Formel (10-13) beschreibt also das Windfeld  $\mathbf{v}_{ps}$  mit Hilfe der Energie *und* der absoluten Vorticity. Aus (4-23) ging hervor, daß neben der Energie auch die absolute Vorticity eine Erhaltungsgröße ist. Wir stellen also fest, daß die stationäre Lösung (10-13) der Bewegungsgleichung *zwei* Erhaltungsgrößen enthält, anders als die konstituierende Bewegungsgleichung (10-10)!

Übrigens spielte auch schon bei der stationären Lösung (10-11) ein rudimentärer Wirbelanteil mit, nämlich in Form der Erdvorticity  $f$ . Daß sowieso *alle* Erhaltungsgrößen in Lösungen dynamischer Systeme mitspielen *müssen*, folgt schon aus der Darstellung in Kap. 9.4(c), wo wir beschrieben haben, daß *alle* Erhaltungsgrößen Zwangsbedingungen sind, welche die Aufenthaltsmöglichkeit für Zustandspunkte auf die entsprechenden Unterräume des Phasenraumes einschränken. Die berühmte "Energiefläche" in 3D-Phasenräumen, (sonst die entsprechende "Energie-Hyperfläche"), ist nur *einer* dieser Unterräume. Die *Lösung* des Systems ist erst gegeben durch die gemeinsame Schnittmenge *aller* Unterräume. Damit diese Schnittmenge der eindimensionalen Lösungstrajektorie entspricht, benötigt man im  $n$ -dimensionalen System  $n-1$  Erhaltungsgrößen. Im 2D-Phasenraum ist die "Energie-Hyperfläche" nur noch eine "Linie" und somit *selbst* schon die Lösungstrajektorie. Die geometrische Interpretation der Bewegung eines mehrdimensionalen Systems beruht also darauf, daß man durch Bewe-

fehl?

+

gungskonstanten so viele Unterräume als Zwangsbedingungen angeben muß, daß die Schnittmenge all dieser Räume als *verbleibender* zugänglicher Phasenraum identisch wird mit der Phasentrajektorie. Wie in Kap. 9.4(c) erwähnt, läuft das Aufsuchen einer solchen Lösung auf eine kanonische Transformation auf *Winkel-Wirkungsvariablen* hinaus.

In der Hydrodynamik zeigt sich, daß die *neben* der Energie auftretenden Erhaltungsgrößen je nach Komplexitätsgrad entweder Wirbelgrößen oder *zusammenfassende* Wirbelgrößen sind, wie die Ertel'sche Potentielle Vorticity (→ Interpretation in Kap. 4.14(d)). Die Hamilton-Theorie weist eine Asymmetrie auf, da zwar die Wirbelgrößen völlig gleichberechtigt in die geometrische Konstruktion der Lösungstrajektorie eingehen, als konstituierende Größe der Bewegungsgleichung jedoch nur die Energie verwendet wird. Somit gewinnen wir eine Motivation für eine Verallgemeinerung *der Hamilton-Theorie* zur Energie-Wirbel-Theorie, engl. "energy-vorticity-theory", (abgekürzt EVT), in der bereits die *Bewegungsgleichung* in allen Erhaltungsgrößen formuliert wird. Statt erst in den *Lösungen* nach Erhaltungsgrößen zu suchen, welche im Phasenraum die Komplementärmengen aller zugehörigen Unterräume verbieten, sollte man sich *von vornherein* auf die erlaubten Teile des Phasenraumes beschränken. Daß dadurch die Behandlung der Dynamik durchsichtiger wird, liegt auf der Hand. Auch entfällt damit die Beschränkung auf Systeme mit einer *geraden* Anzahl von Freiheitsgraden, die durch die kanonische Formulierung im Gleichungs-Paar (1-1a) vorgegeben ist. - Diese Beschränkung kann man zwar auch durch eine nichtkanonische Hamilton-Formulierung umgehen (→ Kap. 10.2(a)), jedoch handelt man sich dadurch andere Nachteile ein. Insgesamt, also auch gegenüber der nichtkanonischen Theorie, hat eine EVT entscheidende strukturelle Vorteile, wie wir sehen werden.

Schon die Hamilton'sche Mechanik hat gegenüber der Newton'schen Mechanik strukturelle Vorteile. Der wohl größte Nutzen dieses Strukturvorteils liegt im wechselseitigen Übergang zwischen Mechanik und Quantenmechanik ("*Korrespondenzprinzip*"). - Auch in der meteorologischen Hydrodynamik hat die Hamilton-Theorie eine lange Tradition, jedoch haben sich hier trotz heftiger Bemühungen keine wesentlichen strukturellen Vorteile finden lassen. Das bezieht sich insbesondere auf die Beschreibung der atmosphärischen Wirbelgrößen. Daher hat sich in den letzten Jahren *neben* der Beschreibung in energetischen Kategorien (→ Kap. 7.10 - 7.14) eine ganz andere Methode durchgesetzt, die auf der Potentiellen Vorticity (PV) basiert (→ Kap. 4.14). Allerdings entwickelte sich das sogenannte PV-Thinking vollkommen isoliert. Eine *gleichzeitige* Berücksichtigung der Energiekonzepte und der Wirbelkonzepte fand bisher nicht statt, und es existierte bisher auch keine Theorie, in der eine Kopplung zwischen den beiden Methoden zum Ausdruck käme.

Bei genauerem Hinsehen merkt man, daß es auch in der Quantentheorie an einer Stelle "hakt", und zwar gerade dort, wo Drehimpulse zu berücksichtigen sind. Hier mußte ein zusätzlicher *Spin-Algorithmus* eingearbeitet werden, der in der ursprünglichen, aus der Hamiltonmechanik hervorgegangenen Quantentheorie nicht von vornherein enthalten ist. In Lehrbüchern findet man hierzu die Bemerkung, daß es zum Spinkonzept (allgemein zur "Fermionenphysik") der Quantentheorie keine Korrespondenz zur klassischen Mechanik gibt. Ähnliche Vermutungen einer gewissen Unvollkommenheit der Hamilton-Theorie mag auch Y.Nambu gehabt haben, als er bereits 1973 einen Artikel mit dem Titel "Generalized Hamiltonian Dynamics" geschrieben hat. Der Gegenstand dieser Arbeit war eine Verallgemeinerung der diskreten klassischen Hamiltonmechanik rotierender Festkörper. Auch hier spielen die Erhaltungsgrößen Energie *und* Drehimpuls eine Rolle. Nambu (1973) hat gezeigt, daß sich die Kreiselgleichungen auf eine sehr natürliche Art stark vereinfachen, wenn man die Hamilton-Theorie dahingehend verallgemeinert, daß man den Drehimpuls neben der Energie als *gleichberechtigte* Erhaltungsgröße ansieht (→ Kap. 10.2(a)). Allerdings geriet dieser Ansatz etwas in Vergessenheit, wohl deshalb, weil man kaum weitere Systeme gefunden hat, die man in die "Nambuform" überführen konnte.

Zwanzig Jahre später ist es jedoch durch Névir und Blender (1993) gelungen, die diskrete Nambu - Mechanik so weiterzuentwickeln, daß sie auch auf die kontinuierliche, wenn auch zunächst inkompressible Hydrodynamik anwendbar wurde. Eine weitere Verallgemeinerung auf kompressible Medien, und ein Ausbau zu einer allgemeinen hydro-thermodynamischen Theorie mit direkten Anwendungsmöglichkeiten auch auf die Atmosphäre, ist von Névir (1998) vorgenommen worden. Diese neue Theorie ist die oben erwähnte Energie-Wirbel-Theorie (EVT). Es hat sich bestätigt, daß der Grund für die oben erwähnte Verhinderung eines Durchbruchs einer atmosphärischen Hamilton'schen Hydrodynamik im Euler'schen Phasenraum tatsächlich in der einseitigen Bevorzugung der "Energie" lag. Gerade in einer wirbeldominierten Atmosphäre hatte dies einen zu geringen Praxisbezug. Auch sind durch die EVT die bisher separat stehenden Ansätze "PV-Thinking" und "Energie-Sicht" zu einer gemeinsamen Grundlagentheorie vereint worden, und ihr struktureller Vorteil vermittelte sofort mehr Praxisbezüge als die vorher separat stehenden Theorien.

Weiterhin zeigte sich, daß im Zusammenhang mit der *Energie-Wirbel-Theorie* auch eine bisher unbekannt *Korrespondenz* zwischen Mechanik und Spin-Quantentheorie entdeckt wurde, deren Existenz, wie oben erwähnt, in den Lehrbüchern stets verneint wird (Névir, persönliche Mitteilung). - Bis auf einige Schlußbemerkungen in Kap. 10.5 ("Ausblick") beschränken wir uns hier jedoch auf die hydrodynamischen und meteorologischen Aspekte der EVT.

## 10.2 NICHTKANONISCHE HAMILTON-THEORIE UND NAMBU-THEORIE DISKRETER SYSTEME

Als "diskrete Systeme" bezeichnet man gleichermaßen Massenpunktsysteme und starre Körper. Man grenzt sie damit ab von deformierbaren Systemen wie z.B. den Fluiden, die ja prinzipiell unendlich viele Freiheitsgrade haben. Diese Unterteilung darf nicht verwechselt werden mit der in Kap. 9 vorgenommenen Unterteilung einer mathematischen Beschreibung durch "kontinuierliche" Differentialgleichungen bzw. durch "diskrete" Iterationsgleichungen.

### 10.2(a) Theorie-Entwicklung am Beispiel der Kreisel-Gleichungen

Wir besprechen nun die Arbeit von Nambu (1973), die wegen der von Névir und Blender (1993) vorgenommenen hydrodynamischen Verallgemeinerung historischen Wert gewonnen hat. Wir beschreiben nicht nur die Nambu'sche "Energie-Drehimpuls-Theorie" des Kreisels, sondern zum Vergleich auch die klassische Newton'sche Theorie, die auf *keiner* Erhaltungsgröße basiert, sondern in der die Systemveränderungen von *Kräften* bestimmt werden, sowie die Hamilton'sche "Energie-Theorie", die wegen der ungeraden Anzahl von Phasenraumkoordinaten keine *kanonische* Hamilton-Theorie sein kann. Interessant ist, daß die nichtkanonische Hamilton-Theorie im Jahre 1973 noch nicht bekannt war, sondern erst 1980 von Morrison und Greene gefunden wurden.

#### 1. Die Newton'sche Theorie (Euler'sche Kreiselgleichungen)

Die Newton'sche Bewegungsgleichung der Rotationsbewegung ist in Analogie zum Newton'schen Grundgesetz  $dp/dt = F$  der Translationsbewegung durch  $dL/dt = M$  gegeben, wobei  $L$  der Drehimpuls und  $M$  das Drehmoment ist. Für den kräftefreien Kreisel gilt einfach  $dL/dt = 0$ . Allerdings sollte man die Bewegung im mitrotierenden Koordinatensystem beschreiben. Dazu ist die Operatorgleichung  $d_a/dt = d/dt + \omega \times$  anzuwenden, die bereits in Kap. 2.2(d) den Übergang von der Bewegungsgleichung (2-19) im Absolutsystem zur Gleichung (2-23) im rotierenden Erdsystem ermöglicht hat. *Hier* ist  $dL/dt$  als Änderung  $d_a L/dt$  des Drehimpulses im Absolutsystem zu interpretieren, so daß die Operatorgleichung für das Relativsystem die Kreiselgleichung

$$(10-14) \quad \frac{dL}{dt} = -\omega \times L = L \times \omega$$

ergibt. Die "Rotations-Analogie" zur Beziehung  $p = mv$  lautet  $L = \mathbb{I} \cdot \omega$ . Sie verbindet den Drehimpuls  $L$  mit dem Trägheitstensor  $\mathbb{I}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Diese tensorielle Beziehung vereinfacht sich, wenn  $\mathbb{I}$  auf Hauptachsen transformiert worden ist, was hier vorausgesetzt wird ( $\rightarrow$  Exkurs E.5):

$$(10-15) \quad L = I_1 \omega_1 i + I_2 \omega_2 j + I_3 \omega_3 k = L_1 i + L_2 j + L_3 k$$

$I_1, I_2, I_3$  sind die Elemente des diagonalisierten Trägheitstensors, und  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit. Setzt man (10-15) in (10-14) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 (10-16) \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= (I_1\omega_1\mathbf{i} + I_2\omega_2\mathbf{j} + I_3\omega_3\mathbf{k}) \times (\omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}) \\
 &= I_1\omega_1\omega_2\mathbf{k} - I_1\omega_1\omega_3\mathbf{j} - I_2\omega_1\omega_2\mathbf{k} + I_2\omega_2\omega_3\mathbf{i} + I_3\omega_1\omega_3\mathbf{j} - I_3\omega_2\omega_3\mathbf{i} \\
 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3\mathbf{i} + (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3\mathbf{j} + (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\mathbf{k} \\
 &= \frac{(I_2 - I_3)}{I_2 I_3} L_2 L_3 \mathbf{i} + \frac{(I_3 - I_1)}{I_1 I_3} L_1 L_3 \mathbf{j} + \frac{(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} L_1 L_2 \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Schreibt man (10-16) als drei Komponentengleichungen, so sind diese identisch mit den drei Euler'schen Kreiselgleichungen  $dL_1/dt = (I_2 - I_3)L_2 L_3 / I_2 I_3$  u.s.w. für die Koordinaten  $L_1, L_2, L_3$  des dreidimensionalen Phasenraumes dieses Systems.

### 11. Die nichtkanonische Hamilton'sche Theorie

Weil im System (10-16) eine *ungerade* Anzahl von Freiheitsgraden vorliegt, ist es grundsätzlich *nicht* möglich, eine kanonische Hamilton'sche Formulierung dieser Gleichung zu finden. Man kann jedoch eine *nichtkanonische* Hamiltonform angeben. Wie die kanonische, so ist auch die nichtkanonische Hamilton-Theorie eine "Energie-Theorie". In Analogie zur kinetischen Translationsenergie  $mv^2/2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}/2$  ist die Rotationsenergie gegeben durch  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}/2 = (L_1\omega_1 + L_2\omega_2 + L_3\omega_3)/2$ , oder wegen  $I_1\omega_1 = L_1$ , also  $\omega_1 = L_1/I_1$  usw.:

$$(10-17) \quad H = \frac{1}{2} \left[ \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{L}} \triangleq \nabla H = \frac{L_1}{I_1} \mathbf{i} + \frac{L_2}{I_2} \mathbf{j} + \frac{L_3}{I_3} \mathbf{k}$$

Mit dieser Hamiltonfunktion und mit dem folgenden antisymmetrischen Poissontensor

$$(10-18) \quad \mathbb{P} = -L_3\mathbf{ij} + L_2\mathbf{ik} + L_3\mathbf{ji} - L_1\mathbf{jk} - L_2\mathbf{ki} + L_1\mathbf{kj} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -L_3 & L_2 \\ L_3 & 0 & -L_1 \\ -L_2 & L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

läßt sich die vektorielle Euler'sche Gleichung (10-16) in eine Form bringen, die der kanonischen Formulierung (10-7),  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{P} \cdot \nabla H \equiv \mathbb{P} \cdot \partial H / \partial \mathbf{x}$ , *formal* vollkommen entspricht:

$$(10-19) \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbb{P} \cdot \nabla H \quad \text{Beweis:}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{L}} = \mathbb{P} \cdot \nabla H &= \left[ -L_3\mathbf{ij} + L_2\mathbf{ik} + L_3\mathbf{ji} - L_1\mathbf{jk} - L_2\mathbf{ki} + L_1\mathbf{kj} \right] \cdot \left[ \frac{L_1}{I_1}\mathbf{i} + \frac{L_2}{I_2}\mathbf{j} + \frac{L_3}{I_3}\mathbf{k} \right] \\
 &= \left[ -\frac{L_3 L_2}{I_2} + \frac{L_2 L_3}{I_3} \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{L_3 L_1}{I_1} - \frac{L_1 L_3}{I_3} \right] \mathbf{j} + \left[ -\frac{L_2 L_1}{I_1} + \frac{L_1 L_2}{I_2} \right] \mathbf{k} \\
 &= \frac{(I_2 - I_3)}{I_2 I_3} L_2 L_3 \mathbf{i} + \frac{(I_3 - I_1)}{I_1 I_3} L_1 L_3 \mathbf{j} + \frac{(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} L_1 L_2 \mathbf{k}
 \end{aligned}$$



Das ist *inhaltlich* identisch mit (10-16),  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbb{P} \cdot \nabla H$ , und *formal* identisch mit (10-7),  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{P} \cdot \nabla H$  mit  $\mathbb{P} = \mathbf{ij} - \mathbf{ji} \triangleq \varepsilon_{ij}$ . - Allerdings enthält der Poissontensor  $\mathbb{P}$  nicht mehr wie in (10-6) nur die Konstanten  $\varepsilon_{ij}$ , sondern er hängt gemäß (10-18) von den Phasenraumvariablen  $L_i$  ab. Genau das macht den Unterschied aus zwischen einer kanonischen und einer nichtkanonischen Hamilton-Theorie. Nur wegen  $\mathbb{P} \triangleq \varepsilon_{ij}$  läßt sich (10-7) in die kanonischen Gleichungen (10-1) umformen! - Die Determinante des "kanonischen" Tensors  $\mathbb{P} \triangleq \varepsilon_{ij}$  ist gleich 1. Dagegen *verschwindet* die Determinante des nichtkanonischen Tensors  $\mathbb{P}$  (10-18):

$$|\mathbb{P}| = -L_1 L_2 L_3 + L_1 L_2 L_3 = 0$$

Betrachten wir die Eigenwertgleichung (E-73),  $\mathbb{S} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$ , mit der Lösungsbedingung (E-74),  $\det|\mathbb{S} - \lambda \mathbb{E}| = 0$ , so müßte sich eine Eigenwertgleichung mit dem Tensor (10-18) lösen lassen, wobei die Eigenwerte  $\lambda$  verschwinden müssen. Das führt auf die Gleichung  $\mathbb{P} \cdot \mathbf{a} = 0$ . Durch "ausprobieren" findet man tatsächlich

$$(10-20) \quad \begin{pmatrix} 0 & -L_3 & L_2 \\ L_3 & 0 & -L_1 \\ -L_2 & L_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -L_3 L_2 + L_2 L_3 \\ L_1 L_3 + 0 & -L_1 L_3 \\ -L_1 L_2 + L_1 L_2 + 0 \end{pmatrix} = 0$$

Die Komponenten des Eigenvektors  $\mathbf{a}$  sind also die Drehimpulskomponenten! Im mitrotierenden System ist *der Betrag* des Drehimpulses eine Erhaltungsgröße, also auch die folgende Größe  $G$

$$(10-21) \quad G = \frac{1}{2} \left[ L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \right]$$

deren *Gradient* identisch ist mit dem obigen Eigenvektor  $\mathbf{a}$ :

$$(10-22) \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{L}} \triangleq \nabla G = L_1 \mathbf{i} + L_2 \mathbf{j} + L_3 \mathbf{k}$$

Man kann also die Matrix - Eigenwertgleichung (10-20) in kompakter Form schreiben:

$$(10-23) \quad \mathbb{P} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{L}} = \mathbb{P} \cdot \nabla G = 0$$

Hinter dieser Beobachtung verbirgt sich ein allgemeingültiges Prinzip der nichtkanonischen Hamilton-Theorie: Wenn der Poissontensor  $\mathbb{P}$  in einer Darstellung  $d\mathbf{x}/dt = \mathbb{P}(\mathbf{x}) \cdot \nabla H = \{\mathbf{x}, H\}$  (vergl. mit (10-7) und (10-19)) singular ist, d.h. wenn  $|\mathbb{P}| = 0$  ist, so hat  $\mathbb{P}$  Eigenvektoren zum Eigenwert Null. Diese Eigenvektoren lassen sich als Gradienten von sogenannten Casimir-Funktionen  $C$  ausdrücken,  $\mathbb{P} \cdot \nabla C = 0$ . Verwendet man dies in (10-9),  $\{F, H\} = \nabla F^T \cdot \mathbb{P} \cdot \nabla H$ , so folgt, daß  $C$  mit  $H$  "vertauscht" und damit eine Erhaltungsgröße ist. In Übereinstimmung damit ist (10-21) eine Casimir-Funktion und folglich eine Erhaltungsgröße. Sie schränkt also den physikalisch möglichen Phasenraum "geometrisch" ein. Die nichtkanonische Hamilton-

formulierung nimmt bezüglich der geometrischen Interpretierbarkeit der Dynamik eine Art Zwischenstellung ein. Zwar wird im obigen Beispiel deutlich, daß *beide* Erhaltungsgrößen Energie und Drehimpuls eine Rolle spielen. Allerdings gehen sie nicht *gleichberechtigt* in die dynamische Grundgleichung ein, da die Energie als Hamiltonfunktion ihre Sonderrolle beibehält und die andere Erhaltungsgröße als Gradient einer Casimirfunktion eines singulären Operators versteckt ist.

### III. Die Nambu'sche Theorie

Die Nambu'sche Formulierung der Kreiselgleichungen schließlich basiert auf einer vollkommenen Gleichberechtigung *beider* Erhaltungsgrößen dieses Systems bereits bei der Formulierung der Bewegungsgleichung. Neben der Energie (10-17) geht der Betrag des Drehimpulses  $L$  ein, also die Größe (10-21). Damit schreiben sich die Euler'schen Kreiselgleichungen sehr einfach als

$$(10-24) \quad \dot{\mathbf{L}} = \nabla G \times \nabla H$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} = \nabla G \times \nabla H &= \left[ L_1 \mathbf{i} + L_2 \mathbf{j} + L_3 \mathbf{k} \right] \times \left[ \frac{L_1}{I_1} \mathbf{i} + \frac{L_2}{I_2} \mathbf{j} + \frac{L_3}{I_3} \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{L_1 L_2}{I_2} \mathbf{k} - \frac{L_1 L_3}{I_3} \mathbf{j} - \frac{L_2 L_1}{I_1} \mathbf{k} + \frac{L_2 L_3}{I_3} \mathbf{i} + \frac{L_1 L_3}{I_1} \mathbf{j} - \frac{L_2 L_3}{I_2} \mathbf{i} \\ &= \frac{(I_2 - I_3)}{I_2 I_3} L_2 L_3 \mathbf{i} + \frac{(I_3 - I_1)}{I_1 I_3} L_1 L_3 \mathbf{j} + \frac{(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} L_1 L_2 \mathbf{k} \end{aligned}$$

was *wieder* identisch ist mit (10-16).

Die Nambuform (10-24),  $d\mathbf{L}/dt = \nabla G \times \nabla H$ , berücksichtigt offenbar die *beiden* Erhaltungsgrößen  $G$  und  $H$  in vollkommen gleichberechtigter Weise. (10-24) erfüllt auch wegen  $\nabla \cdot (\nabla G \times \nabla H) = 0$  automatisch die Liouville'sche Gleichung mit der Bedingung  $\nabla \cdot (d\mathbf{x}/dt) = 0$  ( $\rightarrow$  (9-2), (9-3)). Ferner ermöglicht sie eine geometrische Interpretation der Kreiselbewegung: Die Trajektorie  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(t)$  im dreidimensionalen Phasenraum ergibt sich unmittelbar als Schnittlinie der beiden Flächen  $G(L_1, L_2, L_3) = \text{const}$  und  $H(L_1, L_2, L_3) = \text{const}$ . Nach (10-21) ist die Fläche  $G = \text{const}$  eine Kugeloberfläche und nach (10-17) ist die Fläche  $H = \text{const}$  ein Ellipsoid. Zustandspunkte müssen gleichzeitig auf *beiden* Flächen liegen, d.h. in der *Schnittlinie* dieser beiden Flächen. Diese Schnittlinie ist also identisch mit der Lösungstrajektorie im Phasenraum. Offenbar liegt der Vektor  $\nabla G \times \nabla H$  tangential zu dieser Schnittlinie, und der Betrag dieses Vektors gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich der Phasenpunkt auf der Lösungstrajektorie bewegt.

### 10.2(b) Phasenraum-Geometrie des Lorenz-Attraktors

Ein anderes interessantes Anwendungsbeispiel der geometrischen Interpretation in dreidimensionalen Phasenräumen geht auf Névir und Blender (1994) zurück. Hier wurde das dissipative Lorenz-System (9-13) in ein konservatives System überführt, ähnlich wie wir in Kap. 9.4(e) das konservative Hénon-System (9-15) in ein dissipatives System überführt haben. Das konservative Lorenz-System wurde dann auf Nambu-Form gebracht. Dabei konnten die in Kap. 9.4(a) beschriebenen beiden "Flügel" des Lorenz-attraktors auf die Schnittmenge der beiden Flächen im  $(x,y,z)$ -Phasenraum zurückgeführt werden, welche die Unterräume der entsprechenden Erhaltungsgrößen repräsentieren. Die Energiefläche hat die Form einer Röhre in  $x$ -Richtung, die Fläche der zweiten Erhaltungsgröße hat die Form einer "Dachrinne" in  $y$ -Richtung, welche die Energieröhre quer durchkreuzt und dabei als eindimensionale Schnittmenge gerade die Grundform der Trajektorien im Lorenzattraktor erzeugt ("Schmetterlingsflügel"). Nach oben, also mit wachsendem  $z$ , entfernen sich die beiden "Flügel" voneinander. Wenn der unterste Punkt der Röhre oberhalb des untersten Punktes der "Dachrinne" liegt, ergeben sich offenbar zwei separate geschlossene Lösungstrajektorien. Jedoch *berühren* sich die beiden "Flügel", wenn der unterste  $z$ -Wert beider Erhaltungsflächen gleich ist. Im entsprechenden "echten", *dissipativen* Lorenz-System wird diese Grundkonfiguration überlagert von Deformationen und Schwingungen der beschriebenen Erhaltungsflächen. Als Konsequenz davon kann ein Phasenpunkt, der einen der beiden "Flügel" umkreist, bei unendlich kleinen Störungen auf den anderen Flügel *wechseln*. Dann haben aber "unendlich kleine" Störungen "große" Wirkungen, d.h. die starke Kausalität ist verletzt, was wir in Kap. 9.1(a) als Charakteristikum des Deterministischen Chaos angesehen haben.

Auch an diesem Beispiel ist zu erkennen, daß die Nambu'sche Bewegungsgleichung *von vornherein* den Phasenraum auf die durch die Erhaltungs-Zwangsbedingungen zugelassenen Bereiche reduziert, während in der Hamilton'schen Theorie die "verbotenen" Anteile des Phasenraumes erst im Nachhinein ermittelt werden, indem man erst in den *Lösungen* die Bewegungskonstanten ausfindig macht, die zur Energie-Zwangsbedingung hinzukommen.

Nur im zweidimensionalen Phasenraum ist die Lösung bereits durch die Hamiltonfunktion vorgegeben, weil hier der entsprechende Energie-Unterraum selbst schon eindimensional ist, und daher identisch ist mit der Lösungstrajektorie. Das kommt durch die Form  $-\mathbf{k} \times \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  in der Bewegungsgleichung (10-10) zum Ausdruck, wo das Kreuzprodukt mit  $\mathbf{k}$  als "Schnitt" mit einer Horizontalebene interpretiert werden kann. Dadurch reduziert sich die *zweidimensionale* Energie-Topographie  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  über

der Phasenebene  $(q,p)$  zum *eindimensionalen* Energie-Unterraum und somit zur Lösungstrajektorie.

### 10.2(c) Die antisymmetrische Struktur der Nambu-Theorie

Wir vergleichen die Struktur der zweidimensionalen kanonischen Hamilton-Theorie mit der Struktur der dreidimensionalen nichtkanonischen Hamilton-Theorie und mit der Struktur der dreidimensionalen Nambu-Theorie. Zur Vereinheitlichung bezeichnen wir Phasenraumvariablen mit  $\mathbf{x} \triangleq x_i$  und die Casimirfunktionen mit  $C$ . Die zweidimensionale kanonische Hamiltonstruktur ( $\rightarrow$  Kap. 10.1(a)) lautet dann

$$(10-25) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{P} \cdot \nabla H = -\mathbf{e}_3 \times \nabla H = \{\mathbf{x}, H\} \quad \text{mit } \mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2), \quad \mathbb{P} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \text{const}$$

und die aus der dreidimensionalen Kreiseltheorie ( $\rightarrow$  Kap. 10.2(a)) abgeleiteten Äquivalente für die nichtkanonischen Hamilton-Theorie bzw. für die Nambu-Theorie:

$$(10-26) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{P} \cdot \nabla H \quad \text{mit } \mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbb{P} = \mathbb{P}(x_i) \neq \text{const}, \quad |\mathbb{P}| = 0, \quad \mathbb{P} \cdot \nabla C = 0$$

$$(10-27) \quad \dot{\mathbf{x}} = \nabla C \times \nabla H \quad \text{mit } \mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2, x_3)$$

Ein Äquivalent für die in (10-25) verwendete Poissonklammer, bzw. für den gleichwertigen Jacobi-Operator wurde für die dreidimensionale Struktur nicht angegeben. Diese Symbole sind Differentialoperatoren, die auf *zwei* Argument-Funktionen wirken, und sie müßten zur Beschreibung der in (10-26/27) dargestellten Dynamik auf *drei* Argumente verallgemeinert werden. Ferner zeigte die Herleitung der zu (10-25) analogen Beziehung (10-7) deutlich, daß die Poissonklammer nur deswegen eingeführt werden konnte, weil  $\mathbb{P}$  *nicht* von den Phasenraumvariablen abhängt, sondern durch die antisymmetrischen Konstanten  $\varepsilon_{ij}$  bestimmt ist. Das verdeutlichen wir noch einmal in der Komponentenform von (10-25):

$$(10-25') \quad \dot{x}_i = P_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \left[ \text{also } \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \text{Hamiltongleichungen!} \right]$$

$$= -\frac{\partial x_i}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial x_i}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} \left[ \text{wegen } \varepsilon_{i1} = -\delta_{i2} = -\frac{\partial x_i}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{i2} = \delta_{i1} = \frac{\partial x_i}{\partial x_1} \right]$$

also:

$$(10-25'') \quad \dot{x}_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} & \frac{\partial x_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_i, H)}{\partial(x_1, x_2)} = J(x_i, H) = \{x_i, H\}$$

( $\rightarrow$  auch (E-58)). - (10-2) lautet in Komponentenform

$$(10-2') \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \left( -\frac{\partial x_i}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial x_i}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial F}{\partial x_i} \left( -\delta_{i2} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \delta_{i1} \frac{\partial H}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial(F, H)}{\partial(x_1, x_2)} = J(F, H) = \{F, H\}$$

Aus (10-25') folgt, daß das entscheidende Hindernis für eine "poissonklammer-analoge" Schreibweise von (10-26) die Phasenraumabhängigkeit  $P(x_i)$  des Poisson-tensors ist. In (10-27) hingegen konnte das Skalarprodukt der Hamiltonfunktion mit  $P(x_i)$  durch ein Kreuzprodukt mit dem Gradienten der Casimirfunktion ersetzt werden, die sich damit als gleichberechtigte Erhaltungsgröße erweist. Dadurch entstand wie in (10-25) ein antisymmetrisches Kreuzprodukt, und hierfür läßt sich eine 3D-Verallgemeinerung der Poissonklammer finden.

In Kap. 10.1(a) haben wir die Klammer  $\{x_i, H\}$  durch Spezialisierung von  $\{F, H\}$  gewonnen. Anders als dort haben wir in (10-2') mit Hilfe der Kettenregel von  $\{x_i, H\}$  auf  $\{F, H\}$  verallgemeinert. Diese Vorgehensweise leitet uns auch bei der gesuchten Verallgemeinerung von  $\{F, H\}$  auf eine entsprechende *dreidimensionale* Klammer. Aus (E-2b),  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}_i a_j b_k \varepsilon_{ijk}$ , ist die Komponentenform von (10-27),  $\dot{\mathbf{x}} = \nabla_C \times \nabla H$ , unmittelbar abzulesen. Für die Komponentenform von (10-26),  $\dot{\mathbf{x}} = P \cdot \nabla H$ , läßt sich jedoch *kein* Levi-Civita-Symbolnutzen. Wir vergleichen (10-25') mit den 3D-Komponentenformen:

$$(10-25') \quad \dot{x}_i = \varepsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \delta_{i1} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \delta_{i2} \frac{\partial H}{\partial x_1} = \{x_i, H\}$$

$$(10-26') \quad \dot{x}_i = P_{ij}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

$$(10-27') \quad \dot{x}_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial C}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial x_1} & \frac{\partial x_j}{\partial x_2} & \frac{\partial x_j}{\partial x_3} \\ \frac{\partial C}{\partial x_1} & \frac{\partial C}{\partial x_2} & \frac{\partial C}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \frac{\partial C}{\partial x_1} & \frac{\partial C}{\partial x_2} & \frac{\partial C}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial(x_i, C, H)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} =: \{x_i, C, H\}$$

Offenbar kann sowohl (10-25') als auch (10-27') statt durch antisymmetrische Tensoren  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  auch durch Kronecker-Symbole  $\delta_{ij}$  dargestellt werden. - Mit (10-27') folgt für das Zeitverhalten einer Funktion  $F(x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned}
 (10-28) \quad \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial C}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial x_k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ \frac{\partial C}{\partial x_1} & \frac{\partial C}{\partial x_2} & \frac{\partial C}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\partial(F, C, H)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \nabla F \cdot \nabla C \times \nabla H =: \{F, C, H\}
 \end{aligned}$$

Natürlich erhält man auch (10-27') "zurück", wenn man für F speziell  $x_i$  wählt, weil dann die erste Zeile der Determinante in die entsprechende Zeile der Kronecker-Symbole übergeht. Die Verallgemeinerung der Poissonklammer zur Nambuklammer ist durch die Definition am Ende der Formelzeile (10-27') bzw. (10-28) erfolgt. Die Nambuklammer ist *zweifach* antisymmetrisch, d.h. sie ändert ihr Vorzeichen bei Vertauschung zweier beliebiger Größen. Dies ist eine direkte Folge der Äquivalenz mit dem Spatprodukt ( $\rightarrow$  (E-3)).

(10-25') beschreibt 2D-Systeme, (10-26') und (10-27') beschreiben 3D-Systeme. Der Unterschied zwischen der kanonischen Hamilton-Darstellung, der nichtkanonischen Hamilton-Darstellung und der Nambu-Darstellung wird durch Vergleich zwischen (10-25'), (10-26') und (10-27') noch einmal deutlich:

- Beide Hamilton-Darstellungen (10-25') und (10-26') sind dadurch charakterisiert, daß der Gradient der Energie mit einem *zweidimensionalen* "Poisson-Tensor" verknüpft ist. In der Nambu-Darstellung (10-27') sind die Gradienten *zweier* Erhaltungsgrößen mit dem *dreidimensionalen* "Nambu-Tensor"  $\varepsilon_{ijk}$  verknüpft.
- Beide kanonischen Darstellungen (10-25') und (10-27') sind dadurch charakterisiert, daß die beteiligten Tensoren *konstant* und durch die antisymmetrischen Symbole  $\varepsilon_{ij}$  bzw.  $\varepsilon_{ijk}$  gegeben sind. Die nichtkanonische Darstellung (10-26'), die das gleiche System beschreibt wie die Nambu-Darstellung (10-27'), enthält einen nur zweidimensionalen, aber von den Phasenraum-Koordinaten abhängigen, und daher *nichtkanonischen*, singulären Poissontensor.

Nach einem Satz der Matrizen- und Determinantenrechnung ist der Rang  $r$  singulärer Tensoren kleiner als die Dimensionszahl  $n$ , d.h. in dem Tensor können nur  $r < n$  linear unabhängige Zeilen oder Spalten dargestellt werden. Wie wir gesehen haben, kann man aber durch eine Dimensionserweiterung den singulären Tensor in einen regulären kanonischen Tensor überführen. Diese Dimensionserweiterung entspricht der Berücksichtigung *aller* unabhängigen Erhaltungsgrößen und damit auch der Überführung der nichtkanonischen Hamilton-Theorie in die Nambu-Theorie.

### 10.3 DIE KONTINUIERLICHE ENERGIE-WIRBEL-THEORIE

#### 10.3(a) Vorticitydynamik

Um das Prinzip der Übertragung der Nambu-Darstellung von Kreisbewegungen auf die kontinuierliche Hydrodynamik zu erläutern, wählen wir in dieser Einführung den einfachsten Fall, nämlich die Nambu-Darstellung der Vorticitygleichung (4-17),  $d_p(\zeta+f)/dt=0$ , (Névir und Blender (1993)). Dabei berücksichtigen wir wie schon in (10-12) nur horizontale Advektionen. Im Inertialsystem entfällt auch  $f$ , und es gilt im  $z$ -System:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \zeta$$

Die ebenfalls vorauszusetzende Inkompressibilität lautet im hier betrachteten 2D-System  $\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h = 0$ . Berücksichtigen wir diese horizontale Divergenzfreiheit wie in (4-25b) durch die Einführung der Stromfunktion  $\psi$ ,  $\mathbf{v}_{hd} = \mathbf{k} \times \nabla_p \psi$ , so erhält man mit Hilfe von (4-25c) im  $z$ -System,  $\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{a} = \mathbf{k} \times \nabla_h \psi \cdot \nabla_p \mathbf{a} = J(\psi, \mathbf{a})$ , die folgende Form:

$$(10-29) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -J[\psi, \zeta]$$

Um nun diese Gleichung durch Erhaltungsgrößen formulieren zu können, muß man erst einmal die Größen *kennen*, die auf der hier betrachteten Strömungsfläche erhalten sind. Das ist natürlich die flächenintegrierte Energie, die hier nur eine Kinetische Energie sein kann, und die für eine Hamiltonformulierung *allein* zu verwenden wäre:

$$(10-30) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}[\mathbf{v}_h] = \iint df \, v_h^2/2$$

Als zweite Erhaltungsgröße, die in die hydrodynamische Nambu-Formulierung zusätzlich eingebaut werden muß, steht die Enstrophie zur Verfügung. Das ist das (halbe) Quadrat der Vorticity, deren Erhaltung wir bereits in Kap. 4.5 festgestellt haben:

$$(10-31) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}[\zeta] = \iint df \, \zeta^2/2$$

Die Verwendung des "Skript"-Fonts für die Energie und die absolute Enstrophie und die eckige Klammer für das jeweilige Argument sollen darauf hinweisen, daß es sich hier nicht um Funktionen handelt, sondern um Funktionale ( $\rightarrow$  Anhang D.1). - In (10-30) wird nun wieder  $\mathbf{v}_h$  durch  $\mathbf{k} \times \nabla_h \psi$  ersetzt. Dann kann auch  $\zeta$  durch  $\nabla_h^2 \psi$  ersetzt werden. Zur Auswertung von  $v_h^2 = (\mathbf{k} \times \nabla_h \psi)^2$  verwenden wir die Hilfsformel (E-5c), also  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ . Wir setzen hier  $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{k}$  sowie  $\mathbf{b} = \mathbf{d} = \nabla_h \psi$  und erhalten

$$\mathbf{v}_h^2 = (\mathbf{k} \times \nabla_h \psi)^2 = k^2 (\nabla_h \psi)^2 - 2\mathbf{k} \cdot \nabla_h \psi = (\nabla_h \psi)^2$$

Die Produktregel (E-14),  $\nabla \cdot \alpha \mathbf{a} = \alpha \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \alpha$  entspricht mit  $\nabla = \nabla_h$ ,  $\alpha = \psi$  und  $\mathbf{a} = \nabla_h \psi$  der Identität

$$\nabla_h \cdot (\psi \nabla_h \psi) = \psi \nabla_h^2 \psi + (\nabla_h \psi)^2 = \psi \zeta + (\nabla_h \psi)^2$$

Diese Beziehung kann nach  $(\nabla_h \psi)^2 = \mathbf{v}_h^2$  umgestellt und in (10-30) eingesetzt werden. Dabei verschwindet das geschlossene Flächenintegral über  $\nabla_h \cdot (\psi \nabla_h \psi)$ , da dieses nach dem zweidimensionalen Gauß'schen Satz (E-53) den Transport aus einer Fläche *heraus* beschreibt ( $\rightarrow$  auch die Begründung für die globale Vorticity-Erhaltung in Kap. 4.5 im Schritt von (4-22) nach (4-23)). Nach dem Ersetzen von  $\iint df \mathbf{v}_h^2/2$  auf der rechten Seite von (10-30) durch  $\iint df \zeta \psi/2$  kann auf der linken Seite das Argument  $\mathbf{v}_h$  durch das Argument  $\zeta$  ersetzt werden, denn  $\psi$  ist ja wegen  $\zeta = \nabla_h^2 \psi$  nicht unabhängig von  $\zeta$ . Somit lautet eine alternative Form von (10-30)

$$(10-32) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}[\zeta] = - \iint df \zeta \psi / 2$$

Diese Form ist zur Gewinnung der Nambu-Darstellung *deswegen* geeigneter als (10-30), weil man nun *beide* globale Erhaltungsfunktionale nach  $\zeta$  ableiten kann ( $\rightarrow$  Anhang D.1). Das ergibt die für die Nambu-Darstellung entscheidenden Gleichungen

$$(10-33) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} = -\psi \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} = \zeta$$

die man unmittelbar in (10-29),  $\partial \zeta / \partial t = -J(\psi, \zeta) = J(\zeta, \psi)$  einsetzen kann:

$$(10-34) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -J \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \right]$$

Wegen der Symmetriebeziehungen des Jacobi-Operators ist schon hier zu sehen, daß in (10-34) die Bedeutungen von  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{E}$  gleichwertig sind. Somit ist es auch im kontinuierlichen Fall einer Feldtheorie gelungen, eine Formulierung zu finden, die nicht wie eine Hamilton-Formulierung ( $\rightarrow$  Anhang D.4) nur auf der Energie fußt, sondern in der *beide* Erhaltungsgrößen  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{E}$  in gleichberechtigter Weise die dynamische Gleichung konstituieren. Damit ist die Sonderrolle der Energie auch im kontinuierlichen Fall beseitigt, und die Nambu'sche Kreiselttheorie ist auf ein hydrodynamisches System erweitert worden. - Mit der Nambu-Felddarstellung (10-34) der Vorticitygleichung und der Kettenregel läßt sich auch die zeitliche Entwicklung eines beliebigen von  $\zeta$  abhängigen Funktionals  $\mathcal{F}(\zeta)$  berechnen:

$$(10-35) \quad \frac{\partial \mathcal{F}[\zeta]}{\partial t} = \iint df \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \iint df \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} J \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \right] =: \{ \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{H} \}$$



Wie das diskrete Analogon in (10-28), so ist auch die hier definierte Nambuklammer trilinear und zweifach antisymmetrisch, und sie verallgemeinert die bilineare Poissonklammer der Hamilton-Dynamik ( $\rightarrow$  Névir 1998). Auch ist mit (10-35) die Vorticitydynamik (10-29) von der Ebene der lokalen Funktionen auf die global-integrale Ebene der Erhaltungsgrößen angehoben worden. - Ganz ähnlich, wie man im diskreten Fall aus der allgemeinen Gleichung (10-28) die spezielle Gleichung (10-27') zurückerhalten kann, so kann man (10-35) auf die Vorticitygleichung (10-34) spezialisieren, wenn man für  $\mathcal{F}$  speziell  $\zeta$  wählt. Dabei geht  $\partial\mathcal{F}/\partial\zeta$  in die Deltafunktion über ( $\rightarrow$  Anhang D.2, Beispiel 1), welche aus dem Integral in (10-35) den Integranden selektiert ( $\rightarrow$  Anhang D.2, Beispiel 5), so daß gerade (10-34) entsteht:

$$(10-34') \quad \partial\zeta/\partial t = \{\zeta, \mathcal{E}, \mathcal{K}\}$$

Das findet im diskreten Fall seine Analogie in den Kronecker-Symbolen der Gleichung (10-27'), die in (10-35) bei der Spezialisierung  $F \rightarrow x_i$  entstehen. - Eine besonders interessante Anwendung von (10-35) erhält man, wenn man das beliebige  $\zeta$ -abhängige Funktional  $\mathcal{F}$  folgendermaßen wählt

$$(10-36a) \quad \mathcal{F}(\zeta) = \iint df \zeta \varphi(x, y, t)$$

also als Flächenintegral eines Produktes von  $\zeta$  mit einer beliebigen Funktion  $\varphi$ . Im Falle  $\varphi = \text{const} = 1$  wird (10-36a) zur Definitionsgleichung der Zirkulation:

$$(10-36b) \quad z(\zeta) = \iint df \zeta$$

( $\rightarrow$  (E-51)). Daß das Zirkulationsintegral bereits ein *Funktional* ist, war in den bisherigen Zusammenhängen noch nicht relevant. (10-36b) ist eine ähnliche Beziehung wie die Beziehung  $M(\rho) = \iiint d\tau \rho$  zwischen Masse und Dichte ( $\rightarrow$  (2-1)). Nun läßt sich ein mit der Vorticity gewogenes Mittel definieren, in Analogie zum baryzentrischen Mittel, das in Kap. 6.2, Formel (6-5) eingeführt wurde:

$$(10-37) \quad \overline{\varphi(t)} = \frac{\iint df \zeta(x, y, t) \varphi(x, y, t)}{\iint df \zeta(x, y, t)} = \frac{\iint df \zeta(x, y, t) \varphi(x, y, t)}{z}$$

Da die Zirkulation wie die Masse konstant ist und die zeitliche Änderung des Zählers durch (10-35) gegeben ist, ist (10-35) mit (10-36a) eine grundlegende Bewegungsgleichung einer "mittleren Zirkulationsdynamik", welche ganz neue Möglichkeiten eröffnet zur Beantwortung meteorologischer und klimatologischer Fragestellungen. Die in Kap. 6.2 beschriebenen Vorteile des mit der Dichte gewogenen Mittels, wie z.B. die drastische Verringerung von Korrelationen gemittelter nichtlinearer Terme, stehen nun auch hier zur Verfügung.

Der Vollständigkeit halber soll auch die nichtkanonische Hamiltondarstellung der Vorticitydynamik kurz dargestellt werden. Das Analogon zur Darstellung für diskrete Systeme, also zu (10-26),  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{P}(\mathbf{x}_i) \cdot \nabla H$  mit  $\mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbb{P} \cdot \nabla C = 0$ , lautet

$$(10-38) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = D(\zeta) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \quad \text{mit} \quad D(\zeta) = - \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right], \quad D(\zeta) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} = 0$$

Der von den Phasenraumvariablen abhängige Poissontensor  $\mathbb{P}(\mathbf{x}_i)$  geht also über in einen von der "Phasenraum - Feldvariablen"  $\zeta$  abhängigen Differentialoperator, und der "Phasenraum - Gradient" von  $H$  geht über in die entsprechende Funktionalableitung des Hamilton-Funktional. Die Eigenwertgleichung (besser "Eigenvektorgleichung",  $\rightarrow$  Ende von Exkurs E.5) für den Eigenvektor  $\nabla C$  zum Eigenwert "Null" des singulären Poissontensors geht über in eine entsprechende Eigenwertgleichung des singulären Differentialoperators  $D(\zeta)$  für eine entsprechende Funktionalableitung des Casimir-Funktional  $\mathcal{E}$ . Mit Hilfe von (10-33),  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} = -\psi$  kann man durch direktes Einsetzen leicht überprüfen, daß (10-34) tatsächlich identisch mit der Vorticitygleichung (10-29) ist. Als Casimir-Funktional, welches ja eine Erhaltungsgröße ist, erhält man das Integral über eine beliebige Funktion von  $\zeta$ :

$$(10-39) \quad \mathcal{E} = \iint df \phi(\zeta)$$

Auch dies läßt sich durch Einsetzen in  $D(\zeta) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} = D(\zeta) \frac{d\phi}{d\zeta} = 0$  direkt bestätigen:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\phi}{d\zeta} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] = 0$$

Damit bestätigt sich auch für die kontinuierliche Feldtheorie, daß die Erhaltungsgrößen, welche in der Nambuformulierung explizit verwendet werden, in der nichtkanonischen Hamiltonformulierung in den Eigenvektoren singulärer Operatoren "versteckt" sind.

### 10.3(b) Dreidimensionale inkompressible Wirbeldynamik

Das dreidimensionale Analogon zur Vorticitygleichung (10-29) ist der Helmholtz'sche Wirbelsatz (4-82),

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = 0$$

Wegen  $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$  und wegen der vorausgesetzten Divergenzfreiheit  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  kann dies mit Hilfe von (E-20)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) && \text{also} \\ \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} - \mathbf{v} (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\xi} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

umgeformt werden zu

$$(10-40) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\nabla_x(\xi \times \mathbf{v}) = \nabla_x((\nabla_x \mathbf{v})_x(\nabla_x \mathbf{A})) \quad \text{mit } \mathbf{v} = -\nabla_x \mathbf{A} \quad \text{wegen } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Zur Überführung von (10-40) in die Nambu-Darstellung der Energie-Wirbel-Theorie benötigt man neben dem Energiefunktional

$$(10-41) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}[\mathbf{v}] = \iiint d\tau \mathbf{v}^2/2$$

eine gleichberechtigte globale Erhaltungsgröße. An die Stelle der Enstrophie (10-31) tritt im dreidimensionalen Problem die Wirbelgröße Helizität:

$$(10-42) \quad h = \iiint d\tau \mathbf{v} \cdot \xi / 2$$

Diese Größe beschreibt die Spiralförmigkeit der Wirbellinien im dreidimensionalen Raum. Sie kann, offenbar im Gegensatz zur Enstrophie (10-31), ein positives *oder* ein negatives Vorzeichen haben. Die Helizität erweist sich in entsprechenden nicht-kanonischen Hamilton-Theorien ebenso als Casimir-Funktional wie die Enstrophie der zweidimensionalen Vorticitydynamik. Den beiden Funktionalableitungen (10-33) entsprechen im dreidimensionalen Fall

$$(10-43) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = -\mathbf{A} \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial \xi} = \mathbf{v}$$

Dies wird eingesetzt in (10-40), und man erhält die gesuchte, in  $\mathcal{H}$  und  $h$  "gleichberechtigte" Energie-Wirbel-Formulierung:

$$(10-44) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\nabla \times \left[ \left[ \nabla \times \frac{\partial h}{\partial \xi} \right] \times \left[ \nabla \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \right] \right] =: \mathbf{K} \left[ \frac{\partial h}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \right]$$

Der hier definierte antisymmetrische vektorielle Differentialoperator

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\nabla_x [(\nabla_x \mathbf{a})_x(\nabla_x \mathbf{b})]$$

läßt die enge Analogie zur Darstellung (10-34) der Vorticitygleichung durch den antisymmetrischen Jacobi-Operator hervortreten. Auch eine zu (10-35) analoge, in allen Variablen antisymmetrische trilineare Nambuklammer  $\{\mathcal{F}, h, \mathcal{H}\}$  zur Berechnung der zeitlichen Änderung eines beliebigen von  $\xi$  abhängigen Funktionals  $\mathcal{F}$  läßt sich definieren. Durch diese werden die algebraischen Eigenschaften der Poissonklammer, zu denen neben der Antisymmetrie hauptsächlich die *Jacobi-Identität* gehört, in äquivalenter Weise verallgemeinert wie durch die Nambuklammer  $\{\mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{H}\}$  in (10-35).

### 10.3(c) Kompressible "adiabatische" Hydro-Thermodynamik

Als drittes Beispiel skizzieren wir die von Névir (1993) und Névir (1998) ausführlich dargestellten Überführungen der Grundgleichungen für die "adiabatische" Atmosphäre im rotierenden Koordinatensystem. Die Ausgangsgleichungen sind

$$(3-6) \quad \rho \, d\mathbf{v}/dt = -2\boldsymbol{\omega} \times \rho\mathbf{v} - \nabla p - \rho \nabla \Phi$$

$$(3-7) \quad \rho \, dT/dt = -p/c_v \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$(3-8) \quad d\rho/dt = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Die Bewegungsgleichung (3-6) soll folgendermaßen umgeformt werden. Zunächst verwenden wir im advektiven Anteil von  $d\mathbf{v}/dt$  die Weber'sche Transformation (E-23) in der Form  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v} + \nabla(v^2/2)$ . Damit entsteht

$$(10-45) \quad \partial \mathbf{v} / \partial t = -(\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{v} - \nabla(v^2/2) - v \nabla p - \nabla \Phi.$$

Eine weitere Umformung besteht in der hydrodynamischen Anwendung  $v \nabla p = \nabla h - T \nabla s$  der Relation  $dh = v dp + T ds$  ( $\rightarrow$  (3-39)). Das ergibt

$$(10-45') \quad \partial \mathbf{v} / \partial t = -(\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{v} - \nabla(v^2/2) - \nabla h - \nabla \Phi + T \nabla s$$

Bei der Komponentenerzerlegung ist zu beachten

$$\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\xi}_a = \boldsymbol{\xi} + \ell \mathbf{j} + f \mathbf{k} = \xi_x \mathbf{i} + (\xi_y + \ell) \mathbf{j} + (\zeta + f) \mathbf{k} =: \xi_x \mathbf{i} + \eta_a \mathbf{j} + \zeta_a \mathbf{k}$$

$$\text{also} \quad (\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\xi}_a \times \mathbf{v} = (\eta_a v_z - \zeta_a v_y) \mathbf{i} + (\zeta_a v_x - \xi_x v_z) \mathbf{j} + (\xi_x v_y - \eta_a v_x) \mathbf{k} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\eta_a v_z + \zeta_a v_y - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{v^2}{2} + h + \Phi \right] + \frac{\partial s}{\partial x} T$$

$$(10-45'') \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\zeta_a v_x + \xi_x v_z - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{v^2}{2} + h + \Phi \right] + \frac{\partial s}{\partial y} T$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = +\eta_a v_z - \zeta_a v_y - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{v^2}{2} + h + \Phi \right] + \frac{\partial s}{\partial z} T$$

(3-8) lautet in lokaler Form

$$(10-46) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

(3-7) kann mit (3-41b),  $d\theta/dt = 0$ , und (3-44)  $ds = c_p d(\ln \theta)$  auch durch die Entropieerhaltung  $ds/dt = 0$  ersetzt werden, d.h. in lokaler Form

$$(10-47) \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla s$$

Das System (10-45) - (10-47) ist offenbar identisch mit der Matrixgleichung

$$(10-48) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\zeta_a}{\rho} & -\frac{\eta_a}{\rho} & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial x} \\ -\frac{\zeta_a}{\rho} & 0 & \frac{\xi_x}{\rho} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\eta_a}{\rho} & -\frac{\xi_x}{\rho} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial x} & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial y} & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_x} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_y} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_z} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} \end{pmatrix}$$

mit

$$(10-49) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_x} = \rho v_x, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_y} = \rho v_y, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_z} = \rho v_z, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = \rho T$$

und mit dem Hamiltonfunktional  $\mathcal{H}$  im Zustandsraum der Euler'schen Variablen  $(\mathbf{v}, \rho, s)$

$$(10-50) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}[\mathbf{v}, \rho, s] = \iiint d\tau \left[ \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho u(s, v) + \rho \phi \right]$$

Zu beachten ist hier, daß  $s$  und  $v$  die *natürlichen Variablen* der Inneren Energie  $u$  sind ( $\rightarrow$  Kap. 1.6). Die Funktionalableitungen ( $\rightarrow$  Anhang D)  $\partial \mathcal{H} / \partial v_x$ ,  $\partial \mathcal{H} / \partial v_y$ ,  $\partial \mathcal{H} / \partial v_z$  in (10-49) sind trivial, die Ableitung  $\partial \mathcal{H} / \partial s$  ergibt sich aus der Kettenregel mit  $\partial u / \partial s = T$ . Die Ableitung  $\partial \mathcal{H} / \partial \rho$  ergibt die Bernoulli-Funktion  $B$ :

$$(10-51) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = B = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + u + p v + \phi = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + h + \phi$$

mit der Enthalpie  $h$ . Auch dies folgt aus der Kettenregel, diesmal unter Beachtung von  $\rho u = \rho u(s, v) = \rho u(s, v(\rho))$  sowie  $\partial u / \partial v = -p$ :

$$\partial(\rho u) / \partial \rho = u + \rho \partial u / \partial v \, dv / d\rho = u + \rho(-p)(-1/\rho^2) = u + p v$$

Wie schon mehrfach erwähnt, ist der Begriff "adiabatische" Atmosphäre zwar üblich, aber nicht ganz korrekt, weil wegen (10-47) in der hier beschriebenen "idealen" Hydro-Thermodynamik nicht nur die ausgetauschte, sondern auch die erzeugte Entropie verschwindet. Der korrekte Begriff wäre "isentropische" Atmosphäre. Die Darstellung (10-48) ist die nichtkanonische Hamilton-Darstellung dieses meteorologischen "isentropischen" Grundgleichungssystems, auch System der *"idealen Hydrodynamik"* genannt.

Wir vergleichen diese Darstellung (10-48) der *Euler'schen* Hydrodynamik mit der *Lagrange'schen* Formulierung (3-6) - (3-8), die ja im Wesentlichen eine Verallgemeinerung der Methoden der klassischen Punktmechanik auf kontinuierliche Systeme darstellt. Die formale kanonische Hamilton'sche Struktur der Mechanik voneinander unterscheidbarer Massenpunkte bleibt dabei prinzipiell erhalten, wenngleich der

Erste Hauptsatz (3-7) und die Kontinuitätsgleichung (3-8) als "Nebenbedingungen" formuliert werden müssen. In der Praxis ist man jedoch seltener an den individuellen Trajektorien der Fluidteilchen interessiert, sondern an den lokalen Euler'schen Feldern, also an (10-45) - (10-47)  $\cong$  (10-48). Wenn man wie in der Lagrange'schen Hydrodynamik für alle individuellen, unterscheidbaren Fluidteilchen ausrechnet, an *welchen* Orten sie sich im Zeitverlauf befinden, und mit *welcher* Geschwindigkeit sie sich bewegen, so kennt man natürlich *auch* das Strömungsfeld  $v(x,y,z,t)$ . Umgekehrt kennt man  $v(x,y,z,t)$  aber schon dann, wenn man weiß, wie die Teilbereiche des Phasenraumes durch irgendwelche Fluidteilchen besetzt sind. Die Kenntnis, *welche* Teilchen das sind, d.h. *welche* Teilchen bestimmte Orte und Impulse haben, ist dabei redundant. Bestimmte "Umnumerierungen" der Teilchen führen auf die gleichen Euler'schen Variablen.

Ein Punkt im "Lagrange-Phasenraum" enthält also mehr Information über den Systemzustand, als benötigt wird. Der Schritt von der Lagrangeform (3-6)-(3-8) zur Eulerform (10-45)-(10-47) ist deshalb folgenreicher, als man vielleicht denken könnte. Nur dieser Schritt hat die nichtkanonische Hamilton-Darstellung (10-48) ermöglicht, und ebenso wie der Poissontensor (10-18) in der nichtkanonischen Kreiseltheorie ist auch der in (10-48) explizit angegebene Differentialoperator der "adiabatischen" meteorologischen Grundgleichungen singular. Als solcher hat er aber Eigenvektoren zu verschwindenden Eigenwerten. Diese Eigenvektoren wiederum sind Gradienten von Bewegungskonstanten, nämlich von Casimirkfunktionen, die mit  $H$  vertauschen.

Die Nambu-Theorie vollzieht die Aufwertung der in den singulären Poisson-Tensoren bzw. Differentialoperatoren versteckten Erhaltungsgrößen auf das gleiche theoretischen Niveau der Hamiltonfunktion schon bei der Formulierung der Evolutionsgleichungen. Durch diese Aufwertung wird es möglich, die Redundanz des Phasenraumes aufzuheben, und dennoch singuläre Tensoren zu vermeiden. M.a.W., die Beschränkung auf den relevanten Anteil des Lagrange'schen Phasenraumes durch die Wahl der Euler'schen Variablen mußte zunächst mit dem Verlust der regulären Poissonstruktur erkaufte werden, die ja identisch ist mit der kanonischen Formulierung. Umgekehrt wird in der kanonischen Lagrange'schen Hamiltonstruktur der konstante, reguläre Poissontensor durch eine Redundanz des Phasenraumes erkaufte. Die Nambu - Formulierung der Hydrodynamik hingegen schafft es auch in der Feldtheorie, die redundanten Anteile des Phasenraumes zu vermeiden, und trotzdem eine kanonische Struktur der Gleichungen zu ermöglichen.

Wie schon in Kap. 10.3(b), so verzichten wir auch hier auf die Herleitung der komplizierten expliziten Formen der trilineare Nambuklammern, ( $\rightarrow$  Névir 1998), da

das den Rahmen dieser Einführung sprengen würde, und da ein Grundverständnis für die Theorie auch ohne diese expliziten Rechnungen vermittelbar sein sollte. Die *stationäre Form* dieser Theorie ( $\rightarrow$  Kap. 10.3(d)) kann sogar *ohne* diese Herleitung voll verstanden werden. Wir beschränken uns daher auf eine Skizzierung des weiteren Ausbaus der Nambu-Formulierung. Zunächst muß entsprechend (10-38),  $D(\zeta) \partial \mathcal{E} / \partial \zeta = 0$ , das Casimir-Funktional bestimmt werden aus  $\mathbf{D}(\zeta) \cdot \partial \mathcal{E} / \partial \mathbf{u} = 0$ , damit man die neben dem Hamilton-Funktional (10-38) "gleichberechtigten" Erhaltungsgrößen findet. Hier ist  $\mathbf{u}$  die vektorielle Zusammenfassung der Euler'schen Felder  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$  und  $s$ . Anstelle des beliebigen Integrals (10-39) über eine beliebige Funktion der Vorticity, ergibt sich hier ein Volumenintegral über eine beliebige Funktion der absoluten Ertel'schen Potentiellen Vorticity,

$$(10-52) \quad \Pi_a(s) = \frac{\xi_a \cdot \nabla s}{\rho}$$

( $\rightarrow$  Kap. 4.14(b), vgl. mit (4-83)), und der Entropie  $s$ :

$$(10-53) \quad \mathcal{E} = \iiint d\tau \rho \Psi(\Pi_a(s), s)$$

Im Gegensatz zu (10-39),  $\mathcal{E} = \iint df \phi(\zeta)$ , wo alle aus der Beliebigkeit der Funktion  $\phi$  resultierenden Casimir-Funktionale voneinander abhängig sind, (und deshalb die Enstrophie als "Repräsentant" gewählt werden konnte), erhält man aus (10-53) *voneinander unabhängige* Erhaltungsgrößen, die auch alle in der endgültigen Formulierung durch Nambuklammern berücksichtigt werden müssen. Wählt man als Spezialisierung der beliebigen Funktion die Konstante  $\Psi = 1$ , so erhält man offenbar die Erhaltungsgröße Masse. Für den Spezialfall  $\Psi = s$  erhält man die Entropie, die ja im isentropen System ebenfalls erhalten ist. Für  $\Psi = \Pi_a$  schließlich erhält man als dritte Erhaltungsgröße die gesamte Wirbelladung der Atmosphäre, deren Erhaltung bereits in Kap. 4.14(b) bewiesen wurde:

$$(10-54) \quad \mathcal{M} = \iiint d\tau \rho, \quad \mathcal{S} = \iiint d\tau \rho s, \quad \mathcal{P} = \iiint d\tau \rho \Pi_a$$

Wie in Kap. 4.14(d) bereits in einem vereinfachten Fall gezeigt wurde, ist jedoch die Ertel'sche Potentielle Vorticity keine elementare Erhaltungsgröße, sondern eine zusammengefaßte Formulierung von Entropie- Massen- und Wirbelerhaltung. Aus diesem Grunde geht in die endgültige "Klammer-Formulierung" der idealen Hydrodynamik nicht die Größen  $\mathcal{P}$  ein, sondern neben den beiden Größen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{S}$  aus (10-54) noch die in Kap. 10.3(b) beschriebene Helizität  $h$  (10-42), die aber im hier verwendeten rotierenden Koordinatensystem durch eine "absoluten Helizität"  $h_a$  zu ersetzen ist:

$$(10-42) \quad h = \iiint d\tau \mathbf{v}_a \cdot \xi_a / 2$$

Damit erhält man nach längerer Rechnung ( $\rightarrow$  Névir 1993 und Névir 1998) in Verbindung mit der Definition relativ komplexer antisymmetrischer Nambu-Klammern (Névir 1998) als Analogon zur Vorticitydynamik (10-34'),  $\partial\zeta/\partial t = \{\zeta, \mathcal{E}, \mathcal{H}\}$ , die Nambu-Darstellung der idealen Hydrodynamik, mit  $\sigma = \rho s$ :

$$(10-55) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \{\mathbf{v}, \mathcal{h}_a, \mathcal{H}\} + \{\mathbf{v}, \mathcal{M}, \mathcal{H}\} + \{\mathbf{v}, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}$$

$$(10-56) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \{\rho, \mathcal{M}, \mathcal{H}\}$$

$$(10-57) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \{\sigma, \mathcal{S}, \mathcal{H}\}$$

In der Kontinuitätsgleichung zur Beschreibung der Dichtetendenz ist das Massenfunktional mit dem Energiefunktional gleichberechtigt, im Ersten Hauptsatz für die volumenspezifische Entropie  $\sigma$  das Entropiefunktional, und die Bewegungsgleichung besteht entsprechend aus einem Helizitäts-Energie-Term, einem Masse-Energie-Term und einem Entropie-Energie-Term. Diese Klammern sind direkte Verallgemeinerungen der Poissonklammern der Hamilton'schen kanonischen Theorie. Das verdeutlicht das theoretische Niveau, auf welches die Grundgleichungen der baroklinen Meteorologie angehoben worden sind. - Da in der Ertel'schen Potentiellen Vorticity im Wesentlichen die drei Erhaltungsgrößen zusammengefaßt werden, die in (10-55) *neben* der Energie eine Rolle spielen, beschreibt der Name "Energie-Wirbel-Theorie" auch hier einen Einblick in die physikalische Struktur des betrachteten Systems.

### 10.3(d) Stationäre Energie-Wirbel-Theorie und der DSI

Der strukturelle Vorteil der Energie-Wirbeldarstellung (10-55) - (10-57) der idealen, kompressiblen atmosphärischen Hydro-Thermodynamik zeigt sich mannigfacher Weise. Einige werden in Kap. 10.4 und 10.5 angesprochen werden. Einer der fruchtbarsten Auswirkungen besteht darin, daß es möglich war, die allgemeine stationäre Lösung des (wohlgemerkt nichtlinearen) Gleichungssystems analytisch zu gewinnen (Névir, persönliche Mitteilung, Veröffentlichung geplant). Diese Lösung besteht in einer allgemeinen Wind- und Temperaturlösung:

$$(10-58) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\rho \Pi} \nabla B \times \nabla \theta$$

$$(10-59) \quad T = \frac{\xi \cdot \nabla B}{\xi \cdot \nabla \theta}$$

Denkt man an den Zusammenhang zwischen der Bernoullifunktion  $B$  und der Energie, sowie an den Zusammenhang zwischen der Potentiellen Temperatur  $\theta$  und der Entropie, so erinnert die Temperaturlösung (10-59) sehr stark an eine durch den Wirbelanteil  $\xi$  "ergänzte" Gibbs'sche Beziehung  $T = \partial E / \partial S$ . - Die Windlösung (10-58) besagt, daß der



allgemeine stationäre Wind in der Schnittlinie der isentropen Fläche und der Isofläche der Bernoullifunktion weht. (10-58) ist bereits angewendet worden zur Berechnung eines dynamischen Wetter- und Klima-Zustandsindex, genannt DSI als Abkürzung für "dynamic state index" (Névir (2001), Névir und Brand (2002)), auf den wir unten kurz eingehen. Zunächst soll die Windlösung (10-58) auf elementare Weise hergeleitet werden. Dazu betrachten wir die stationären Formen der Bewegungsgleichungen (10-45) und (10-45')

$$(10-60) \quad 0 = -(\xi + 2\omega) \times \mathbf{v} - v \nabla p - \nabla(v^2/2 + \phi)$$

$$(10-61) \quad 0 = -(\xi + 2\omega) \times \mathbf{v} + T \nabla s - \nabla(v^2/2 + h + \phi) = -\xi_a \times \mathbf{v} + T \nabla s - \nabla B$$

Die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen haben einen Energie- und einen Wirbelaspekt. Wendet man die Operation  $\mathbf{v} \cdot | \dots$  an, so entfällt der jeweils im ersten Term vertretene Wirbelaspekt, da ein Spatprodukt mit zwei gleichen Vektoren entsteht. Wendet man die Operation  $\mathbf{v} \times | \dots$  an, so entfällt der jeweils im letzten Term vertretene Energieaspekt, da die Rotation eines Gradienten entsteht. Der "Energieaspekt" wird in (10-60) durch die mechanische Energie vertreten, und in (10-61) durch die Bernoullifunktion, die ja gemäß (10-49) die Ableitung des Energiefunktional (10-50) ist, und durch deren Einführung der Druckgradient in (10-61) eliminiert worden ist. - Nun wenden wir die Operation  $\dots \times \nabla \theta$  von rechts auf (10-61) an. Dabei verschwindet das Produkt  $\nabla s \times \nabla \theta$  wegen (3-44),  $s = c_p \ln \theta + C$ . Ferner folgt aus dem Entwicklungssatz  $-(\xi_a \times \mathbf{v}) \times \nabla \theta = -\mathbf{v}(\xi_a \cdot \nabla \theta) + \xi_a(\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) = -\mathbf{v}(\xi_a \cdot \nabla \theta)$  wegen des Ersten Hauptsatzes (3-41b),  $d\theta/dt = 0$ , also auch  $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0$ . Die Operation (10-61)  $\times \nabla \theta$  ergibt also insgesamt das Ergebnis

$$0 = -\mathbf{v}(\xi_a \cdot \nabla \theta) - \nabla B \times \nabla \theta \quad \text{oder} \quad \mathbf{v} = \frac{\nabla \theta \times \nabla B}{\xi_a \cdot \nabla \theta}$$

Mit Hilfe von (4-83),  $\Pi = v \xi_a \cdot \nabla \theta$ , kann im Nenner von  $\mathbf{v}$  die Ertel'sche Potentielle Vorticity  $\Pi$  eingeführt werden, so daß (10-58) bewiesen ist. - Wir vergleichen die Winddarstellungen

$$(10-11) \quad \mathbf{v}_g = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \phi \quad ; \quad (10-13) \quad \mathbf{v}_{ps} = \frac{1}{\zeta + f} \mathbf{k} \times \nabla_p (\phi + k) \quad ; \quad (10-58) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\rho \Pi} \nabla B \times \nabla \theta$$

und stellen fest, daß es sich hier um zunehmend allgemeine stationäre Windlösungen handelt. In (10-11) wird energetisch nur die Potentielle Energie und wirbeldynamisch nur die externe Rotation  $f$  berücksichtigt. Die Verallgemeinerung durch (10-13) besteht in der Berücksichtigung auch der inneren Wirbelgröße Vorticity und der Kinetischen Energie. (10-58) schließlich berücksichtigt *alle* externen und inneren energetischen und wirbeldynamischen Aspekte in vollständiger Form! Neben (10-11) und (10-13) sind in der Literatur noch weitere stationäre Windapproximationen

beschrieben worden, die sich im Grad der Verallgemeinerung des geostrophischen Windes (10-11) voneinander unterscheiden. Erst mit Hilfe der EVT war es möglich, zu zeigen, daß es einen *allgemeinsten* stationären Wind gibt, und daß somit die beschriebene "Wind-Hierarchie" ein natürliches Ende findet.

Zur Herleitung von (10-58) haben wir nur die Euler'sche Bewegungsgleichung und den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik verwendet. Die Kontinuitätsgleichung (10-46) wurde noch nicht verwendet. Sie lautet im stationären Fall  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ . Setzt man hier (10-58) ein, so folgt wegen (E-14),  $\nabla \cdot \alpha \mathbf{a} = \alpha \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \alpha$ , mit  $\alpha = 1/\rho$ ,  $\mathbf{a} = \nabla B \times \nabla \theta$ :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla B \times \nabla \theta / \rho) = \nabla \cdot (\nabla B \times \nabla \theta) / \rho - 1/\rho^2 (\nabla B \times \nabla \theta \cdot \nabla \rho) = 0$$

Der erste Summand verschwindet wegen (E-19) und wegen  $\nabla_x(\nabla \alpha) = 0$ . Folglich muß das Spatprodukt aus den Gradienten von B,  $\theta$  und  $\rho$  verschwinden. Das kann man auch in Form der entsprechenden Determinante formulieren:

$$(10-62) \quad - \nabla B \times \nabla \theta \cdot \nabla \rho \triangleq \frac{\partial(\theta, B, \rho)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

(10-62) beschreibt eine funktionale Abhängigkeit zwischen den *drei* Größen  $\theta, B, \rho$ . Diese Abhängigkeit bedeutet, daß bei  $\theta = \text{const}$ , also auf isentropen Flächen,  $B = B(\rho)$  sein muß. Daher kann der Gradient der Bernoullifunktion in einen Gradienten  $\nabla \rho$  der PV überführt werden, und der Wind weht entlang der Schnittlinien der Isoflächen der Potentiellen Temperatur und der PV:

$$(10-63) \quad \mathbf{v} = \nabla \theta \times \nabla B / \rho \quad \text{mit } B = f(\rho) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v} = f'(\rho) \nabla \theta \times \nabla \rho$$

Auf isentropen Flächen weht der Wind auf Isolinien der PV, und auf den Flächen konstanter PV weht der Wind entlang der Isothermen. Der *erste* Halbsatz ist die "nachträgliche" theoretische Begründung des bereits praktizierten, bisher aber eher empirisch motivierten "PV-Thinking".

Schreibt man (10-58) in der Form  $\rho \mathbf{v} \Pi = \nabla \theta \times \nabla B$ , so erkennt man, daß der Fluß der Potentiellen Vorticity in der Schnittlinie der  $\theta$ - und B-Flächen verläuft. Daher ist die (negative) Advektion  $\rho \mathbf{v} \Pi \cdot \nabla \Pi$  der Potentiellen Vorticity durch die Funktionaldeterminante (10-62) bestimmt:

$$(10-64) \quad \rho \mathbf{v} \Pi \cdot \nabla \Pi = \nabla \theta \times \nabla B \cdot \nabla \Pi \triangleq \frac{\partial(\theta, B, \Pi)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

In der stationären idealen Atmosphäre kann der Wind keine PV advehieren. Das folgt auch schon aus (10-63), jedoch ist (10-64) geeigneter, Verallgemeinerungen zu diskutieren. Zunächst ist klar, daß die Determinante

$$(10-65) \quad \nabla_{\theta} \times \nabla B \cdot \nabla \Pi = \partial(\theta, B, \Pi) / \partial(x, y, z) \neq 0$$

ist, wenn man die in (10-60/61) eingeführte Stationarität nicht verwendet und stattdessen die in Kap. 10.3(c) skizzierte instationäre Theorie verwendet. Andererseits wird auch dann  $\partial(\theta, B, \Pi) / \partial(x, y, z) \neq 0$  sein, wenn man die sogar in Kap. 10.3(c) noch vorausgesetzte Antriebs- und Dissipationsfreiheit fallen läßt! Diabatische Erwärmung und Reibung ergänzen dann (10-64) um einen nichtkonvektiven Transport  $\mathbf{J}_{PV}$  von Potentieller Vorticity. Ein positives Vorzeichen von  $(\rho \mathbf{v} \Pi + \mathbf{J}_{PV}) \cdot \nabla \Pi$  beschreibt einen PV-Gesamttransport in Richtung des PV-Gradienten, was zu einer Gradientverstärkung führt. Im Falle  $(\rho \mathbf{v} \Pi + \mathbf{J}_{PV}) \cdot \nabla \Pi < 0$  werden PV-Gradienten abgebaut. (10-65) präzisiert sich also zu

$$(10-66) \quad (\rho \mathbf{v} \Pi + \mathbf{J}_{PV}) \cdot \nabla \Pi \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial(\theta, B, \Pi)}{\partial(x, y, z)} \begin{cases} > 0 : \text{Gradientverstärkung} \\ = 0 : \text{Stationäre Dynamik} \\ < 0 : \text{Gradientabschwächung} \end{cases}$$

Beim Verschwinden der Determinante (10-66) existiert kein Antrieb und keine Dissipation. Die PV ist eine Funktion der Bernoullifunktion, d.h. die Energie und die Wirbelgröße sind gekoppelt. Im Falle des Nichtverschwindens der DSI-Determinante, also bei Instationarität, gilt (10-63) natürlich *nicht mehr*. Das "PV-Thinking" hat die mit der Stationarität einhergehende Kopplung  $B = B(\Pi)$  zur Voraussetzung! Die EVT zeigt aber deutlich, daß eine *Evolution* des Systems nur möglich ist, falls  $B \neq B(\Pi)$ ! *Die physikalische Evolution hat als Voraussetzung ein voneinander unabhängiges Wirken von Energie- und Wirbelgröße!*

(10-66) ist der von Névir (2001) definierte DSI, dessen Anwendung in Kap. 10.4 kurz beschrieben wird. Voraussetzung für seine Verwendung ist nicht nur wie im bisherigen "PV-Thinking" die Kenntnis der PV auf isentropen Flächen (also die "Wirbelgröße"), sondern *auch* die Kenntnis der Bernoullifunktion B (also die "Energiegröße")! Andererseits *kann* man die Bernoulli-Funktion durchaus auch aus den Routinedaten diagnostizieren, d.h. es ist auch in der Praxis möglich, zu berücksichtigen, daß erst wirbeldynamische *und* energetische Effekte das Gesamtbild ergeben.

#### 10.4 ANWENDUNGEN DER ENERGIE-WIRBEL-THEORIE

Die EVT der Hydro-Thermodynamik und der Meteorologie ist nicht nur ästhetisch sehr befriedigend und vermittelt nicht nur tiefe strukturelle Einsichten in die Physik, sondern sie ermöglicht auch zahlreiche Anwendungen, von denen in diesem Kapitel und im anschließenden "Ausblick" nur *wenige* erwähnt werden können.

### ■ Berechnung des DSI

In Névir (2001) werden Berechnungen des DSI (10-66) referiert. Üblicherweise werden Wetter und Klima durch räumliche und zeitliche Mittelwerte von Temperatur, Luftdruck usw., beschrieben, sowie durch Abweichungen von den so definierten Grundzuständen (→ Kap. 8.1(a)). Es stellt sich nun heraus, daß es günstig ist, stattdessen (10-66) zu verwenden und Abweichungen von dem durch  $DSI = 0$  definierten Energie-Wirbel-Grundzustand zu betrachten. Dieser Grundzustand entspricht ja, wie am Anfang von Kap. 10.3(d) betont, der allgemeinsten stationären Lösung der idealen Grundgleichungen, d.h. dieser Grundzustand ist *physikalisch* definiert und somit von jeder Willkür befreit, die in der Wahl von Mittelungsarten und Mittelungsintervallen liegt. Daß die Atmosphäre diesen physikalisch definierten Referenzzustand tatsächlich "gerne" einnimmt, zeigt eine Häufigkeitsverteilung von etwa 35000 aus den Daten ermittelten DSI-Werten. Diese Verteilung hat ein Maximum im Referenzzustand  $DSI=0$ , und sie ist sehr viel "spitzer" als die Gauss'sche "Glockenkurve". Das bedeutet, daß sich die Atmosphäre wesentlich häufiger im Zustand  $DSI=0$  aufhält, als sie sich durch puren Zufall dort aufhalten würde. Weiterhin zeigen die bisherigen Rechnungen, daß sich die Abweichungen vom Zustand  $DSI=0$  sehr gut interpretieren lassen als vorübergehende Störungen dieses Grundzustandes. Auch diese Störungen sind physikalisch interpretierbar, nämlich im Sinne der Ausführungen in Kap. 10.3(d) einerseits als Einfluß der Instationarität durch das schnell wechselnde Wetter, andererseits als der eher klimatologisch wirksame Einfluß von Antrieb und Reibung.

### ■ EVT-Interpretation der Skalentrennung Wetter-Klima

In Kap. 8.6(c) wurde eine neue saisonale "Klimavariablen" nach Hauschild, Lange, Spitzer (1999) beschrieben, welche mit einer Spektrallücke zum Wetter ausgestattet ist. Diese Entdeckung erfolgte empirisch. Welche physikalischen Zwangsbedingungen die Begründung für die Existenz dieser Variablen liefern, sie also im Sinne von Kap. 8.5 "stabilisieren", muß noch erforscht werden. Eine Idee hierzu liegt jedoch bereits durch die EVT vor, wenn auch noch nicht vollständig sicher ist, ob der gesuchte Zusammenhang zwischen der Nevir'schen Theorie und den vorgeschlagenen neuen Variablen gefunden werden konnte. Die EVT "prognostiziert" ja für den Fall einer funktionalen Abhängigkeit zwischen Energie und Wirbelgröße stationäre Zustände. Durch eine sehr schwache Abhängigkeit zwischen Energie und Wirbelgröße könnten also quasistationäre Zustände mit einer Zeitskala entstehen, die auch die saisonale Zeitskala erreichen könnten. Nun hat Hauschild (2000) diagnostisch bestätigt, daß Energie und Enstrophie wenigstens in einem spektralen Teilbereich die gleiche

k-Abhängigkeit haben. Das bedeutet, daß die von Névir geforderte funktionale Abhängigkeit *aus statistischer* Sicht zumindest teilweise empirisch bestätigt wurde.

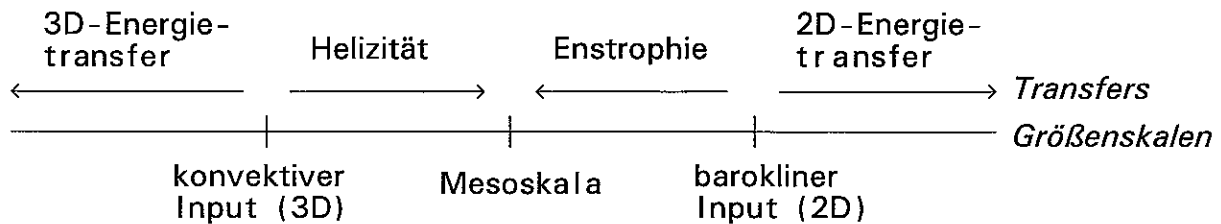
#### ■ EVT-Interpretation der Rossbywellen

Rosbywellen sollten mit Druckänderungen verknüpft sein, also mit Änderungen der Masse in vertikalen Luftsäulen. Schließlich spricht man vom Hochdruckkeil und von Tiefdrucktrog der Rossbywelle. Der Druck kann sich bei reiner Horizontalströmung nur durch Massen - *Divergenzen* ändern, welche aus der Bewegungsgleichung folgen, die man wiederum aus dem Hamiltonprinzip ableiten kann. Andererseits haben wir die Rossbywellen auch als Lösungen der Vorticitygleichung *divergenzfreier* Modelle erhalten! Das macht bereits deutlich, daß aus der Energie ohne Berücksichtigung einer Wirbelgröße nicht die ganze Physik widerspruchsfrei abgeleitet werden kann.

Die in Kap. 10.3(d) hergeleitete Stationaritätsbedingung  $\Pi = \Pi(B)$  läßt sich für die 2D-Vorticitydynamik spezialisieren auf die Bedingung  $\zeta = \zeta(\psi)$ . (Im allgemeinsten Fall übernimmt die Bernoulli-Funktion die Rolle der Stromfunktion). Wenn man nun die Beziehung (4-25a),  $\zeta = \nabla^2\psi$ , auf die Rossby-Wellenlösung (3-71) anwendet, so erhält man  $\zeta = -k^2\psi$ , also gerade eine Konkretisierung der Bedingung  $\zeta = \zeta(\psi)$ , die ja wegen (10-33),  $\partial\mathcal{H}/\partial\zeta = -\psi$ ,  $\partial\mathcal{E}/\partial\zeta = \psi$ , auch eine lineare Energie-Wirbelbeziehung ist. Rossbywellen sind also typische Strukturen im Energie-Wirbel-Grundzustand  $DSI=0$ . Die lineare Energie-Wirbelbeziehung kann auch in nichtgeschlossenen Stromlinien aufrechterhalten werden, weil z.B. auch die Scherungsvorticity eine Rolle spielt. Wenn sich jedoch geschlossene Stromlinien bilden, wird die Proportionalität verlassen, d.h. atmosphärische Wirbelstrukturen sind durch *nichtlineare* Energie-Wirbelbeziehungen charakterisiert. Hier wachsen die Wirbelgrößen gegenüber der Energie *überproportional* an. Dieses Beispiel wirft auch ein neues Licht auf die Nichtlinearität überhaupt: In der EVT ist die Nichtlinearität charakterisiert durch eine Entkopplung der Energie von der Wirbelgröße!

#### ■ Theorie der Meso - Skala

Die EVT ermöglicht Präzisierungen der z.B. in den Kapiteln 6.1(c) und 7.13 beschriebenen Aspekte von atmosphärischen Energietransfers. In Kap. 3.12(a) haben wir den baroklinen Input in die synoptische atmosphärische Skala durch die geeignete quasi-2D-Konvektion besprochen. Zu beachten ist aber auch der Energieinput in die atmosphärische konvektive Skala durch die "normale" 3D-Konvektion. Nun fließen von beiden Inputskalen sowohl Kinetische Energie als auch Wirbelgrößen in beide Skalenrichtungen ab. Wegen der unterschiedlichen Dimensionalität der beiden Inputbereiche kommt es jedoch zu bevorzugten Transfer-Richtungen ( $\rightarrow$  Névir (1998)).



Wie in der Skizze angedeutet, fließt die Energie der 3D-Strömung im Sinne einer normalen Kaskade zu den kleineren Skalen und schließlich in das molekulare Wärmebad ab. Die Energie der 2D-Strömung jedoch durchläuft eine Antikaskade und "füttert" den zonalen Grundstrom, wie bereits in Kap. 7.13 beschrieben. Die entsprechenden Wirbelgrößen sind im 3D-Fall die Helizität, im 2D-Fall die Enstrophie. Die Helizität ist bisher in der Literatur kaum beachtet worden. Ihre Bedeutung ist erst im Rahmen der EVT voll erkannt worden. Die Helizität wurde auch deswegen wenig beachtet, weil sie positiv oder negativ sein kann, und weil man glaubte, daß sich daher der Helizitätseffekt aufhebe. Tatsächlich überwiegt jedoch wegen der Drehung der Ekman-Spirale (→ Kap. 6.7(a)) auf der Nordhalbkugel der positive Schraubensinn, und das hat zur Folge, daß ein relevanter Helizitätstransfer im Sinne einer Antikaskade stattfindet (→ Névir 1998). Da weiterhin der Enstrophie-Transfer zu den kleineren Skalen gerichtet ist, ist die Meso-Skala durch ein "aufeinanderprallen" der 2D- und 3D-Wirbelgrößen charakterisiert. Der Mesoscale wird also als mittlerer, von den Wirbelerhaltungsgrößen dominierter Bereich erkannt, während die Skala der kleinräumigen Turbulenz und die planetarische Skala durch die Energie dominiert sind.

#### ■ EVT und Punktwirbeltheorie

Im Rahmen dieser Einführung konnte hier nicht darauf eingegangen werden, daß die EVT einbettet ist in sehr allgemeine Symmetrieprinzipien, welche bisher hauptsächlich in der Quanten- und Relativitätstheorie zur Anwendung kamen, die dort aber zu entscheidenden Durchbrüchen geführt haben. Diese Prinzipien hängen mit den hier gelegentlich erwähnten algebraischen Eigenschaften der Nambuklammern zusammen. Durch sie ist es erstmals ermöglicht worden, die mächtigen gruppentheoretischen Methoden in der Hydrodynamik zu nutzen. Im Rahmen solcher Untersuchungen gelang es u.a., einen Beweis zu erbringen für die Isomorphie bisher als verschieden angesehen hydrodynamischer Theorien, nämlich der Punktwirbeldynamik und der in diesem Buch ausführlich vertretenen Vorticitydynamik. Das bedeutet für die Praxis der atmosphärischen Dynamik, daß alle Ergebnisse der kontinuierlichen Vorticitydynamik (Rossbywellen, Blocking, inverse Energiekaskade) prinzipiell auch mit Hilfe der "diskreten" Punktwirbeldynamik zu verstehen sind. - Die so bewiesene Äquivalenz beider Theorien bedeutet jedoch nicht, daß sie auch in der praktischen

meteorologischen Anwendung gleichermaßen geeignet sind. Vielmehr scheint bei stark zonal ausgerichteten Strömungszuständen die Vorticitydynamik mit der daraus abgeleiteten Wellentheorie Vorteile zu bieten, bei abgeschlossenen, verwirbelten großräumigen Strömungssystemen hingegen eher die Punktwirbeldynamik. Bisherige Beschreibungen und Erklärungen der stratosphärischen Zirkulation basieren ganz wesentlich auf der 2D-Vorticitydynamik. Es eröffnen sich jedoch ganz neue Sichtweisen und zusätzliche Erklärungsmöglichkeiten, wenn man stattdessen eine Beschreibung mit Hilfe der Punktwirbeldynamik durchführt. Das gilt insbesondere für das noch stark diskutierte Phänomen der mittwinterlichen Stratosphärenenerwärmungen. Auch Blocking - Vorhersagen könnten durch die Punktwirbeldynamik erleichtert werden.

Ein großer Vorteil der Punktwirbel-Dynamik besteht aber darin, ohne Verlust von Symmetrien und Erhaltungsgrößen, nun *a priori* mit gewöhnlichen Differentialgleichungen arbeiten zu können. Diese physikalisch saubere Diskretisierung ist somit der üblichen mathematischen Diskretisierung ( $\rightarrow$  z.B. Kap. 3.15(c)) auf einem Gitter überlegen. Die physikalische Diskretisierung beruht auf folgendem Prinzip. Die Zirkulation ist definiert durch  $Z = \oint \mathbf{v}_h \cdot d\mathbf{t} = \iint \zeta \, dF$ , was zu vergleichen ist mit  $M = \iiint \rho \, dV$ . Nun vollzieht man den gleichen Grenzübergang wie beim Übergang von einer kontinuierlichen Massenverteilung zum Massenpunktsystem:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow 0 \quad \text{bei } Z = \text{const} \quad (\text{wobei } \zeta \rightarrow \infty) && \text{vergl. mit} \\ V &\rightarrow 0 \quad \text{bei } M = \text{const} \quad (\text{wobei } \rho \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$Z$  ist die *Quellstärke* der Punktwirbel. Die Orte  $(x,y)$  dieser Punktwirbel sind kanonisch-konjugierte Variablen, d.h. der Phasenraum ist mit dem Ortsraum identisch. Bei diesem Grenzwert wird aus dem Kontinuum mit  $\infty$  vielen Freiheitsgraden ein diskretes System, denn die Punktwirbel liegen nicht etwa "dicht an dicht". Die Zahl der Freiheitsgrade wird also ebenso reduziert wie bei der Diskretisierung in einem Modellgitter oder wie in einem Spektralmodell nach dem Abbrechen der Reihenentwicklung bei einer bestimmten Wellenzahl. In den beiden letzten Fällen werden aber in der Regel wichtige Symmetrien und Erhaltungsgrößen verletzt.

## 10.5 AUSBLICK

Wir beschreiben einige weitere Anwendungsmöglichkeiten und Auswirkungen der EVT im Bereich der atmosphärischen Wissenschaften und im interdisziplinären Bereich. - Die durch die EVT erkannten energetischen und wirbeldynamischen Zwangsbedingungen konnten in den numerischen Verfahren der Wetter- und Klimamodelle bisher nicht beide beachtet werden, weil die wirbeldynamische Komponente nicht hinreichend *bekannt* war. Ihre Berücksichtigung wird die numerische Forschung und Modellierung

beeinflussen. Die Methode der Punktwirbeldynamik kann als erstes Beispiel hierzu angesehen werden. Ferner ist die durch die Erhaltungs - Funktionale vermittelte "integrale Sicht" ein natürlicher Ansatz in der Klimamodellierung. Wählt man als Funktional die Zirkulationsmittelwerte, hier verstanden als ein über die Vorticity gewogenes Mittel, so können erstmals Aussagen über die Bewegung des Wirbelschwerpunktes und der mittleren Ausdehnung einer Vorticityverteilung *im Kontinuum* gemacht werden. Hier eröffnet sich die Möglichkeit für eine dynamische Klimatheorie, in der Klimazonen auf der Erde (z.B. subtropische Hochdruckgürtel) oder synoptische Aktionszentren (z.B. Polarwirbel) als mittlere Zirkulationsregime interpretiert werden können und so einer globalen prognostischen Beschreibung zugänglich werden.

Die mit dem DSI verbundene verallgemeinerte Diagnostik ist z.B. in der Lage, bevorstehende Gradientverstärkungen der Potentiellen Vorticity zu diagnostizieren, und damit z.B. auch eine Hemmung des Ozonaustausches. Starke PV-Gradienten entsprechen einem "Brandungsgebiet" (engl. "surf zone") von Rossbywellen. In den Karten erscheinen sie als scharfe PV-Ränder. Ferner können mit Hilfe der neuen Theorie neue Tracer aus physikalischen Prinzipien heraus konstruiert werden: Die neuen Größen bleiben erhalten, weil sie in der 3D-Wirbelröhre eingesperrt sind, die *bisherigen* "Deckel"  $\theta$  der Wirbelröhre können ersetzt werden durch die Isoflächen einer wenig reagierenden chemischen Substanz. So erhält man aus der Theorie heraus begründete, wirbeldynamische Tracer.

Die EVT ist nicht *nur* in den atmosphärischen Wissenschaften relevant. Sie hat als erste Nambu-Feldtheorie der Physik überhaupt auch interdisziplinäre Konsequenzen. Zum Beispiel wird bekanntlich bisher bei der gaskinetischen Herleitung der Boltzmannverteilung nur die Erhaltung der Energie und der Masse, *nicht* der Wirbelgröße als Nebenbedingung berücksichtigt ( $\rightarrow$  Kap. 1.12(c)). Auch das Noether-Theorem, welches Erhaltungseigenschaften auf *äußere* Symmetrien zurückführt, bedarf einer Verallgemeinerung. Die EVT ist nämlich eine dynamische Theorie, die sich aus einer Verschmelzung der äußeren Symmetrien der Raum-Zeit mit *inneren* Phasenraumeigenschaften des Fluids ergibt, denn die inneren Symmetrien begründen gerade die Wirbel-Erhaltungsgrößen. - Die neu entdeckte Korrespondenz zur *Spin-Quantentheorie* wurde bereits erwähnt. Darüberhinaus findet Névir (1998) die beiden quantenmechanischen "Bilder" von Schrödinger und Heisenberg auch in der Hydrodynamik wieder, und er beschreibt unter Verwendung der Gruppentheorie weitere strukturelle Bezüge zwischen Hydro-Thermodynamik, Elektrodynamik und Quantentheorie. Z.B. erweist sich die Lenz'sche Regel ( $\rightarrow$  Kap. 4.10(c)) als Bestandteil eines umfassenden atmosphärischen quasigeostrophischen Induktionsgesetzes, welches dem der Elektrodynamik strukturell vollkommen entspricht.