7 STRAHLUNG UND ATMOSPHÄRISCHE ENERGETIK

7.1 STRAHLUNG UND THERMODYNAMIK

In Kap. 2.7(d) wurde anhand der Entropiebilanzgleichung darauf hingewiesen, daß die positive Definitheit der Entropiequelle nicht mehr gewährleistet ist, wenn man im Produktionsterm $-\mathbf{W}\cdot\nabla T/T^2 > 0$ von (2-70) den Wärmestrom **W** durch einen "Strahlungs-Wärmestrom" **R** ergänzt. Die positive Definitheit von $-\mathbf{W}\cdot\nabla T$ beruht darauf, daß der Vektor **W** dem Gradienten ∇T *entgegengerichtet* ist. Da jedoch **R** *nicht* aus dem Temperaturgradienten errechnet wird, und ihm auch nicht entgegengerichtet sein muß, könnte eine als $-\mathbf{R}\cdot\nabla T/T^2$ formulierte Entropiequelle auch negativ sein, was der Zweite Hauptsatz verbietet. Ein Beispiel hierzu gibt ein Gedankenexperiment von Max Planck, wonach man mit einer aus Eis geformten Linse die Sonnenstrahlung so fokussiert, daß ein Feuer entfacht wird. Zwischen Linse und Feuer ist der Strahlungsvektor **R** ganz offensichtlich *nicht* von "warm" nach "kalt" gerichtet! Ein "*Strahlungs-Wärmestrom*" **R** wäre also nicht mit der irreversiblen Thermodynamik verträglich.

Daß der "Strahlungs-Wärmestrom" **R** im Gegensatz zu den diffusiven Wärmeströmen **W** keine thermodynamische Relevanz hat, geht auch aus folgender Überlegung hervor. Jedes Auftreten eines *materiellen* ("diffusiven") Wärmestromes **W** bewirkt einen Ausgleich von Temperaturgegensätzen, und da dieser Ausgleich irreversibel ist, ist das Auftreten von **W** unlösbar mit dem Ablauf eines irreversiblen Vorganges verknüpft. Das Auftreten eines "Strahlungs-Wärmestromes" **R** dagegen ist schon deswegen *nicht* mit Irreversibilität verknüpft, weil man den Strahlungsweg mit Spiegeln umkehren kann, jedenfalls solange keine *Streuungs-, Emissions- und Absorptionsprozesse* stattfinden. Erst die letztgenannten Prozesse sind irreversibel! So gesehen, kann man die irreversiblen Strahlungsvorgänge eher als eine Art *skalare* "Phasenumwandlung von Photonen" deuten als durch einen *vektoriellen* Wärmetransport (Callies und Herbert, (1984)). Diese Überlegungen lassen vermuten, daß man zur Beschreibung irreversibler Strahlungsvorgänge andere Größen als den Vektor **R** benutzen muß. Tatsächlich werden wir in Kap. 7.8 Größen verwenden, die *skalaren* Phasenübergangsflüssen entsprechen.

Das Strahlungsfeld kann man *elektrodynamisch* oder *quantentheoretisch* beschreiben, je nachdem, ob man das Bild der elektromagnetischen Wellen mit der Frequenz ν verfolgt, oder das Bild der Photonen als kleinste, nicht mehr teilbare "Lichteinheiten" mit der Energie $h\nu$ (h = Planck'sches Wirkungsquantum). Wenn man das Strahlungsfeld *thermodynamisch* beschreiben möchte, nämlich durch eine Gibbs'sche Fundamentalform der Art $dE = -pdV + TdS$, so muß man ihm offenbar die Eigenschaften Energie, Druck, Volumen, Temperatur und Entropie zuordnen. Das ist sowohl

im elektrodynamischen als auch im quantentheoretischen Bild möglich. Mit Hilfe der elektrodynamischen Gleichungen kann man berechnen, daß ein isotropes Strahlungsfeld, welches sich in einem bestimmten abgeschlossenen Volumen befindet, auf die Wände dieses Volumens einen Druck ausübt, der einem Drittel der volumenspezifischen Energie des Strahlungsfeldes entspricht. (Beachte, daß die Größen Energie/Volumen und Druck die gleichen Dimensionen haben). Quantenmechanisch gesehen ist der Strahlungsdruck noch anschaulicher zu verstehen, nämlich als mittlere, auf die Fläche bezogene Änderung des Impulses der Photonen bei der Reflexion an den Wänden des Volumens. - Daß man dem Strahlungsfeld auch die weiteren thermodynamischen Größen Temperatur, Energie und Entropie zuordnen kann, geht daraus hervor, daß ein beliebiger Körper in einem zunächst strahlungslosen Vakuum aufgrund seiner Temperaturstrahlung Energie verliert, und dabei wegen $\partial E/\partial S|_V > 0$ *auch Entropie*. Da Energie global erhalten bleibt, und da Entropie global nicht abnehmen kann, *muß* das aufgebaute Strahlungsfeld Träger von Energie und Entropie sein.

Wenn der strahlende Körper in einem anfänglichen "Strahlungs-Vakuum" durch Wände eines <u>Hohlraumes</u> eingeschlossen ist, und wenn die Innenwände die vom Körper ausgesendete Strahlung reflektieren, so wird der Körper die von ihm selbst emittierte Strahlung zunehmend auch wieder *absorbieren*. Somit wird die auf die Zeit bezogene Abnahme der Körper-Energie und -Entropie immer geringer, und auch die Energiezunahme im Strahlungsfeld nimmt ab. Es stellt sich der Zustand eines *Gleichgewichtes* ein, in dem die Körpertemperatur *nicht* mehr abnimmt. Diese Gleichgewichtstemperatur des Körpers charakterisiert auch das dann entstandene Strahlungsfeld, sie kann ihm *zugeordnet* werden! Somit ist auch eine <u>Strahlungstemperatur</u> definiert. Der *Hohlraum* ist in der Strahlungsphysik deswegen so wichtig, weil er die experimentelle Vorrichtung zur Herstellung dieses Gleichgewichtes darstellt! - Dieses Gedankenexperiment hat große Ähnlichkeit mit dem eines Wassertropfens, den man in einen trockenen abgeschlossenen Raum einbringt, und der durch Verdunstung den Raum mit Wasserdampf füllt, bis der Sättigungsdampfdruck erreicht ist, bei dem sich die *chemischen Potentiale* von Wasser und Dampf angeglichen haben. - Da der geschilderte Prozeß des Erreichens des Gleichgewichtes irreversibel ist, kann Entropie nicht nur von der Materie zum Strahlungsfeld "gewandert" sein, sondern es muß auch Entropie *erzeugt* worden sein: das Gleichgewicht ist wieder durch ein Maximum der Entropie im isolierten System charakterisiert (→ Kap.1.8(b))!

Wenn sich im Hohlraum *mehrere* Körper ungleicher Temperatur befinden, so findet zwischen ihnen durch Absorptions- und Emissionsprozesse ein Entropie- und Wärmeaustausch statt bis zum sogenannten <u>Strahlungsgleichgewicht</u>, bei dem alle Körpertemperaturen gleich sind und konstant bleiben, weil jeder Körper ebensoviel Energie

emittiert wie er absorbiert. Die Temperaturen ändern sich also nicht mehr, *obwohl* Emissions- und Absorptionsprozesse nach wie vor stattfinden, und obwohl die Körper durchaus ein *unterschiedliches Absorptionsvermögen* haben können. Wenn also bei diesem Strahlungsgleichgewicht im Hohlraum ein Körper eine größere Energiemenge absorbiert als ein gleichgroßer anderer, so muß er auch entsprechend mehr Energie emittieren. Dies ist die "Prevost'sche Regel".

Das soeben definierte Strahlungsgleichgewicht als "Gleichgewicht" zwischen absorbierter und emittierter Strahlungsenergie ist *kein* zusätzlicher Bestandteil des thermodynamischen Gleichgewichtes, wozu nach den Erörterungen in Kap. 1.8(b) thermisches, chemisches und mechanisches Gleichgewicht gehören. Im Strahlungsgleichgewicht kann höchstens ein thermisches Gleichgewicht *vermittelt* werden, wenn die Randbedingungen dieses zulassen und wenn keine "materiellen" Wärmetransporte wie Wärmeleitung oder Konvektion zur Verfügung stehen, welche ja "normalerweise" den Temperaturausgleich zwischen unterschiedlich temperierten Teilsystemen bewirken. Anders als der Hohlraum ist die Atmosphäre ein *offenes* System, sogar mit nichthomogenen Randbedingungen. Hier liegt von vornherein kein thermodynamisches Gleichgewicht vor (→ Kap. 1.9(c)). Dennoch kann auch hier *Strahlungsgleichgewicht* vorliegen! Dann führen die Absorptions- und Emissionsprozesse zwar nicht zur Angleichung der Temperaturen, jedoch zu deren zeitlicher Konstanz. Wenn diese zeitliche Konstanz unter Mitwirkung von strahlungsbedingten *und materiellen* Energietransporten aufrechterhalten wird, so kann natürlich *kein* "Strahlungsgleichgewicht" zwischen absorbierter und emittierter *Strahlungsenergie* bestehen. Ein solches "energetisches Gleichgewicht" zwischen empfangener und abgegebener Wärme ist also weder mit Strahlungsgleichgewicht noch mit thermodynamischem Gleichgewicht zu verwechseln.

Kommen wir noch einmal zum Hohlraum zurück, in dem das Strahlungsgleichgewicht zu einem thermischen Gleichgewicht führt, welches schon in Kap. 1.8(b) besprochen wurde, dort allerdings durch Wärmeübertragung innerhalb des *materiellen* Feldes zustande kam. Wir haben besprochen, daß wir das thermodynamische Gleichgewicht als "Summe" von thermischem, mechanischem und chemischem Gleichgewicht nicht um das "Strahlungsgleichgewicht" erweitern müssen, wenn wir nun gegenüber Kap. 1.8(b) das materielle Feld durch das Strahlungsfeld ergänzen. Wir müssen jedoch das dort definierte thermodynamische Gleichgewicht um eine *andere* "Komponente" erweitern, und zwar um das Strahlungsfeld - Gleichgewicht. Dieses darf nicht mit dem Strahlungsgleichgewicht verwechselt werden. Letzteres bezeichnet ja einen durch das Strahlungsfeld *vermittelten* Temperaturzustand *in der Materie*, während das Strahlungsfeld - Gleichgewicht einen Zustand *im Strahlungsfeld selbst* bezeichnet. Das Strahlungsfeld ist im Gleichgewicht, wenn es isotrop ist, d.h. wenn die Strahlung

keine Richtung "bevorzugt" oder sonstwie auszeichnet, und wenn keine Frequenzbesonderheiten auftreten. Letzteres ist dann der Fall, wenn das Strahlungsfeld entsprechend dem Planck'schen Gesetz (→ Kap. 7.3(a)) frequenzmäßig "schwarz" verteilt ist.

Entsprechend befindet sich das Strahlungsfeld im *Nichtgleichgewicht*, wenn es richtungsmäßig und frequenzmäßig geordnet ist. Dann verändert sich durch die fortdauernden Emissions-, Absorptions- und Streuprozesse nicht nur das materielle Feld, sondern auch das Strahlungsfeld *selbst*. Diffuse Streuung vergrößert die Richtungsvielfalt (verringert die "Kohärenz" der geordneten Strahlung). Ferner eliminieren Absorptions- und Emissionsprozesse durch Materie alle Richtungs- *und* Frequenzbesonderheiten. Dabei wird Entropie produziert, d.h. auch hier wird die Entropie auf einen "negativen" Ordnungsbegriff zurückgeführt. Sie hat erst dann den Höchstwert erreicht, wenn das Strahlungsfeld-Gleichgewicht erreicht ist, bzw. wenn thermodynamisches Gleichgewicht erreicht ist, zu dem nun auch das Strahlungsfeld-Gleichgewicht gehört. - Ein Strahlungsgleichgewicht kann auch vorliegen, wenn das Strahlungsfeld (noch) geordnet ist, d.h. sich selbst im Nichtgleichgewicht befindet!

7.2 GRUNDBEGRIFFE DER STRAHLUNGSPHYSIK

7.2(a) Das elementare Strahlenbündel

Wie wir in Kap. 2.1 besprochen haben, sind die Elementargebilde des hydrodynamischen Strömungsfeldes nicht etwa singuläre Massenpunkte, sondern die Luftteilchen mit nichtverschwindender, wenn auch infinitesimaler Ausdehnung. Diese Luftteilchen kennen bereits Eigenschaften wie Temperatur oder Dichte, d.h. sie bestehen trotz ihrer infinitesimalen Ausdehnung aus so viele Massenpunkten, daß die in Kap. 1.2 beschriebene thermodynamische Mittelung möglich war. Die "Atomisierung" des materiellen Strömungsfeldes besteht also darin, daß man infinitesimale materielle Volumenelemente betrachtet, die folglich einen dreifach infinitesimalen Energiebetrag beinhalten. Wie hat man sich nun eine entsprechende "Atomisierung" des nichtmateriellen Strahlungsfeldes vorzustellen? Wie sieht *sein* Elementargebilde aus?

Obwohl es eine populäre Vorstellung ist, daß das Elementargebilde des Strahlungsfeldes ein Einzelstrahl wäre, ist dies nicht der Fall. Ein Einzelstrahl entspricht eher einem Lichtquant und somit einem Massenpunkt (Atom) des materiellen Feldes. Hingegen entspricht das materielle Luftteilchen einem *infinitesimalen monochromatischen Strahlenkegel* mit infinitesimalem Öffnungswinkel, auch Elementarbündel oder

Elementarkegel genannt. Betrachtet man das Strahlungsfeld im materiell leeren Raum, so gehen von jedem Raumpunkt solche Elementarbündel nach allen Richtungen aus. Diese Raumpunkte sind zu vergleichen mit den Punktquellen der Sekundärwellen bestimmter Wellenlängen nach dem Huyghen'schen Prinzip. Zu beachten ist, daß in den Kegeln die Energie in beide Richtungen fließen kann. I.A. geht also ein Energie-Abfluß in einem *bestimmten* Kegel einher mit einem Energie-Zufluß in entgegengesetzter Richtung. Die Energie fließt in Richtung Kegelöffnung *und* in Richtung Kegelspitze (und dann weiter in Richtung Kegelöffnung eines *entgegengesetzten* Kegels).

Ein *streng mathematischer* Punkt kann nicht von Energie "durchströmt" werden, denn dann müßte die Flächendichte des Strahlungsflusses unendlich sein. Man könnte meinen, daß die Fokussierung der Sonnenstrahlen im "*Brennpunkt*" einer Sammellinse ein Gegenbeispiel sei. Tatsächlich aber sammelt die Linse die Sonnenstrahlen *nicht* in einem Punkt, sondern sie erzeugt ein kleines *flächenartiges* Bild der Sonne. Die Spitze des infinitesimalen Elementarkegels ist also kein Punkt, sondern eine zweifach infinitesimale Fläche d^2A. Ebenso ist der Öffnungswinkel

$$d^2\omega = d^2s/r^2$$

zweifach infinitesimal. Dieser Raumwinkel ist der Quotient zwischen "Öffnungs-Fläche" d^2s und dem Quadrat der Kegellänge r. Er wurde analog zum *Flächenwinkel* als Verhältnis "Bogenlänge ds / Radius r" definiert. Der Energiegehalt bei gegebener Kegelspitzenfläche d^2A und bei gegebener Öffnung $d^2\omega$ hängt außer von diesen beiden Intervallgrößen noch ab von dem Winkel zwischen der Flächennormalen auf d^2A und der Symmetrieachse des Raumwinkels $d^2\omega$. Je größer dieser Zenitdistanzwinkel ϑ ist, desto geringer ist die "Sichtfläche" von d^2A in Durchflußrichtung. Die resultierende Verringerung des Energie-Gehaltes im Elementarkegel ist durch

$$\mu = \cos\vartheta$$

gegeben. Die "Atomisierung" des Strahlungsfeldes beschränkt sich jedoch nicht nur darauf, daß die flächenartige Kegelspitze und der Öffnungswinkel infinitesimal sind. Der Elementarkegel hat zudem auch noch eine infinitesimale Länge, und auch die Wellenlängen bzw. die Frequenzen der beteiligten elektromagnetischen Wellen liegen in einem infinitesimalen Intervall. Während also das Luftteilchen als materielles Elementargebilde einen dreifach infinitesimalen Energiegehalt d^3E hat, ist die Energie d^6E des Strahlungsbündels sechsfach infinitesimal. Sie enthält sechs infinitesimale Faktoren:

1) Die Energie, die das Flächenelement durchströmt, hängt von seiner Größe d^2A ab (wie gesagt verschwindet die Energie, die durch einen Punkt strömt).
2) Der Öffnungswinkel (ein Raumwinkel $d^2\omega$) ist infinitesimal. (Ein "Einzelstrahl" wäre ein Strahlenbündel mit dem Öffnungswinkel Null und könnte keine Energie enthalten). Durch die Symmetrieachse von $d^2\omega$ ist eine Neigung ϑ gegenüber der Flächennormalen zu d^2A vorgegeben, (s.u., Skizze in Kap. 7.2(b)), von der die Energie d^6E über den Faktor $\mu=\cos\vartheta$ ebenfalls abhängt.
3) Die Länge des Kegels ist infinitesimal. Sie ist gegeben durch das Produkt cdt aus Lichtgeschwindigkeit c=const und einem infinitesimalen Zeitabschnitt dt. (Ein Kegel der Länge Null enthielte natürlich keine Energie).
4) Die Frequenzen des Strahlungskegels bilden ein infinitesimales Frequenzintervall $d\nu$. (Ein monochromatisches Bündel im *wörtlichen* Sinn hätte ein verschwindendes Frequenzintervall und damit keine Energie).

Insgesamt ist d^6E proportional zu μ und zu den infinitesimalen Intervallen:

(7-1) $$d^6E = I_\nu\, d^2A\, \mu d^2\omega\, dt\, d\nu \quad \longleftrightarrow \quad I_\nu = d^6E \,/\, d^2A\, \mu d^2\omega\, dt\, d\nu \qquad \text{mit}$$
$$\mu = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad d^2\omega = d^2s/r^2$$

Wir betrachten also Strahlenbündel der Länge cdt mit Wellen im Frequenzbereich $d\nu$, deren Spitzen auf d^2A liegen, die nach beiden Seiten mit einem Raumwinkel $d^2\omega$ geöffnet sind, und die mit der Flächennormalen den Winkel ϑ einschließen. Der Proportionalitätsfaktor I_ν heißt monochromatische (oder spektrale) Strahldichte oder Intensität, engl. "spectral radiance" oder "intensity". I_ν ist die Strahldichte *unpolarisierter* Strahlung, andernfalls muß Gleichung (7-1) noch den Faktor 2 enthalten. - I_ν ist eine orts- und zeitabhängige Feldfunktion, die noch zusätzlich von der Richtung des Bündels abhängt, die durch den Einheitsvektor **e** gegeben sei: $I_\nu = I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{e},t)$ Spezialfälle liegen vor, wenn die Abhängigkeit von der Richtungskoordinate oder von der Richtungs- und Raumkoordinate entfällt:

$I_\nu = I_\nu(\mathbf{r},t)$: Isotropes Strahlungsfeld (unabhängig von der Richtung **e**)

$I_\nu = I_\nu(t)$: Homogen-isotropes Strahlungsfeld (auch ortsunabhängig)

7.2(b) Radiometrische Strahlungsgrößen

Durch eine Frequenzintegration erhält man aus (7-1)

$$d^5E = d^2A\, \mu d^2\omega\, dt \int_0^\infty I_\nu\, d\nu \qquad \text{oder mit}$$

(7-2) $$I = \int_0^\infty I_\nu\, d\nu \qquad \text{die fünffach infinitesimale Energie}$$

(7-3) $d^5E = I\, d^2A\, \mu d^2\omega\, dt \quad \leftrightarrow \quad I = d^5E \,/\, d^2A\, \mu d^2\omega\, dt$

Aus der in (7-2) definierten *spektralintegrierten* ("*gesamten*") Strahldichte oder Intensität I, auch "Helligkeit" genannt, läßt sich umgekehrt durch Differentiation auch wieder die spektrale Größe bilden:

(7-4) $I_\nu = dI/d\nu$

Anstelle von (7-4) kann man durch Ableitung nach λ auch eine auf die *Wellenlänge* bezogene monochromatische Intensität bilden:

(7-5) $I_\lambda = dI/d\lambda$

Die Frequenz ν hat gegenüber λ den Vorteil, daß sie sich beim Durchgang durch Materie nicht ändert. Daher ist die spektrale Größe I_ν der Größe I_λ oft vorzuziehen. Die Einheiten sind

$[I_\nu]$ = Energie / (Zeit·Fläche·Raumwinkel·Frequenz)
= Watt·s/(m²·Steradiant) = Joule/(m²·Steradiant)

$[I_\lambda]$ = Energie / (Zeit·Fläche·Raumwinkel·Wellenlänge)
= Watt/(m³·Steradiant)

$[I]$ = Energie / (Zeit·Fläche·Raumwinkel) = Watt/(m²·Steradiant)

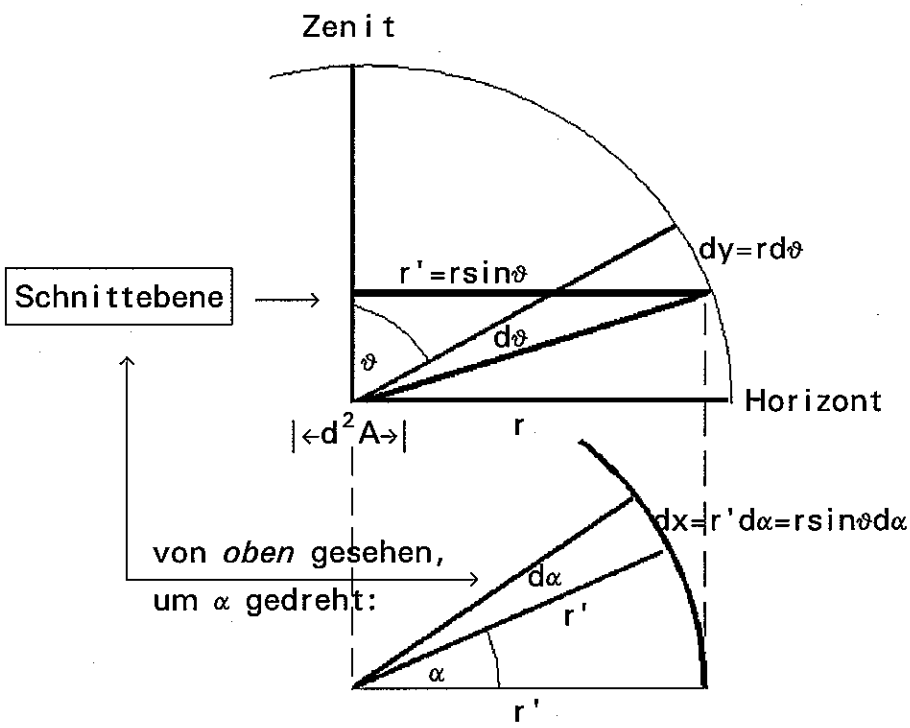
Die Umrechnungsformel zwischen den spektralen Größen lautet

(7-6) $I_\nu = (-)\, \frac{\lambda^2}{c}\, I_\lambda$

denn wegen $\lambda = c/\nu$ (oder $\nu = c/\lambda$) ist $\lambda = \lambda(\nu)$ mit $\partial\lambda/\partial\nu = -c/\nu^2 = -\lambda^2/c$ also:

$$I_\nu = \frac{\partial I}{\partial \nu} = \frac{\partial I}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = I_\lambda \left(-\frac{\lambda^2}{c} \right) \quad \text{q.e.d.}$$

Während sich die (spektralen oder gesamten) Strahldichten (Intensitäten) auf den Energiestrom durch das Flächenelement in *eine* Richtung beziehen, umfassen die entsprechenden "Flußdichten" die Energieströme in *alle* Richtungen. Flußdichten sind also Raumwinkelintegrale über Strahldichten. Man gewinnt sie durch Integration von I_ν über alle Raumwinkel nach einer Seite. Dazu benötigen wir die Darstellung des Raumwinkels in Kugelkoordinaten. Der Zenitdistanzwinkel ϑ hängt mit dem geographischen Breitenwinkel φ zusammen durch die Beziehung $\vartheta \triangleq 90° - \varphi$ (→ Anhang B.1(a)). Der Azimutwinkel α des Raumwinkels entspricht genau dem Längenwinkel. (Daher bezeichnen wir den Azimut *nicht*, wie sonst üblich, mit φ). Der in (7-1) enthaltenen Öffnungswinkel $d^2\omega = d^2s/r^2$ benötigt eine Öffnungsfläche d^2s, die sich aus der folgenden Skizze ergibt:



$$d^2s = dx\,dy = (r\sin\vartheta d\alpha)\,(rd\vartheta) = r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\alpha.$$

(7-7) $$d^2\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\alpha = (-)\, d\mu\, d\alpha \qquad \text{mit} \quad \mu = \cos\vartheta$$

Das Minuszeichen in der zweiten Zeile wird oft weggelassen, da man den Winkel-*Betrag* im Auge hat und nicht die Raumwinkeländerung bei einer Änderung von $\cos\vartheta$. (Ganz ähnlich wird auch in (7-6) das Minuszeichen oft weggelassen, da dort nicht das bezüglich ν und λ gegenläufige Verhalten interessiert, sondern die absolut zu nehmende Strahldichte). Mit (7-1) und (7-7) ergibt sich:

$$d^4E = d^2A\, dt\, d\nu \iint \mu d^2\omega\, I_\nu = d^2A\, dt\, d\nu \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, I_\nu$$

Mit der monochromatischen <u>Flußdichte</u> F_ν, (engl. "irradiance" oder "flux density"):

(7-8) $$F_\nu = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, I_\nu \equiv \iint \mu d^2\omega\, I_\nu\,,$$

(Einheit Energie/(Fläche·Zeit·Frequenz) = J/m^2), schreibt sich die obige vierfach infinitesimale Energie:

(7-9) $$d^4E = d^2A\, dt\, d\nu\, F_\nu \quad \leftrightarrow \quad F_\nu = d^4E \,/\, d^2A\, dt\, d\nu$$

Bei <u>isotroper</u> <u>Strahlung</u> ist der Integrand I_ν in (7-8) von den Winkeln α und ϑ unabhängig, und man erhält

$$F_\nu = I_\nu \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$F_\nu = 2\pi \, I_\nu \left[\frac{1}{2} \sin^2\vartheta \right]_0^{\pi/2}$$

also

(7-10) $F_\nu = \pi \, I_\nu$

Ebenso gilt nach Frequenzintegration auf beiden Seiten:

(7-11) $F = \pi \, I$

mit der zu (7-2) analogen Beziehung

(7-12) $F = \int_0^\infty F_\nu \, d\nu$ [F] = Energie/(Fläche·Zeit) = Joule/m²s = Watt/m²

Der <u>Strahlungsfluß</u> ϕ (auch <u>Strahlungsleistung</u>, engl. "total flux", "radiant power" oder "radiant flux") ist gegeben durch die Integration über eine endliche Fläche:

(7-13) $\phi = \iint F \, d^2A$ [ϕ] = Energie / Zeit = Watt

Wählt man für A eine *geschlossene* Fläche, so ist ϕ die gesamte Energiemenge, die die im inneren enthaltenen Strahlungsquellen in der Zeiteinheit ausstrahlen. - Es ist zu beachten, daß diese in der Strahlungslehre übliche Definition eines Energieflusses abweicht von der bisherigen Definition eines materiellen Flusses einer beliebigen Eigenschaft (→ Kap. 2.2(a)) , z.B. der Energie:

<u>*bisher*</u>: "Energiefluß" = Energie/(Zeit·Fläche)

<u>*nun*</u>: "Energiefluß" = Energie/Zeit ; "Energieflußdichte" = Energie/(Zeit·Fläche)

Integriert man auch noch über die Zeit, (bei *konstantem* Fluß reicht auch eine Multiplikation mit der Zeit), so erhält man die gesamte in dieser Zeit abgegebene Energie E. - Für F, ϕ und E lassen sich entsprechende Beziehungen wie (7-1), (7-3) oder (7-9) herleiten.

Zusammenfassender Überblick über die radiometrischen Größen:

I_ν = spektrale Strahldichte (Intensität)
I = gesamte Strahldichte (Intensität)
F_ν = spektrale Flußdichte
F = gesamte Flußdichte
ϕ = Fluß (Strahlungsleistung)
E = Energie

Das Wort "spektral" (bei Bezug auf ν *oder* λ) kann auch durch das Wort "monochromatisch" ersetzt werden. Das Wort "gesamt" steht für "spektralintegriert". Die Integrationen lauten zusammengefaßt:

$$d^5E = \left[\int d\nu\, I_\nu \right] d^2A\, \mu d^2\omega\, dt \equiv I\, d^2A\, \mu d^2\omega\, dt$$

$$d^4E = \left[\iint \mu d^2\omega\, I_\nu \right] d^2A\, dt\, d\nu \equiv F_\nu\, d^2A\, dt\, d\nu$$

$$d^3E = \left[\iiint \mu d^2\omega\, d\nu\, I_\nu \right] d^2A\, dt \equiv F\, d^2A\, dt$$

$$d^2E = \left[\iiiint \mu d^2\omega\, d\nu\, dt\, I_\nu \right] d^2A \equiv \phi\, d^2A$$

Natürlich sind auch andere Integrationen möglich, z.B. kann über d^2A integriert werden, ohne über die übrigen Intervalle zu integrieren. - Der "*Strahlungswärmefluß*" **R**, der in Kap. 7.1 erwähnt wurde, aber auch bereits in Kap. 2.7(d) diskutiert wurde, ist gegeben durch

$$\text{(7-14)} \qquad \mathbf{R} = \iiint \mathbf{e}\, I_\nu\, d^2\omega\, d\nu$$

(Beweis → Kap. 7.7, (7-82b)). Als Raumwinkelintegral über Strahldichten ist der "*Strahlungs-Wärmestrom*" **R** eine mit dem Einheits-Richtungsvektor **e** multiplizierte *vektorielle Flußdichte* senkrecht durch die Fläche d^2A.

7.2(c) Überblick über irreversible Strahlungsvorgänge

Die bisher eingeführten Begriffe beschreiben die Ausbreitung der Energie im Strahlungsfeld ohne Wechselwirkung mit Materie, so daß die Strahldichte invariant bleibt. Auch die Entropie des Strahlungsfeldes ändert sich nicht, da die reine Ausbreitung wegen der grundsätzlich möglichen Strahlungsumkehr reversibel ist. Energieübergänge zwischen der Materie und dem Strahlungsfeld finden bei Emissions- und Absorptionsprozessen statt. - Die emittierte Energie geht auf Kosten der Körperenergie. Wenn dies elektrische und/oder chemische Energie ist, so spricht man

von "*Lumineszenz*", ist es die "Wärme", so spricht man von "*Wärmestrahlung*" oder "*Temperaturstrahlung*", die uns hier *ausschließlich* interessiert.

Emissions- und Absorptionsprozesse sind irreversibel, ebenso wie Streuprozesse. Dies sind Wechselwirkungen zwischen Materie und Strahlungsfeld, bei denen sich die Energien der beiden Systemkomponenten *nicht* ändern, sondern nur die Richtungen der Energieausbreitung im Strahlungsfeld. Die Größe der streuenden Teilchen variiert zwischen 10^{-8} cm (Moleküle) bis 1 cm (Hagelkörner, Regentropfen). Das Streumuster hängt vom Quotienten q aus Partikelgröße und Wellenlänge ab. Man unterscheidet zwischen *Rayleigh-Streuung* ($q < 1$, z.B. als Ursache für das "Himmelsblau") und *Mie-Streuung*, die hauptsächlich in Vorwärts- Richtung stattfindet ($q \geq 1$). Moleküle oder Wolkentröpfchen streuen die im *sichtbaren* Spektralbereich auffallende Strahlung fast vollständig. Ein Weißer Körper ist dadurch definiert, daß er keinerlei Energie absorbiert, daß er also die Strahlung *aller Frequenzen* streut (wobei die Transmission als Sonderfall der Streuung mit verschwindender Richtungsänderung angesehen wird). Daher kann er wegen der Prevost'schen Regel (→ Kap. 7.1) auch nicht emittieren. Ein weißer Körper ist also nur zu sehen, *weil* er streut.

Partiell emittierende Gegenstände streuen nur *einen Anteil* der auffallenden Strahlung, da sie nach der Prevost'schen Regel auch einen Anteil absorbieren müssen. Bei "normaler" Temperatur sind sie jedoch nur aufgrund des gestreuten, nicht des emittierten Anteils sichtbar, wie aus den Strahlungsgesetzen folgt (→ Kap. 7.3). Ein Grauer Körper ist dadurch definiert, daß das Verhältnis zwischen absorbierter und gestreuter Energie von der Frequenz unabhängig ist. Körper sind *farbig* bei frequenzabhängiger Absorption. Z.B. absorbiert Gras im roten und blauen Spektralbereich, und "grün" bleibt in der Streustrahlung übrig. Ein Schwarzer Körper ist dadurch definiert, daß er sogar die *gesamte* auffallende Strahlung jeder Wellenlänge absorbiert. Da die Streuung verschwindet, kann man ihn nur sehen, wenn seine Emission im sichtbaren Spektralbereich stattfindet, d.h. nach den Strahlungsgesetzen bei hoher Temperatur: Er muß "glühen", d.h. der "Schwarze" Körper wird "rot"!

7.3 STRAHLUNGSGESETZE

7.3(a) Das Planck'sche Gesetz und Spezialfälle

Das Planck'sche Strahlungsgesetz beschreibt die Emission eines schwarzen Körpers mit der Temperatur T. Die Bezeichnungsweise der radiometrischen Größen weicht im Falle der Schwarzstrahlung etwas von der in Kap. 7.2 beschriebenen ab. Mit den Symbolen

"$\rightarrow$" für "Integration über" bzw. "Multiplikation mit"
"$\leftarrow$" für "Differentiation nach" bzw. "Division durch"

(letzteres jeweils für *konstante* Verhältnisse) kann man die Beziehungen zwischen den radiometrischen Strahlungsgrößen aus Kap. 7.2(b) folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccccccc} I_\nu & \xleftrightarrow{d\nu} & I & \nwarrow\!\!\searrow d^2\omega & & & & & \\ & & & & F & \xleftrightarrow{d^2A} & \phi & \xleftrightarrow{dt} & E \\ I_\nu & \xleftrightarrow{d^2\omega} & F_\nu & \swarrow\!\!\nearrow d\nu & & & & & \end{array}$$

Hier werden die Raumwinkelspezifizierungen mit einem *Symbolwechsel* (F $\rightarrow$ I), die Frequenzspezifizierungen dagegen durch einen zusätzlichen Index (ν *bzw.* λ) gekennzeichnet. *Beide* Spezifizierungen kennzeichnen Abweichungen vom <u>Strahlungsfeld-Gleichgewicht</u> ($\rightarrow$ Kap. 7.1). Etwas konsequenter wäre daher ein Bezeichnungsschema, welches *beide* Einschränkungen durch Indizes kennzeichnet:

$$\begin{array}{ccccccccc} F_{\nu,\omega} & \xleftrightarrow{d\nu} & F_\omega & \nwarrow\!\!\searrow d^2\omega & & & & & \\ & & & & F & \xleftrightarrow{d^2A} & \phi & \xleftrightarrow{dt} & E \\ F_{\nu,\omega} & \xleftrightarrow{d^2\omega} & F_\nu & \swarrow\!\!\nearrow d\nu & & & & & \end{array}$$

Genau dieses Schema ist in der Beschreibung der *Schwarzstrahlung* auch üblich, wobei für die Flußdichte statt "F" das Symbol "B" (von "Blackbody") verwendet wird. Das *Planck'sche Strahlungsgesetz* beschreibt die Emission unpolarisierter elektromagnetischer Strahlung mit Wellenlängen im Einheitsintervall um λ, die senkrecht von der Einheitsfläche eines schwarzen Körpers mit der Temperatur T ausgeht. Die in der Zeiteinheit in den Einheitskegel ausgestrahlte Energie (also die entsprechende <u>monochromatische</u> <u>Strahldichte</u> oder Intensität) ist gegeben durch

$$(7\text{-}15) \qquad B_{\lambda,\omega}(\lambda,T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left[\frac{hc}{k\lambda T}\right] - 1}$$

mit den Konstanten

$h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js	Planck'sche Konstante
$c = 3.0 \cdot 10^{8}$ ms^{-1}	Lichtgeschwindigkeit
$k = 1.4 \cdot 10^{-23}$ JK^{-1}	Boltzmann-Konstante

Die *frequenzbezogene* emittierte Strahldichte ist gemäß (7-6) $B_{\nu,\omega}(T) = B_{\lambda,\omega}(T)\ \lambda^2/c$:

$$(7\text{-}16) \qquad B_{\nu,\omega}(\lambda,T) = \frac{2hc}{\lambda^3} \frac{1}{\exp\left[\frac{hc}{k\lambda T}\right] - 1}$$

Hier bedeutet der *Index* ν auf der linken Seite, daß die Strahldichte auf die Frequenz bezogen wird, und das *Argument* λ auf der rechten Seite, daß diese Frequenzbezogenheit durch die Wellenlänge ausgedrückt wird. Mit $\lambda = c/\nu$ folgt die einheitliche Darstellung:

$$(7\text{-}17) \qquad B_{\nu,\omega}(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1}$$

Eine gelegentlich anzutreffende "Mischform", bei der die Frequenzbezogenheit durch ν *und* durch λ ausgedrückt wird, ist gegeben durch

$$B_{\nu,\omega}(\lambda,T) = \frac{2h\nu}{\lambda^2}\,\frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1}$$

Die Planckfunktion $B_{\nu,\omega}$ kann nicht aus der Thermodynamik abgeleitet werden, sondern nur unter Hinzunahme der Quantenhypothese: h *ist* das Wirkungsquantum, d.h. die kleinste Menge der Größe "Wirkung" = "Energie·Zeit". Folglich ist $h\nu$ die kleinstmögliche Menge der Größe "Energie". Im Exponent wird diese Energie mit der mittleren Energie pro Molekül-Freiheitsgrad verglichen, die durch kT/2 gegeben ist, wie man gaskinetisch zeigen kann. Die Planckfunktion ist eine Verteilungsfunktion von ähnlichem Typ wie die in Kap. 1.12(a) angegebene Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung f(v), oder wie die in Kap. 1.13(c) erwähnte Boltzmannverteilung. Der Hauptunterschied ist der, daß die Energie kT in der quantenmechanischen Verteilung $B_{\nu,\omega}$ auch mit der quantenmechanischen Energie $h\nu$ verglichen wird, während z.B. in der klassischen Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung f(v) die Energie kT mit der klassischen Energie $mv^2/2$ verglichen wird. Andererseits enthält das Planck'sche Strahlungsgesetz als Spezialfall das klassische Wien'sche Verschiebungsgesetz und das ebenfalls klassische Stefan-Boltzmann'sche Gesetz, (Callies (1985)), und diese *sind* im Einklang mit der Gibbs'schen Thermodynamik, wie im Falle des Stefan-Boltzmann Gesetzes hier noch gezeigt wird (→ Kap. 7.4).

Das <u>Wien'sche</u> <u>Verschiebungsgesetz</u> gibt an, bei welchem $\lambda = \lambda_{max}$ die spektrale Flußdichte B_λ am größten ist. Die Bedingung $\partial B_\lambda/\partial\lambda = 0$ ergibt $(B_\lambda)_{max} = B_\lambda(\lambda_{max})$ mit

$$(7\text{-}18) \qquad \lambda_{max}\cdot T = \text{const}$$

Dieses Gesetz begründet die in der Meteorologie übliche Unterscheidung zwischen "Kurzwelliger Strahlung", die sich auf die Emission bei der Temperatur der Sonnenoberfläche bezieht, und "Langwelliger Strahlung", die sich auf die Emission bei Planetentemperaturen bezieht.

Das <u>Stefan-Boltzmann'sche</u> <u>Gesetz</u> erhält man, wenn man die Strahldichten B_ω (d.h. die über alle Wellenlängen integrierten spektralen Strahldichten $B_{\lambda,\omega}$) zusätzlich über den Halbraum an der Einheitsfläche integriert, wenn man also von der Strahldichte zur Flußdichte übergeht. Bei Isotropie ergibt sich gemäß (7-11) ein Faktor π:

$$(7\text{-}19) \qquad B \triangleq \pi B_\omega = \sigma T^4 \qquad \text{mit} \qquad \sigma = 5.67\cdot 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\text{T}^{-4}$$

7.3(b) Emission, Absorption, Reflexion, Transmission

Nach (7-1) wird ein Flächenelement der Größe d^2A pro Zeit dt und pro Kegelöffnung $d^2\omega$ in ϑ-Richtung von der spektralen Energie $d^6E = I_\nu \, d^2A \, \mu d^2\omega \, dt \, d\nu$, ($\mu = \cos\vartheta$), durchflossen. Wenn das Flächenelement die Grenzfläche zwischen einem emittierenden undurchsichtigen ausgedehnten Körper und Vakuum ist, gilt die gleiche Formel für die in den entsprechenden Raumwinkel *emittierte* Energie:

(7-20) $$d^6E_{em} = I_{\nu,em} \, d^2A \, \mu d^2\omega \, dt \, d\nu \longleftrightarrow I_{\nu,em} = d^6E_{em} \, / \, d^2A \, \mu d^2\omega \, dt \, d\nu$$

Desgleichen gilt nach Frequenz- oder/und Raumwinkelintegration:

(7-21) $$d^5E_{em} = I_{em} \, d^2A \, \mu d^2\omega \, dt$$

(7-22) $$d^4E_{em} = F_{\nu,em} \, d^2A \, dt \, d\nu$$

(7-23) $$d^3E_{em} = F_{em} \, d^2A \, dt$$

Die linken Seiten von (7-20) - (7-23) beschreiben die auf die jeweiligen infinitesimalen Intervalle bezogenen *infinitesimalen* emittierten Energien. Die Proportionalitätsfaktoren beschreiben die auf die *Einheitsintervalle* bezogenen *endlichen* emittierten Energien. Da sie von der Wahl der Intervallgrößen nicht mehr abhängen, beschreiben sie nur noch entsprechende körpertypische Größen. Das Emissionsvermögen $I_{\nu,em}$ (*engl. "emittance"*), also die emittierte spektrale Strahldichte, hat die Einheit

$$[\, I_{\nu,em} \,] = J \, m^{-2} \, sr^{-1} \cdot (s \, s^{-1})$$

Durch die gleichen Strahlenkegel fließt in umgekehrter Richtung Strahlungsenergie d^6E aus der Umgebung in Richtung Körper und tritt durch die Fläche d^2A in das Körperinnere ein. Ein Teil d^6E_{ab} dieser Energie wird absorbiert. Der entsprechende *dimensionslose* Koeffizient a_ν wird Absorptionsvermögen (*engl. "absorptivity"*) genannt:

(7-24) $$a_\nu = \frac{d^6E_{ab}}{d^6E} \qquad [\, a_\nu \,] = 1$$

Ganz analog zu (7-24) definiert man ein Refexionsvermögen r_ν und ein Transmissionsvermögen t_ν durch Quotienten der vom Körper reflektierten bzw. unverändert hindurchgelassenen Energie und der auffallenden Energie. In der Meteorologie wird das Reflexionsvermögen r_ν der Solarstrahlung durch atmosphärische Schichten und durch den Erdboden Albedo genannt und mit dem Symbol "α" bezeichnet. - Offensichtlich gilt

(7-25) $$a_\nu + r_\nu + t_\nu = 1$$

Diese Unterteilung ist jedoch nur sinnvoll für die Betrachtung eindimensional-vertikaler Strahlung und horizontaler atmosphärischer Schichten, ("Plattenmodelle",

→ Kap. 7.9), da man sonst statt Reflexion und Transmission *Streuungen* in *beliebiger* Richtung betrachten müßte. - Falls das Absorptionsvermögen nicht von der Frequenz ν abhängt, $a_\nu = a = \text{const}$, definiert man Schwarze, Graue und Weiße Körper durch:

$a = 1$: *Schwarzer Körper*
$0 < a < 1$: *Grauer Körper*
$a = 0$: *Weißer Körper*

Für den Schwarzen Körper gilt offenbar $r_\nu = t_\nu = 0$. - Ein Weißer Körper absorbiert nichts, die gesamte Strahlung wird also gestreut, bzw. im "Plattenmodell" (→ Kap. 7.9) reflektiert und/oder hindurchgelassen.

7.3(c) Das Kirchhoff'sche Gesetz

Die von einem Körper absorbierte Strahlungsenergie führt zur Erhöhung seiner Temperatur. Im *thermodynamischen Gleichgewicht* darf das nicht geschehen, so daß eine entsprechende Emission für den Ausgleich sorgen muß (Prevost'sche Regel). Es muß also $d^6E_{ab} = d^6E_{em}$ gelten, oder mit (7-20) und (7-24):

$$a_\nu\, d^6E = a_\nu\, I_\nu\, d^2A\, \mu d^2\omega\, dt\, d\nu = I_{\nu,em}\, d^2A\, \mu d^2\omega\, dt\, d\nu \longrightarrow$$

(7-26) $$I_{\nu,em} = a_\nu I_\nu$$

Die emittierte Strahldichte (das "Emissionsvermögen") entspricht also der mit dem Absorptionsvermögen multiplizierten auffallenden Strahldichte (*engl. "emittance = absorptivity · incident intensity"*). - Grundsätzlich kann man die auf einen *beliebigen* Körper senkrecht auffallende Strahldichte I_ν mit der Strahldichte $B_{\nu,\omega}$ identifizieren, die ein schwarzer Körper im Gleichgewicht mit dieser Strahlung auch emittieren würde, denn mit $a_\nu = 1$ gilt bei senkrechtem Strahlungseinfall

(7-27) $$B_{\nu,\omega} = I_\nu$$

(Bei beliebigem Strahlungseinfall wäre $B_{\nu,\omega}$ noch mit $\mu = \cos\vartheta$ zu multiplizieren). Das ergibt das Kirchhoff'sche Gesetz in der Form

(7-28) $$I_{\nu,em} = a_\nu\, B_{\nu,\omega}$$

Das Emissionsvermögen $B_{\nu,\omega}$ des schwarzen Körpers hängt im Gleichgewicht nur von der Temperatur und von der Frequenz ab und kann nach (7-17) berechnet werden. Das Emissionsvermögen $I_{\nu,em}$ eines *beliebigen* Körpers im Gleichgewicht ist durch (7-28) gegeben, d.h. es kann bei Kenntnis des Absorptionsvermögens *ebenfalls* mit Hilfe der Planckfunktion berechnet werden. - Zusätzlich zum dimensionslosen Absorptions-

vermögen (7-24) und zum dimensionsbehafteten Emissionsvermögen (7-20) definiert man in Analogie zu (7-24) ein dimensionsloses relatives Emissionsvermögen (*emissivity*) e_ν durch:

(7-29) $e_\nu = I_{\nu,em} / B_{\nu,\omega}$ Einheit $[\ e_\nu\ ] = 1$

Das ergibt mit (7-28) eine weitere Form des Kirchhoff'schen Gesetzes: Im Gleichgewicht ist das relative Emissionsvermögen gleich dem Absorptionsvermögen (*engl. "emissivity = absorptivity"*)

(7-30) $e_\nu = a_\nu$

Die Gleichungen (7-21) - (7-23) zeigen eine Kaskade von Integrationen über d^6E_{em}. Ebenso kann die Darstellung der absorbierten Energie

$$d^6E_{ab} = a_\nu\ d^6E = a_\nu\ I_\nu\ d^2A\ \mu d^2\omega\ dt\ d\nu$$

integriert werden, wobei jedoch bei der Frequenzintegration über die Variable a_ν "mitintegriert" werden muß. Setzt man jedoch ein frequenzunabhängiges Absorptionsvermögen voraus, also einen grauen oder schwarzen Körper, dann gilt in Analogie zu (7-21) bzw. zu (7-23)

(7-31) $d^5E_{ab} = a\ I\ d^2A\ \mu d^2\omega\ dt$

(7-32) $d^3E_{ab} = a\ F\ d^2A\ dt$

Das ermöglicht eine direkte Spezialisierung von (7-26/27), $I_{\nu,em} = a_\nu I_\nu = a_\nu B_{\nu,\omega}$:

(7-33) $I_{em} = a\ I = a\ B_\omega$

(7-34) $F_{em} = a\ F = a\ \pi B_\omega = a\ \sigma\ T^4$

wobei (7-19) mitverwendet wurde. Für eine Schwarze Modell-Atmosphäre gilt a = 1.

7.4 DIE GIBBS'SCHE BESCHREIBUNG DES STRAHLUNGSFELDES

In Kapitel 7.1 wurde plausibel gemacht, daß die Größen der Gibbs'schen Thermodynamik, A = {E,T,S,p,V}, eines materiellen Systems auch für das Strahlungsfeld definiert werden können. Die spezifische Formulierung der Gibbs'schen Beziehungen erfolgte im materiellen System stets durch massenspezifische Größen a = dA/dm (bzw. a = A/m im globalen Gleichgewicht). Das läßt sich für das materielose, *reine* Strahlungsfeld offenbar nicht durchführen, so daß hier die *volumenspezifische* Schreibweise verwendet werden muß. Wenn jedoch ein System aus Materie *und* aus Strahlung besteht, ist es ungünstig, das materielle Feld (wie bisher stets) durch

massenspezifische Größen und das Strahlungsfeld durch *volumenspezifische* Größen zu beschreiben. Für eine einheitliche Beschreibung müssen auch die massenspezifischen Gibbs'schen Gleichungen auf volumenspezifische Größen $\rho a = dA/dV$ ($\rho a = A/V$ im globalen Gleichgewicht) transformiert werden. - Die Euler'sche Gleichung (1-31) lautet mit Summenkonvention und Vernachlässigung von Tröpfchen-Oberflächeneffekten $U = TS - pV + \mu_i N_i$. Die *massenspezifische* Formulierung hierfür sowie für die entsprechende Gibbs-Form ergeben sich nach Division durch m unmittelbar zu

(7-35) $$u = Ts - p\upsilon + \mu_i n_i$$

(7-36) $$du = Tds - pd\upsilon + \mu_i dn_i$$

Die gesuchte *volumenspezifische* Formulierung der Gibbs'schen Fundamentalform ergibt sich durch Multiplikation von (7-36) mit ρ. Mit der Produktregel folgt dann

$$d(\rho u) - ud\rho = Td(\rho s) - Tsd\rho - pd(\rho\upsilon) + p\upsilon d\rho + \mu_i d(\rho n_i) - \mu_i n_i d\rho$$

Die Faktoren von $d\rho$ heben sich wegen der Euler'schen Gleichung (7-35) gegenseitig auf! Ferner ist $\rho\upsilon=1$, also $d(\rho\upsilon)=0$, so daß

(7-37) $$d(\rho u) = T\, d(\rho s) + \mu_i d(\rho n_i)$$

Definiert man eine volumenspezifische Größe im materiellen System durch $\rho a = a^{\#}$, so folgt

(7-38) $$du^{\#} = T\, ds^{\#} + \mu_i dn_i^{\#}$$

Die volumenspezifische Teilchenzahl $\rho n_i = n_i^{\#}$ wird auch <u>Partialdichte</u> genannt und mit dem Symbol ρ_i abgekürzt (→ auch Kap. 2.5(a)). - Insgesamt konnte also die zu (7-36) gehörende massenspezifische Gibbsfunktion $u = u(s,\upsilon,n_i)$ auf die zu (7-38) gehörende volumenspezifische Gibbsfunktion $u^{\#} = u^{\#}(s^{\#},n_i^{\#})$ reduziert werden, in der keine durch die Euler'sche Gleichung gebundenen Variablen mehr vorkommen. - Da Kinetische und Potentielle Energien im Strahlungsfeld nicht beteiligt sind, ist dort $E = U$ gleichermaßen die Innere wie die Gesamtenergie. Ferner entfallen für das Strahlungsfeld alle Feuchte-Energieformen $\sigma dO + \mu_d dN_d + \mu_f dN_f$. Wir unterscheiden die Variablen A^* des Strahlungsfeldes von den Variablen A des materiellen Systems durch einen "Stern". Die Gibbs'sche Fundamentalform für das reine Strahlungsfeld lautet also:

(7-39) $$dE^* = T^* dS^* - p^* dV^*$$

Mit a^* wird von vornherein die entsprechende volumenspezifische Größe bezeichnet.

Zusammenfassung:

	Systemgröße	massenspezifisch	volumenspezifisch
Materiefeld	A	a	$\rho a = a^{\#}$
Strahlungsfeld	A^*	nicht definiert	a^*

Bei globalem Gleichgewicht in einem Hohlraum mit dem Volumen V^* gilt für die "volumenspezifische Strahlungsenergie" die Definitionsgleichung

(7-40) $e^* = E^*/V^*$

Da jedoch die Energie des Strahlungsfeldes nicht wie diejenige des materiellen Feldes in einem lokal begrenzten System "verweilen" kann, sondern stets mit Lichtgeschwindigkeit transportiert wird, liegt das Konzept einer volumenspezifischen Strahlungsenergie

(7-41) $e^* = dE^*/dV^*$

nicht ohne weiteres auf der Hand. Wir suchen eine Beziehung zwischen e^* und den in Kapitel 7.2(b) definierten "radiometrischen" Grundgrößen für ein Strahlenbündel. Für den Spezialfall einer *isotropen* Strahlung gilt

(7-42) $e^* = \frac{4\pi}{c_n} I = \frac{4}{c_n} F$ mit

$c_n = c/n$ = Lichtgeschwindigkeit im Medium mit dem Brechungsindex n

$I = d^5E^* / d^2A\, \mu d^2\omega\, dt$ (vergl. (7-3))

$F = d^3E^* / d^2A\, dt$ (vergl. (7-9), (7-12))

Wir begnügen uns zunächst mit einer Plausibilitätsbetrachtung und verschieben den Beweis dieser Beziehung auf Kap. 7.5, wo wir auch den nichtisotropen Fall behandeln werden. Die Energiedichte in einem von Strahlung durchflossenen Volumenelement muß offensichtlich proportional zur Strahldichte oder zur Flußdichte sein: Stellt man sich das Volumenelement vor als eine Säule mit der Grundfläche d^2A und der Höhe ds:

$$dV^* = d^3\tau = d^2A\, ds,$$

welche von der Strahlung *senkrecht* durchsetzt wird, so *muß* sein Energieinhalt vom Zeitintervall $dt = ds/c_n$ abhängen, währenddessen die mit Lichtgeschwindigkeit bewegte Energie *im Volumenelement* verbleibt. Die Faktoren 4 bzw. 4π ergeben sich durch Raumwinkelintegration ($F = \iint I\, \mu d^2\omega = \pi I$) und durch die Tatsache, daß das Volumenelement *nicht nur senkrecht* durchstrahlt wird, sondern *von allen Seiten* (→ Kap. 7.5) - Die volumenspezifische Energiedichte (7-42) ist also im Wesentlichen eine über die Raumwinkel integrierte und durch die Lichtgeschwindigkeit dividierte

Strahldichte I, entsprechend einer durch die Lichtgeschwindigkeit dividierten Flußdichte F. Im globalen Thermodynamischen Gleichgewicht läßt sich die Strahldichte I nach (7-27) auch durch die spektralintegrierte Planckfunktion B eines schwarzen Körpers ausdrücken, der die Temperatur $T = T^*$ hat, d.h. nach dem Übergang zu den Flußdichten F auch durch das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz (7-19), $\pi B = \sigma T^4$:

$$e^* = \frac{4\pi}{c_n} I = \frac{4\pi}{c_n} B = \frac{4}{c_n} \pi B = \frac{4}{c_n} \sigma T^4 \qquad \text{also:}$$

(7-43) $$e^* = \gamma T^4 = \gamma T^{*4}, \qquad \gamma = \frac{4\sigma}{c_n}$$

(7-43) erinnert stark an das ideale Gas im Thermodynamischen Gleichgewicht, dessen Innere Energie ebenfalls nur von der Temperatur abhängt. (Dort ist es allerdings die *massenspezifische* Größe). Die klassische Elektrodynamik kann zeigen, daß bei isotroper Strahlung die dimensionsgleichen Größen "volumenspezifische Strahlungsenergie" e^* und "Strahlungsdruck" p^* mit dem Faktor 3 proportional zueinander sind:

(7-44) $e^* = 3\, p^*$ Das gestattet die folgende Umformung von (7-39):

$$dE^* = T^* dS^* - p^* dV^* = T^* dS^* - \frac{1}{3} e^* dV^*$$

andererseits gilt im globalen Gleichgewicht wegen $e^* = E^*/V^*$

$$dE^* = d(e^* V^*) = V^* de^* + e^* dV^* \qquad \text{und damit}$$

(7-45) $$de^* = \frac{T^*}{V^*} dS^* - \frac{4}{3} \frac{e^*}{V^*} dV^*$$

In Analogie zum Massenfeld sollte jedoch auch

(7-46) $$de^* = T^* ds^*$$

gelten. Die Umrechnung erfolgt wieder mit Hilfe der Euler'schen Gleichung, die für das Strahlungsfeld

(7-47) $$E^* = T^* S^* - p^* V^* \qquad \text{oder}$$
$$e^* = T^* s^* - p^* = T^* s^* - e^*/3 \qquad \text{oder}$$

(7-48) $$\frac{4}{3} e^* = T^* s^*$$

lautet. Durch Einsetzen von (7-48) in (7-45), und mit

$$dS^* = V^* ds^* + s^* dV^*$$

folgt sofort (7-46). Ferner zeigen (7-48) und (7-43), daß auch die volumenspezifische Entropiedichte s^* im Gleichgewicht nur von $T = T^*$ abhängt:

(7-49) $$s^* = \frac{4}{3} \gamma T^{*3}$$

In der Fundamentalform (7-45) wurde der Druck p^* unter Verwendung von (7-44) durch die Energiedichte ausgedrückt, und nicht wie in (7-46) mit Hilfe der Euler'schen Gleichung *eliminiert*. (7-46) beschreibt also *auch* Systeme, in denen Volumenänderungen gegen den Strahlungsdruck stattfinden, obwohl kein expliziter Arbeitsterm auftritt. - Auflösen von (7-45) nach dS^* ergibt die Fundamentalform in *Entropiedarstellung*:

$$\text{(7-50)} \qquad dS^* = \frac{V^*}{T^*}\, de^* + \frac{4}{3}\frac{e^*}{T^*}\, dV^*$$

Als Anwendung dieser Beziehung soll gezeigt werden, daß aus ihr das Stefan-Boltzmann-Gesetz in der Form (7-43) für die spezifische Energie, $e^* = \gamma T^{*4}$, hergeleitet werden kann, wenn man $e^* = e^*(T^*)$ voraussetzt (Callies (1985)). Zunächst wird $dS^*(e^*,V^*)$ in $dS^*(T^*,V^*)$ überführt:

$$dS^* = \frac{V^*}{T^*}\frac{de^*}{dT^*}\, dT^* + \frac{4}{3}\frac{e^*}{T^*}\, dV^*$$

Die *Integrabilitätsbedingung* ist die Forderung, dS^* als totales Integral schreiben zu können, d.h. die Faktoren von dT^* und dV^* müssen partielle Ableitungen sein:

$$dS^* = \frac{\partial S^*}{\partial T^*}\, dT^* + \frac{\partial S^*}{\partial V^*}\, dV^*$$

Wegen der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen, d.h. letztlich wegen der Maxwell'schen Relationen (1-30), läßt sich die Integrabilitätsbedingung auch auf die Forderung

$$\frac{\partial}{\partial V^*}\left(\frac{V^*}{T^*}\frac{de^*}{dT^*}\right) = \frac{\partial}{\partial T^*}\left(\frac{4}{3}\frac{e^*}{T^*}\right)$$

zurückführen. Das ergibt mit $\partial e^*/\partial T^* = de^*/dT^*$ (mit $e^* = e^*(T^*)$) und wegen $\partial T^*/\partial V^* = 0$ (T^* und V^* sind unabhängige Variable):

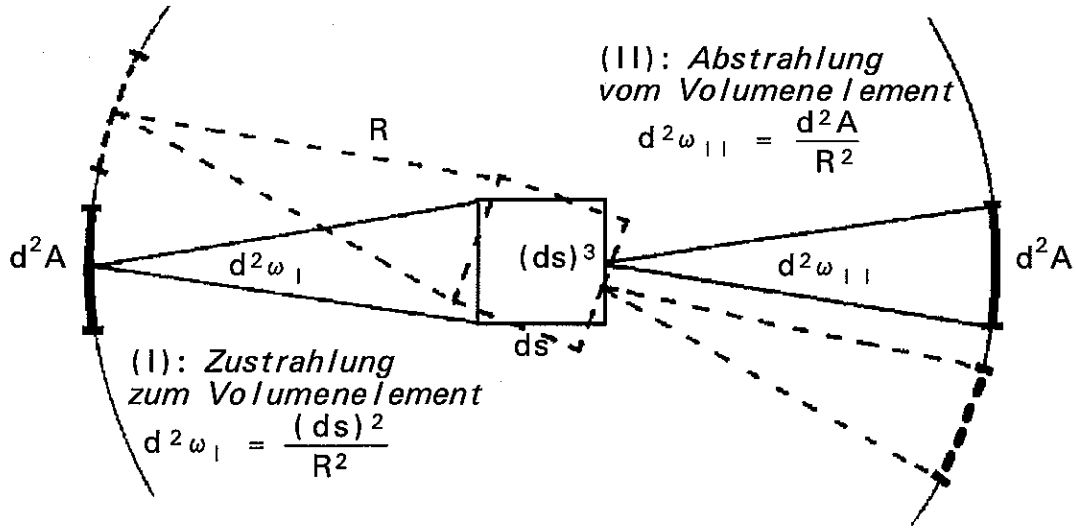
$$\frac{1}{T^*}\frac{de^*}{dT^*} = -\frac{4}{3}\frac{e^*}{T^{*2}} + \frac{4}{3}\frac{1}{T^*}\frac{de^*}{dT^*}$$

$$\frac{1}{3}\frac{de^*}{dT^*} = \frac{4}{3}\frac{e^*}{T^*} \qquad \text{oder} \qquad \frac{de^*}{e^*} = 4\,\frac{dT^*}{T^*}$$

Damit folgt $d(\ln e^*) = d(\ln T^{*4})$ und bis auf den Wert der Konstanten γ auch (7-43). Die "thermodynamische" Ausgangsgleichung (7-50) für diese Herleitung enthält die "elektrodynamisch" zu gewinnende Strahlungsdruckformel $3p^* = e^*$. Thermodynamik *und* Elektrodynamik ergeben also das *sonst* nur durch Integrationen über die "quantenmechanische" Formel (7-15) zu gewinnende Stefan-Boltzmann-Gesetz. Man kommt jedoch auch ohne "Elektrodynamik" aus, denn man könnte in *Umkehrung* der hier vorgenommenen Schlüsse den Strahlungsdruck auch aus der thermodynamischen Gibbs'schen Form und dem "quantenmechanisch" gewonnenen Stefan-Boltzmann-Gesetz ableiten.

7.5 DIE STRAHLUNGSÜBERTRAGUNGSGLEICHUNG

Bei der heuristischen Diskussion der Beziehung (7-42) $e^* = (4\pi/c_n)I = (4/c_n)F$ zwischen der Energiedichte e^* und der Strahldichte I bzw. der Flußdichte F im Spezialfall isotroper Strahlung wurde darauf hingewiesen, daß e^* von der Menge der durch das Volumenelement *hindurchströmenden* Strahlungsenergie abhängt. Diese Größe wird nun für *nichtisotrope* Strahlung benötigt, um die *Strahlungsübertragungsgleichung* herzuleiten, aber auch, um die Beziehung (7-42) entsprechend zu verallgemeinern und um das Kirchhoff'sche Gesetz aus Kap. 7.3(c) für ein kontinuierliches materielles Feld zu formulieren. Es "lohnt" sich also, die von allen Seiten der Umgebung kommende und durch ein infinitesimales Volumen strömende Energie zu berechnen. Denkt man sich das Volumenelement umgeben von einer "Hüllkugel" mit dem Radius R, so muß man alle Strahlenbündel berücksichtigen, deren Spitzen auf der Kugel liegen, die nach innen gerichtet sind, und die auf das Volumenelement "zielen":



(Gezeichnet wurden hier nicht die "physikalischen" Kegel, die von infinitesimalen Flächen ausgehen, sondern nur die "mathematischen" Kegel mit einer "Punktspitze"). Zu berechnen ist die dreifach infinitesimale Energie, oder bei zusätzlicher spektraler Aufspaltung, die vierfach infinitesimale Energie:

(7-51) $d^3E^* = e^* \, d^3\tau$ mit (7-52) $e^* = \int_0^\infty d\nu \, e^*_\nu$

(7-53) $d^4E^* = e^*_\nu \, d^3\tau \, d\nu$

Das von der Hüllkugel bestrahlte Volumenelement soll ein infinitesimaler *Würfel* sein (→ Skizze). Dieser soll die Kantenlänge ds haben, so daß $d^3\tau = (ds)^3$, und er soll so orientiert sein, daß von der Kegelspitze aus nur die Fläche $(ds)^2$ zu sehen ist.

Diese Ausrichtung soll bei der Integration über die gesamte Kugeloberfläche bestehen bleiben, d.h. der Würfel soll sich virtuell so "mitdrehen", daß von *jedem* d^2A aus gesehen der Öffnungswinkel gleich bleibt (in der Skizze gestrichelt dargestellt). Die von den Flächenelementen d^2A der Hüllkugel ausgehenden Strahlenbündel enthalten die sechsfach infinitesimale Energie (7-1), $d^6E^* = I_\nu \, d^2A \, \mu d^2\omega \, dt \, d\nu$, wobei $\mu = \cos\vartheta = 1$ ist, wenn $d^3\tau = (ds)^3$ *in der Mitte* der einhüllenden Kugel liegt:

$$(7\text{-}54) \qquad d^6E^* = I_\nu \, d^2A \, d^2\omega \, d\nu \, dt$$

Der Raumwinkel $d^2\omega = d^2\omega_I$ dieser Zustrahlung ist wegen der virtuellen Drehung ständig durch die Querschnittsfläche $(ds)^2$ gegeben, unter der das Volumenelement vom Flächenelement d^2A der Hüllkugel "zu sehen" ist. Nach dem Wiederaustritt verläßt die Energie das Volumenelement in Strahlenbündeln, deren Raumwinkel $d^2\omega_{II}$ durch Öffnungsflächen d^2A auf der *gegenüberliegenden* Seite der Hüllkugel gegeben sind. Die gesuchte spektrale Energiedichte e^*_ν in $(ds)^3$ erhält man, wenn man die Zustrahlung (7-54), $d^6E^* = d^6E^*_I$ über die ganze Kugelfläche integriert,

$$(7\text{-}55) \qquad d^4E^*_I = \left[\iint d^2A \; I_\nu \right] d^2\omega_I \, d\nu \, dt$$

ferner das Zeitelement dt mit der *Verweilzeit im Volumenelement* identifiziert und das Ergebnis mit (7-53) vergleicht. Die in (7-55) vorgenommene Integration "über Kegelspitzen" ist etwas ungewöhnlich, sie kann jedoch aufgrund der folgenden Überlegung durch eine "normale" Raumwinkelintegration ersetzt werden. Zur Bestimmung der Energiedichte kann zunächst angenommen werden, daß im Volumenelement keine Absorption oder Emission stattfindet, so daß die auftreffende Strahlung nicht geändert wird. Dann ist unmittelbar einsichtig, daß die durch (7-55) beschriebene Erfassung aller Strahlenbündel, die von den Flächenelementen d^2A der Hüllkugel ausgehend das Volumenelement treffen, äquivalent ist mit der Erfassung aller vom Flächenelement $(ds)^2$ in den gesamten Raum austretenden Strahlenbündel:

$$(7\text{-}56) \qquad d^4E^*_{II} = \left[\iint d^2\omega_{II} \; I_\nu \right] (ds)^2 \, d\nu \, dt$$

Beide Male wird die gesamte Strahlung erfaßt, die "von Wand zu Wand" der Hüllkugel geht und "unterwegs" das Volumenelement $(ds)^3$ durchströmt. Die Gleichheit ist auch *explizit* zu sehen, wenn man in (7-55) und (7-56) die in der Skizze angegebenen Raumwinkel

$$(7\text{-}57) \qquad d^2\omega_I = \frac{(ds)^2}{R^2} \qquad \textit{und} \qquad (7\text{-}58) \qquad d^2\omega_{II} = \frac{d^2A}{R^2}$$

einsetzt. Damit werden sogar die entsprechenden sechsfach-infinitesimalen Größen identisch, $d^6E^*_I = d^6E^*_{II}$ mit

(7-59) $d^6E_{\perp}^* = I_\nu \, d^2A \, d^2\omega_{\perp} \, d\nu \, dt$

(7-60) $d^6E_{\parallel}^* = I_\nu \, d^2\omega_{\parallel} \, (ds)^2 \, d\nu \, dt$

Wegen $d^4E_{\perp}^* = d^4E_{\parallel}^*$ kann man auch (7-56) verwenden, um durch Vergleich mit (7-53) die volumenspezifische spektrale Energiedichte e_ν^* zu gewinnen. Dazu muß als Zeitelement dt die *Verweilzeit* $dt=ds/c_n$ der Energie im Volumenelement $(ds)^3$ gewählt werden. ($c_n = c/n$, c_n = Lichtgeschwindigkeit im Medium, c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, n = Brechungsindex des Mediums). Da sich das Volumenelement bei der Hüllkugelintegration virtuell mitdreht, kann für die Verweilzeit dt *generell* ds/c_n eingesetzt werden. Das ergibt mit $(ds)^3 = d^3\tau$:

(7-61) $d^4E^* = \left[\iint d^2\omega \, I_\nu \right] d^3\tau/c_n \, d\nu$

Der Vergleich mit (7-53), $d^4E^* = e_\nu^* \, d^3\tau \, d\nu$, ergibt

(7-62) $e_\nu^* = \frac{1}{c_n} \iint d^2\omega \, I_\nu$

oder nach Spektralintegration auf beiden Seiten

(7-63) $e^* = \frac{1}{c_n} \iint d^2\omega \, I$

Damit ist der Zusammenhang zwischen der Energiedichte und den radiometrischen Größen aus Kap. 7.2(b) hergestellt. Die in Kap. 7.4 *heuristisch* begründete Formel (7-42) ist nun als *Sonderfall für isotrope Strahlung* streng zu begründen. Bei den Hüllkugelintegrationen in (7-55) und (7-56) ist I_ν *als Konstante* zu behandeln. Das ergibt

In (7-55): $\iint d^2A = 4\pi R^2$

In (7-56): $\iint d^2\omega_{\parallel} \triangleq \iint d^2A \,/\, R^2 = \iint \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta$

$= 2\pi \left[-\cos\vartheta \right]_0^{\pi} = 4\pi$

Damit ist die Gleichheit $d^4E^* = d^4E_{\perp}^* = d^4E_{\parallel}^*$ noch einmal explizit gezeigt:

(7-64) $d^4E^* = 4\pi \, I_\nu \, (ds)^2 \, d\nu \, dt$ mit $dt=ds/c_n$:

(7-65) $d^4E^* = 4\pi \, I_\nu \, d^3\tau/c_n \, d\nu$

wegen (7-53), $d^4E^* = e_\nu^* \, d^3\tau \, d\nu$, und $F_\nu = \pi I_\nu$ bei Isotropie folgt

$$e_\nu^* = \frac{4\pi}{c_n} I_\nu = \frac{4}{c_n} F_\nu$$

und nach Spektralintegration auch (7-42) $e^* = (4\pi/c_n)I = (4/c_n)F$, q.e.d.

Die hier gegebene Darstellung basiert auf Planck (1913) und Joos (1961), ist hier jedoch vereinfacht worden. Planck und Joos setzen *nicht* voraus, daß das Volumenelement ein Würfel sei, der stets in Richtung Kegelspitze ausgerichtet ist. Stattdessen betrachten sie die Summe von "noch kleineren" Strahlenbündeln, die alle das *beliebig* geformte und beliebig orientierte Volumenelement treffen. Die hier gewählte Würfelform kann keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeuten, denn man könnte ein beliebiges Volumenelement in solche Würfel aufteilen! Ferner ändert sich nicht die Energiedichte in einem Volumenelement, nur weil es sich virtuell dreht.

In Kapitel 7.2(b) wurde betont, daß die Strahldichte I_ν, *anders als die Flußdichte* F_ν, bei freier Ausbreitung konstant ist. Wenn jedoch Wechselwirkungen mit der Materie stattfinden, ergibt sich eine Schwächung der Strahldichte durch <u>Absorption</u> (Vernichtung von Photonen) und durch <u>Streuung</u> (Umleitung von Photonen *aus der vorgegebenen Richtung*). Beide Effekte zusammen bezeichnet man als <u>Extinktion</u>. Andererseits findet eine Verstärkung statt durch <u>Emission</u> und durch Streuung *in die vorgegebene Richtung.*

Wir betrachten hier nur Emission und Absorption. Beide Prozesse verändern die durch (7-59) gegebene, in das Volumenelement eintretende Energie $d^6E^*_{|}$. Wenn sich beide Effekte kompensieren, so ist die durch (7-60) gegebene austretende Energie $d^6E^*_{||}$ gleichgeblieben. Diese Bedingung führt auf das "kontinuierliche" Kirchhoff'sche Gesetz. Der *allgemeinere* Fall einer *veränderten* austretenden Energie $d^6E^*_{||} \neq d^6E^*_{|}$ wird durch die <u>Strahlungsübertragungsgleichung</u> beschrieben. Allerdings ist dann $d^6E^*_{||}$ nicht mehr durch (7-60) gegeben, denn die Charakterisierung von $d^6E^*_{|}$ in (7-59) als eintretende, und von $d^6E^*_{||}$ in (7-60) als austretende Energie erfolgte nur wegen der entsprechenden *geometrischen Gegebenheiten der Raumwinkel*, und wegen (7-57), (7-58) ergab sich die Identität $d^6E^*_{|} = d^6E^*_{||}$. Eine *physikalisch* bedingte Änderungen der in $d^6E^*_{||}$ zu verwendenden Spektraldichte I_ν durch Absorption und Emission wurde in (7-60) *nicht* berücksichtigt! - Ab sofort soll mit dem Index $||$ nur noch eine aus dem Volumenelement austretende *physikalisch veränderte* Energie gekennzeichnet werden! Als *eintretende* Energie $d^6E^*_{|}$, (7-59), kann man offenbar auch (7-60) in der vom Index $||$ "bereinigten" Form ansehen:

(7-66) $$d^6E^*_{|} = I_\nu \, d^2\omega \, (ds)^2 \, d\nu \, dt$$

<u>Absorption</u>: Von der in das Volumenelement $(ds)^3$ eintretenden Energie $d^6E^*_{|}$ wird ein Anteil absorbiert, welcher zur Weglänge ds *im* Volumenelement proportional ist. Der frequenzabhängige Proportionalitätsfaktor α_ν heißt <u>Absorptionskoeffizient</u>:

$$d^7E^*_{ab} = \alpha_\nu \, ds \, d^6E^*_{|} \qquad \text{also mit } (ds)^3 = d^3\tau:$$

(7-67) $$d^7E^*_{ab} = \alpha_\nu \, I_\nu \, d^2\omega \, d^3\tau \, d\nu \, dt$$

Emission: Betrachtet man den Vorgang der Emission, dann ist die Spitze des Strahlenbündels identisch mit einem Massenpunkt im emittierenden Medium. Jedoch kann ein mathematischer Massenpunkt ebensowenig Energie emittieren, wie ein mathematischer Raumpunkt von Energie "durchströmt" werden kann. Um also eine nichtverschwindende Energie zu erhalten, muß man über alle Massenpunkte eines Volumenelementes summieren. M.a.W., die emittierte Energie ist proportional zum Volumenelement. Der Proportionalitätsfaktor ε_ν heißt Emissionskoeffizient:

$$(7\text{-}68) \qquad d^7E^*_{em} = \varepsilon_\nu \, d^3\tau \, d^2\omega \, d\nu \, dt$$

Dies kann auch aufgefaßt werden als eine zur Weglänge ds *im* Volumenelement proportionale Abstrahlung von der Oberfläche $(ds)^2$ des Volumenelementes mit dem Proportionalitätsfaktor ε_ν: Die von "links" in $d^3\tau$ eingetretene und *nicht* absorbierte Energie "entweicht" in den "rechten" Strahlungskegel. Dieser nimmt zusätzlich noch die Energie (7-68) auf, die von der rechten Würfelfläche ausgehend in die senkrechte Richtung emittiert wird. Die "Strahlungsbilanz des Volumenelementes" lautet also:

$$(7\text{-}69) \qquad d^6E^*_{II} = d^6E^*_{I} - d^7E^*_{ab} + d^7E^*_{em}$$

Im lokalen Thermodynamischen Gleichgewicht müssen sich die Schwächung und die Verstärkung offenbar kompensieren,

$$d^7E^*_{ab} = d^7E^*_{em} \qquad \text{und} \qquad d^6E^*_{II} = d^6E^*_{I}$$

da sich sonst die Materie im Volumenelement erwärmen oder abkühlen würde. Einsetzen von (7-67), (7-68) liefert

$$(7\text{-}70) \qquad \varepsilon_\nu = \alpha_\nu \, I_\nu$$

Dies kann als Kirchhoff'sches Gesetz *im kontinuierlichen Medium* angesehen werden. Es versagt jedoch im Vakuum, (also auch im Inneren eines Hohlraumes), denn dort gilt $\varepsilon_\nu = \alpha_\nu = 0$. Obwohl die Strahldichte I_ν auch im Vakuum wohldefiniert ist, wird sie formal zu einem unbestimmten Ausdruck. Daher verwendet man dort die in Kap.7.3(c) diskutierte alternative Formulierung des Kirchhoff'schen Gesetzes, die für eine Diskontinuitätsfläche an der Grenze zwischen einem materiellen Körper und dem Vakuum gilt. Dort haben wir nicht die von einem Volumenelement emittierten und absorbierten Energien miteinander verglichen, sondern die Energien, die vom *ganzen* Körper emittiert und absorbiert werden, und die durch ein Flächenelement der materiellen Wand hindurchtreten. - Im Nichtgleichgewicht dagegen ist

$$d^7E^*_{ab} \neq d^7E^*_{em} \qquad \text{und} \qquad d^6E^*_{II} \neq d^6E^*_{I}$$

und statt der lokalen Bilanzgleichung (7-70) gilt $d^6E^*_{II} - d^6E^*_{I} = d(d^6E^*)$ mit

$$d(d^6E^*) = - d^7E^*_{ab} + d^7E^*_{em}$$

Setzt man auf der linken Seite (7-66) ein, und auf der rechten Seite (7-67) und (7-68) mit $d^3\tau=(ds)^3$, so folgt

$$d\,[I_\nu\,(ds)^2\,d^2\omega\,d\nu\,dt] = (ds)^3\,d^2\omega\,d\nu\,dt\,[-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu]$$

oder nach Division durch $(ds)^3\,d^2\omega\,d\nu\,dt$:

$$\text{(7-71)} \qquad \frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu$$

Dies ist die "<u>Strahlungsübertragungsgleichung</u>" ("<u>SüG</u>"), die für die Anwendung der Strahlungstheorie grundlegenden Charakter hat. - Neben dem hier verwendeten (Volumen-) Absorptions- und Emissionskoeffizienten α_ν und ε_ν sind noch sogenannte Massenabsorptions- und Emissionskoeffizienten α_ν/ρ und ε_ν/ρ gebräuchlich, so daß in (7-67) und (7-68) die Abhängigkeit der Absorption und Emission von der Dichte der Materie zum Ausdruck kommt. Alle drei Schwächungsfaktoren, nämlich Massenabsorptionskoeffizient, Dichte und Länge des geometrischen Weges durch die Materie werden zum "optischen Weg" zusammengefaßt, auch "optische Dicke" oder "optischer Widerstand" genannt.

7.6 DIE GIBBS'SCHE BESCHREIBUNG ELEMENTARER STRAHLUNGSBÜNDEL

Die in Kap. 7.4 verwendeten Formen der Gibbs'schen Fundamentalform gelten im globalen thermodynamischen Gleichgewicht. Ganz in diesem Sinne wurde auch in Kap. 7.1 eine Strahlungstemperatur eingeführt als die Temperatur, die der *<u>Körper</u>* hat, nachdem er in einem leeren Hohlraum unter Abkühlung das Strahlungsfeld aufgebaut hat und durch zunehmende "Reabsorption" zu einem dynamischen Gleichgewicht mit dem selbsterzeugten Strahlungsfeld gekommen ist. Durch die Definitionsgleichung $T^*=T$ wird deutlich, daß es sich bei T^* um eine *globale Gleichgewichtstemperatur* handeln muß.

Bedeutet das, daß man dem Strahlungsfeld *vor* dem Erreichen des Gleichgewichtes mit dem emittierenden und absorbierenden Körper *keine* Temperatur zuordnen kann, so daß man es *nicht* durch Gibbs'sche Formen und Funktionen beschreiben könnte? Allgemeiner gefragt, gibt es für ein frequenzmäßig *nicht* schwarzverteiltes und richtungsmäßig *nicht* isotropes Strahlungsfeld keine Gibbs'schen Gleichungen? Müssen solche Ordnungen im Frequenz- und Ortsraum erst verlorengegangen sein durch Emission, Absorption und Streuung, d.h. durch irreversible "Ausgleichsprozesse" bezüglich

Frequenzen und Richtungen und dem damit verbundenen Entropiezuwachs? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir noch einmal auf die in Kap. 7.2(a) eingeführten elementaren Strahlenbündel zurückkommen, für die durch die Gleichung

$$(7\text{-}1) \qquad d^6E = I_\nu \, \mu d^2A \, d^2\omega \, d\nu \, dt$$

eine spektrale Strahldichte I_ν eingeführt wurde. I_ν ist die Energie, die auf die sechs infinitesimalen Intervalle bezogen ist, welche das elementare Strahlenbündel definieren. Bereits Planck (1913) hat diesem Strahlenbündel nicht nur eine Energie, sondern auch eine Entropie zugeordnet. Man kann also, um in der Schreibweise unserer Darstellung zu bleiben, dem Elementarbündel eine sechsfach infinitesimale Entropie d^6S zuordnen:

$$(7\text{-}72) \qquad d^6S = L_\nu \, \mu d^2A \, d^2\omega \, d\nu \, dt$$

L_ν ist die <u>spektrale</u> <u>Entropiestrahldichte</u>, und um von dieser zu unterscheiden, müssen wir ab sofort I_ν "<u>spektrale</u> <u>Energiestrahldichte</u>" nennen. Ebenso wie aus I_ν eine volumenspezifische Energiedichte bestimmt wurde

$$(7\text{-}73) \qquad e^* = \frac{1}{c_n} \iiint d\nu \, d^2\omega \, I_\nu = \frac{1}{c_n} \iint d^2\omega \, I = \int d\nu \, e^*_\nu$$

ergibt sich auch eine <u>volumenspezifische</u> <u>Entropiedichte</u>

$$(7\text{-}74) \qquad s^* = \frac{1}{c_n} \iiint d\nu \, d^2\omega \, L_\nu = \frac{1}{c_n} \iint d^2\omega \, L = \int d\nu \, s^*_\nu$$

(7-73) besagt, daß sich die volumenspezifische Energie *zusammensetzt aus spektral und richtungsmäßig individuellen Energie-Strahldichten* I_ν. In Analogie dazu folgt aus (7-74), daß sich die volumenspezifische Entropie aus *Entropie-Strahldichten* L_ν zusammensetzt. - Ferner hat Planck dem Elementarbündel eine <u>spektrale</u> <u>Strahlungstemperatur</u> T^*_ν zugeordnet über die Definitionsgleichung

$$(7\text{-}75) \qquad dI_\nu = T^*_\nu \, dL_\nu$$

Erst durch Callies und Herbert (1984) ist darauf hingewiesen worden, daß es sich bei dieser grundlegenden Planck'schen Beziehung um nichts anderes handelt als um eine Gibbs'sche Fundamentalform für das elementare Strahlenbündel! Das wird durch Vergleich mit der "Gleichgewichtsform" (7-46), $de^* = T^*ds^*$, auch unmittelbar deutlich. Damit ist auch die obige Frage beantwortet: *Befindet sich das Strahlungsfeld im Nichtgleichgewicht, so zerfällt die Fundamentalform (7-46) für das ganze System in Fundamentalformen für jedes Strahlenbündel.* - Setzt man (7-73) und (7-74) in $de^* = T^*ds^*$ ein und vergleicht die Integranden, so folgt

$$(7\text{-}76) \qquad dI_\nu = T^* \, dL_\nu$$

Im Gleichgewicht haben also alle monochromatischen Strahlenbündel die *gleiche Temperatur* T^*. Das entspricht der Temperaturhomogenität im globalen materiellen Gleichgewicht. - In einem materiellen System unterscheidet sich ein Zustand des globalen Nichtgleichgewichtes (aber "lokalen" Gleichgewichtes) vom Gleichgewichtszustand dadurch, daß die intensiven Größen *ortsabhängige* Feldfunktionen sind, d.h. nicht mehr im ganzen System den gleichen Wert haben. Die Analogie zu dieser Temperatur-Inhomogenität im *materiellen* Nichtgleichgewichtssystem ist durch (7-76) gegeben: Die monochromatischen Strahlenbündel haben *unterschiedliche* Temperaturen T_ν^*, die zwar nicht von der Richtung, jedoch von der Frequenz des Bündels abhängen.

Thermodynamisches Gleichgewicht ist die Voraussetzung dafür, daß man die physikalische Beschreibung eines Systems auf wenige Freiheitsgrade reduzieren kann, (die Dimension des Gibbs'schen Phasenraumes verringern kann). Im materiellen Feld gelingt es dann, von einer Beschreibung der Orte und Impulse *aller Moleküle* abzusehen und ersatzweise nur wenige *statistische* Größen wie Volumen, Entropie u.s.w. zu betrachten. Ein Weg, die Beschreibung der einzelnen Moleküle zu umgehen, *obwohl* Nichtgleichgewicht vorliegt, ist die Postulierung eines *lokalen Gleichgewichtes*, d.h. eines Thermodynamischen Gleichgewichtes für "kleine", räumlich oder massenmäßig definierte *Teilgebiete* des Systems. In diesen Teilgebieten können die statistischen Größen dann trotz globalen Nichtgleichgewichtes verwendet werden, und es können Gibbs'sche Gleichungen formuliert werden. Auch wenn dann die Zahl der Freiheitsgrade kleiner ist als die aller Einzelmoleküle, so ist sie doch größer als im globalen Gleichgewicht, weil die statistischen Größen in verschiedenen Teilgebieten verschieden sind, die thermodynamischen Gleichungen also für *alle* Teilsysteme betrachtet werden müssen. Gleichgültig, ob man wegen der Nichtgleichgewichtsverhältnisse von der einheitlichen Systembeschreibung auf die lokale Beschreibung oder sogar auf die Beschreibung der Einzelmoleküle ausweichen muß, nimmt die Zahl der zu beschreibenden Freiheitsgrade zu.

Dieses Prinzip ist auch bei der thermodynamischen Beschreibung des Strahlungsfeldes gültig: So wie jedes materielle globale Nichtgleichgewichtssystem in Subsysteme zerfällt, die sich ihrerseits im lokalen Gleichgewicht befinden und daher eindeutige intensive Größen wie $T(\mathbf{r})$ und eigene Gibbs'sche Formen haben, so sind im Nichtgleichgewichts-Strahlungsfeld die monochromatischen Strahlenbündel die "kleinsten" selbständigen Untersysteme mit Temperaturen T_ν^* und Fundamentalformen (7-75). Der Unterschied liegt darin, daß die Untersysteme des materiellen Feldes im Ortsraum, die Untersysteme des Strahlungssystems aber im Frequenzraum voneinander getrennt sind! Die Zahl der Freiheitsgrade erhöht sich im materiellen Feld dadurch, daß an jedem Ort die *ortsspezifische* Energiedichte einzeln beschrieben werden muß. Im

Strahlungsfeld dagegen muß jede in (7-75) enthaltene *frequenzspezifische* Energiestrahldichte einzeln beschrieben werden. Da sich am gleichen Ort viele Strahlenbündel befinden, die alle eine eigene Gibbsform haben, ist das materielle System "intern offen" für praktisch unendlich viele weitere physikalische Systeme, die mit der Materie wechselwirken. Das ist eine starke Verallgemeinerung der in Kapitel 2.2(d) beschriebenen Situation, wo ein Luftpaket nach der Nahewirkungstheorie für das Schwerefeld als "intern offenes" System beschrieben wurde, was erst eine Erklärung lieferte für den sonst völlig unverständlichen Quellterm für die Erhaltungsgröße "Impuls" in der Bewegungsgleichung (2-19). Entsprechend muß man wegen der internen Wechselwirkungen mit den vielen ortsgleichen Strahlungssystemen (Strahlenbündeln) auf unerwartete *formale* Quellterme gefaßt sein. Zum Beispiel könnte trotz des 2. Hauptsatzes für materielle Systeme eine negative Entropiequelle auftreten. Ein solcher Fall ist von Pelkowski (1995) beschrieben worden. Nach der hier gegebenen Interpretation ist diese negative Quelle jedoch nur *formal*, denn sie beschreibt keine Entropievernichtung, sondern nur einen internen Austausch.

Wie in Kap. 1.1 beschrieben, ist die Gibbs'sche Fundamentalform das totale Differential der Fundamentalfunktion. Da für Punktsysteme die Fundamentalfunktion prinzipiell bekannt ist, (als "Hamiltonfunktion"), lassen sich die im totalen Differential vorkommenden partiellen Ableitungen auch explizit berechnen. - Nach der thermodynamischen Mittelung ist die explizite Form der Fundamentalgleichung i.A. nicht mehr bekannt. Daher sind auch die entsprechenden partiellen Ableitungen (die intensiven Größen der Gibbs'schen Formulierung) i.A. nicht bekannt. Eine Ausnahme bildet das ideale Gas mit der Fundamentalfunktion $E=E(V,S)$ ($\rightarrow$ Callen (1960)): Da hier die *Zustandsgleichungen* $p=p(V,S)$ und $T=T(V,S)$ bekannt sind, kann man die Fundamentalform $dE = -p\,dV + T\,dS$ integrieren und so die Fundamentalfunktion $E=E(V,S)$ erhalten. - Dieses Vorgehen ist auch möglich für das Strahlenbündel, d.h. auch hier läßt sich die zu $dI_\nu = T^*_\nu\, dL_\nu$ gehörende Fundamentalfunktion explizit angeben! Die dafür notwendige Zustandsgleichung ist gerade die <u>Planckfunktion</u> (7-17)!

Das soll hier dargestellt werden im direkten Vergleich mit dem Spezialfall $dE = T\,dS$ eines idealen Gases, welches keine mechanische Arbeit leistet. - Wir suchen mit Hilfe der Fundamentalform in Entropieform

$dS = dE/T$ bzw.	$dL_\nu = dI_\nu/T^*_\nu$	und der Zustandsgleichung
$T = T(E)$ bzw.	$T^*_\nu = T^*_\nu(I_\nu)$	die Fundamentalfunktion
$S = S(E)$ bzw.	$L_\nu = L_\nu(I_\nu)$	

Rechengang für Ideales Gas:

$$T = T(E) = \frac{1}{c_\upsilon}(E-C) \quad : \quad \text{wegen } E = c_\upsilon T + C$$

$$S = S(E) = c_\upsilon \ln(E+C') \quad : \quad \text{direkte Integration von } dS = dE/T = c_\upsilon\, dE/(E-C)$$

Rechengang für Strahlenbündel:

$$T_\nu^* = T_\nu^*(I_\nu) = \frac{h\nu}{k \ln\left[\frac{N}{I_\nu} + 1\right]} \qquad \left(\text{mit } N := \frac{2h\nu^3}{c^2}\right) \qquad \text{wegen (7-17)}$$

Beweis: $$I_\nu = \frac{N}{e^{\frac{h\nu}{kT_\nu^*}} - 1} \quad \rightarrow \quad e^{\frac{h\nu}{kT_\nu^*}} = \frac{N}{I_\nu} + 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

$$L_\nu = L_\nu(I_\nu) = \frac{2k\nu^2}{c^2}\left\{\left[1 + \frac{I_\nu}{N}\right]\ln\left[1 + \frac{I_\nu}{N}\right] - \frac{I_\nu}{N}\ln\frac{I_\nu}{N}\right\}$$

Beweis: Mit den Abkürzungen $a := \frac{2k\nu^2}{c^2}$, $y := \frac{I_\nu}{N} = \frac{I_\nu c^2}{2h\nu^3}$ ist zu beweisen:

$$L_\nu = a\left[(1+y)\ln(1+y) - y\ln y\right] = a \ln\frac{(1+y)^{1+y}}{y^y} \qquad \text{Ableiten ergibt:}$$

$$\frac{dL_\nu}{dy} = a\left[\ln(1+y) + 1 - \ln y - 1\right] = a \ln\frac{(1+y)}{y}$$

$$dL_\nu = a \ln\left[1 + \frac{1}{y}\right] dy \qquad \text{oder wegen } dy = \frac{c^2}{2h\nu^3}\, dI_\nu$$

$$dL_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2}\,\frac{c^2}{2h\nu^3}\ln\left[1 + \frac{N}{I_\nu}\right] dI_\nu = \frac{k}{h\nu}\ln\left[1 + \frac{N}{I_\nu}\right] dI_\nu = \frac{1}{T_\nu^*}\, dI_\nu \qquad \text{q.e.d.}$$

Der Beweis läßt sich auch durch direkte Integration mit Hilfe von $\int \ln x = x \ln x - x$ durchführen.

7.7 ENERGIEBILANZEN DER MATERIE UND DES STRAHLUNGSFELDES

In Kap. 2.2(c) wurde die Bilanzgleichung (2-18) für die *massenspezifische* Energie e hergeleitet, d.h. mit $e = k + \Phi + u$

$$\text{(2-18)} \qquad \rho\frac{de}{dt} = \rho\frac{d}{dt}\left[k + \Phi + u\right] = \nabla\cdot\left[\mathbb{T}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{W}\right]$$

Für unbewegte Materie spezialisiert sich dies auf

$$(2\text{-}18') \qquad \rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{du}{dt} = - \nabla \cdot \mathbf{W}$$

Da hier Wechselwirkungen mit dem Strahlungsfeld interessieren sollen, für welches nur *volumenspezifische* Energien definiert werden können, sollte in Analogie zu Kap. 7.4 nun auch die Bilanzgleichung (2-18') entsprechend umgeformt werden, hier also für die Größe $\rho e = e^{\#}$. Dies ist wegen

$$(2\text{-}13) \qquad \rho \frac{da}{dt} = \frac{\partial(\rho a)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} a) \qquad \text{d.h. bei } \mathbf{v} = 0:$$

$$(2\text{-}13') \qquad \rho \frac{da}{dt} = \frac{\partial(\rho a)}{\partial t} = \frac{\partial a^{\#}}{\partial t}$$

"automatisch" erledigt durch eine Umformung in die Euler'sche Form. Man erhält also

$$(2\text{-}18'') \qquad \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{W} = 0$$

Vergleicht man dies mit der entsprechenden Bilanzgleichung für eine *beliebige* Größe,

$$(2\text{-}7) \qquad \frac{\partial(\rho a)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_a = Q_a$$

so fällt der fehlende Quellterm in der Energiebilanz auf, was durch die globale Erhaltungseigenschaft der Energie begründet wurde. Andererseits haben wir in Kap. 2.2(d) einen formalen Quellterm für den *Impuls* eingeführt, obwohl dieser ebenfalls eine globalen Erhaltungsgröße ist. - Als Grund für diesen Quellterm nannten wir die Tatsache, daß nach der Nahewirkungstheorie die Materie ein für das Schwerefeld "intern offenes" System ist. Nur die "künstliche" Erfindung einer Potentiellen Energie *der Materie*, die eigentlich eine *(dort ruhende)* Energie *des Schwerefeldes* ist, verhinderte die explizite Beschreibung der internen Wechselwirkung zwischen Materie und Feld durch einen formalen Quellterm der Energie. Ein entsprechender potentieller Impuls der Materie läßt sich jedoch nicht definieren, da Feldimpuls im Schwerefeld mit Lichtgeschwindigkeit von einem zum anderen materiellen System *transportiert* und dort durch interne Wechselwirkung übertragen wird.

Wenn nun *zusätzliche* Wechselwirkungen der Materie, nämlich mit dem Strahlungsfeld, berücksichtigt werden sollen, bezieht man weitere Systeme in die Beschreibung ein (nach Kap. 7.6 sogar unendlich viele), welche die Materie zu einem intern offenen System machen, und in dem nun *auch die Energie* mit Lichtgeschwindigkeit *transportiert* wird! Ein *formaler* Quellterm, der den internen *Austausch* zwischen der Materie und den am gleichen Ort befindlichen Strahlenbündeln beschreibt, läßt sich nun auch für die Energie nicht mehr verhindern (wie ja auch formale negative Entropiequellen auftreten können, → Kap. 7.6). Daher muß (2-18") im Sinne von (2-7) verallgemeinert werden:

(7-77) $$\frac{\partial e^{\#}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{W} = Q_{e\#}$$

Eine entsprechende Energiebilanzgleichung ist für die Energiedichte des Strahlungsfeldes zu formulieren:

(7-78) $$\frac{\partial e^{*}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{R} = Q_{e^*}$$

Die globale Energieerhaltung kann nun durch die Forderung formuliert werden:

(7-79) $$Q_{e\#} = -Q_{e^*}$$

Die lokale Bilanzgleichung (7-78) soll mit der <u>SüG</u> (7-71), $dI_\nu/ds = -\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu$, verglichen werden. Die Ableitung d/ds kann wegen $ds/dt=c_n$ als individuelle Zeitableitung aufgefaßt werden, bei deren Euler'scher Aufspaltung der advektive Anteil mit der vektoriellen Lichtgeschwindigkeit $c_n\mathbf{e}$ zu formulieren ist:

(7-80) $$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{1}{c_n}\frac{dI_\nu}{dt} = \frac{1}{c_n}\left[\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + c_n\mathbf{e}\cdot\nabla I_\nu\right]$$

Damit ist die SüG in eine lokale Energiebilanzgleichung für die elementaren Strahlenbündel umgeformt worden:

(7-81) $$\frac{1}{c_n}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{e}\cdot\nabla I_\nu = -\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu$$

Setzt man (7-73), $e^* = 1/c_n \iiint d\nu\, d^2\omega\, I_\nu$, in (7-78) ein, so stellt sich die Bilanzgleichung als ein Frequenz- und Raumwinkelintegral über Strahlungsübertragungsgleichungen (7-81) dar, und man findet neben (7-73) die bereits in (7-14) angegebene Formel für **R**, sowie eine explizite Darstellung der Quellfunktion Q_{e^*}:

(7-82a) $$e^* = \frac{1}{c_n}\iiint d\nu\, d^2\omega\, I_\nu$$

(7-82b) $$\mathbf{R} = \iiint d\nu\, d^2\omega\, \mathbf{e} I_\nu$$

(7-82c) $$Q_{e^*} = \iiint d\nu\, d^2\omega\, [\, -\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu \,]$$

Da nur e^* den sehr große Wert von c_n als Nenner hat, ist eine gute Approximation von (7-78) gegeben durch

(7-78') $$\nabla\cdot\mathbf{R} = Q_{e^*}$$ also auch

(7-79') $$Q_{e\#} = -Q_{e^*} = -\nabla\cdot\mathbf{R}$$

Damit geht die materielle Bilanzgleichung (7-77) über in

$$(7\text{-}77') \qquad \frac{\partial e^{\#}}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{W}+\mathbf{R}) = 0$$

Obwohl im Vergleich zu (7-78) die Fähigkeit des Strahlungsfeldes, Energie zu speichern, vernachlässigt wurde gegenüber seiner Fähigkeit, Energie zu transportieren, wird diese Gleichung in der Literatur häufig als "richtig" angesehen. Auf den approximativen Charakter von (7-77') ist erst durch Callies und Herbert (1983) deutlich hingewiesen worden.

7.8 ENTROPIEBILANZEN NACH CALLIES UND HERBERT

Wie soeben für die volumenspezifische Energiedichte, so stellen wir nun die lokalen Bilanzgleichungen für die volumenspezifische Entropiedichte in Materie- und Strahlungsfeld auf. Bei unbewegter Materie geht (2-59) über in

$$(2\text{-}59') \qquad \rho\,\frac{ds}{dt} = -\frac{\mathbf{W}\cdot\nabla T}{T^2} - \nabla\cdot\frac{\mathbf{W}}{T} = -\nabla\cdot\frac{\mathbf{W}}{T} + \mathbf{W}\cdot\nabla\,\frac{1}{T}$$

das ergibt mit der Umformung (2-13')

$$(2\text{-}59'') \qquad \frac{\partial s^{\#}}{\partial t} + \nabla\cdot\frac{\mathbf{W}}{T} = Q_{s\#} \qquad \text{mit} \qquad Q_{s\#} = \mathbf{W}\cdot\nabla\,\frac{1}{T}$$

Ebenso wie (2-18") auf (7-77) durch Hinzunahme eines Quelltermes verallgemeinert werden mußte, weil bei Berücksichtigung von Strahlung das Materiefeld intern offen ist, muß auch (2-59") durch einen Wechselwirkungsterm mit dem Strahlungsfeld ergänzt werden, der in $Q_{s\#}$ *zusätzlich* enthalten ist:

$$(7\text{-}83) \qquad \frac{\partial s^{\#}}{\partial t} + \nabla\cdot\frac{\mathbf{W}}{T} = Q_{s\#} \qquad \text{mit} \qquad Q_{s\#} = Q_{\mathrm{I}} + Q_{\mathrm{II}} = \mathbf{W}\cdot\nabla\,\frac{1}{T} + Q_{\mathrm{II}}$$

Der Quellterm Q_{I} hat die in Kap. 2.7(b,c) besprochene bilineare Form $Q_{\mathrm{I}} = J_k X_k$ aus thermodynamischen Flüssen und Kräften. Gilt das auch für Q_{II}? Die durch (7-77') suggerierte Gleichberechtigung von **W** und **R** könnte eine Formulierung gemäß

$$Q_{\mathrm{II}} = \mathbf{R}\cdot\nabla\,\frac{1}{T} = -\frac{1}{T^2}\mathbf{R}\cdot\nabla T \qquad \textit{(FEHLER!)}$$

nahelegen. Das ist genau die Formulierung, die wir in Kap. 7.1, erster Absatz, ausschließen mußten! - Wegen der volumenspezifischen Gibbs'schen Form (7-38), ohne Phasenumwandlungen also $de^{\#} = T\,ds^{\#}$, sind auch die beiden lokalen Bilanzgleichungen (7-77) und (7-83) für volumenspezifische Größen miteinander verknüpft:

$$\frac{\partial e^{\#}}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{W} + Q_{e\#} = T\,\frac{\partial s^{\#}}{\partial t} = T\left[-\nabla\cdot\frac{\mathbf{W}}{T} + Q_{s\#}\right]$$

also

$$Q_{s\#} = -\frac{1}{T}\,\nabla\cdot\mathbf{W} + \frac{1}{T}\,Q_{e\#} + \nabla\cdot\frac{\mathbf{W}}{T} \qquad \text{mit (7-79) auch}$$

$$Q_{s\#} = \mathbf{W}\cdot\nabla\,\frac{1}{T} - \frac{Q_{e^*}}{T} \qquad \text{oder mit (7-82c)}$$

$$\text{(7-84)} \qquad Q_{s\#} = \mathbf{W}\cdot\nabla\,\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\iiint d\nu\; d^2\omega\;[\,-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu\,]$$

Also ist in (7-83) $Q_{\|} = -Q_{e^*}/T$ zu setzen. - Die vollständige Formulierung der Entropieerzeugung bei Wechselwirkung mit Strahlung kann jedoch erst angegeben werden, wenn auch die Entropiebilanzgleichung *für das Strahlungsfeld* aufgestellt und zu (7-83) addiert wird. Sie lautet in Analogie zur energetischen Gleichung (7-78):

$$\text{(7-85)} \qquad \frac{\partial s^*}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{T} = Q_{s^*}$$

T ist der Entropietransport im Strahlungsfeld, der dem Energietransport **R** in der Energiebilanz entspricht. (7-85) kann zwar nicht wie (7-78) direkt mit der SüG verglichen werden, jedoch mit einer *Kombination* aus der SüG und der Fundamentalform (7-75), $dI_\nu = T^*_\nu\, dL_\nu$. Zunächst werden die Entropieänderungen dL_ν auf ds bezogen und wie die Energieänderungen in (7-80) einer Euler'schen Aufspaltung unterworfen:

$$\frac{dL_\nu}{ds} = \frac{1}{c_n}\,\frac{dL_\nu}{dt} = \frac{1}{c_n}\,\frac{\partial L_\nu}{\partial t} + \mathbf{e}\cdot\nabla L_\nu$$

Andererseits ergibt die Kombination aus SüG (7-71) und Fundamentalform $dI_\nu = T^*_\nu\, dL_\nu$:

$$\frac{dL_\nu}{ds} = \frac{1}{T^*_\nu}\,\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{1}{T^*_\nu}\left[-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu\right]$$

Folglich lautet die lokale Form der Entropiebilanzgleichung für die elementaren Strahlenbündel

$$\text{(7-86)} \qquad \frac{1}{c_n}\,\frac{\partial L_\nu}{\partial t} + \mathbf{e}\cdot\nabla L_\nu = \frac{1}{T^*_\nu}\left[-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu\right]$$

Wegen (7-74), $s^* = 1/c_n \iiint d\nu\; d^2\omega\; L_\nu$ ist (7-85) ein Frequenz- und Raumwinkelintegral über (7-86), ebenso wie die energetische Gleichung (7-78) ein Integral über (7-81) ist, und man findet zusammengefaßt

$$(7\text{-}87a)\quad s^* = \frac{1}{c_n} \iiint d\nu\, d^2\omega\, L_\nu$$

$$(7\text{-}87b)\quad \mathbf{T} = \iiint d\nu\, d^2\omega\, \mathbf{e}L_\nu$$

$$(7\text{-}87c)\quad Q_s{}^* = \iiint d\nu\, d^2\omega\, \frac{[\,-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu\,]}{T_\nu^*}$$

Die angekündigte Addition (7-83) + (7-85) ergibt

$$(7\text{-}88)\quad \frac{\partial(s^\# + s^*)}{\partial t} + \nabla\cdot\left[\frac{\mathbf{W}}{T} + \mathbf{T}\right] = Q_s{}^\# + Q_s{}^* = Q_s$$

$$Q_s = \mathbf{W}\cdot\nabla\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\iiint d\nu\, d^2\omega\,[\,-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu\,] + \iiint d\nu\, d^2\omega\,\frac{[\,-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu\,]}{T_\nu^*}$$

Die Körpertemperatur T ist unabhängig von der Frequenz und der Richtung der einzelnen Strahlenbündel, so daß 1/T hinter das Integral gezogen werden kann. Somit erhält man durch Ausklammern von $[-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu]$ die gesuchte Entropie-Quellfunktion:

$$(7\text{-}89)\quad Q_s = \mathbf{W}\cdot\nabla\frac{1}{T} + \iiint d\nu\, d^2\omega\,[\,-\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu\,]\left[\frac{1}{T_\nu{}^*} - \frac{1}{T}\right]$$

Dieses Ergebnis von Callies und Herbert (1983) stellt die Lösung des zu Beginn von Kapitel 7.1 aufgeworfenen Problems dar. Der Vektor **R** wird *nicht* zur Formulierung der Entropieerzeugung durch Strahlung herangezogen. Den Antrieb für den irreversiblen Prozeß liefert auch *nicht* der Temperaturgradient in der *materiellen Systemkomponente*, sondern die in (7-89) enthaltenen Differenzen der reziproken Körper- *und* Strahlungstemperaturen der verschiedenen Strahlenbündel. Je größer diese Differenzen sind, desto stärker werden die in (7-89) ebenfalls enthaltenen Absorptions- und Emissionsprozesse sein, die man mit den Phasenübergangsflüssen w_ε aus (2-70) vergleichen kann.

Es ist also sinnvoll, auch hier von Thermodynamischen Flüssen und Kräften zu sprechen, die über alle Frequenzen und Richtungen der Strahlenbündel integriert werden müssen, um die gesamte Entropieproduktion zu erfassen. Definiert man Flüsse J_ν und Kräfte X_ν gemäß

$$J_\nu = -\alpha_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu \quad ; \quad X_\nu = \frac{1}{T_\nu^*} - \frac{1}{T}$$

so schreibt sich (7-89) in der thermodynamisch konsistenten Bilinearform:

$$Q_s = \mathbf{J}\cdot\mathbf{X} + \iiint d\nu\, d^2\omega\, J_\nu X_\nu$$

7.9 STRAHLUNGSBILANZEN UND TREIBHAUSEFFEKT

Die Solarkonstante ("solar flux")

(7-90) $Q_o = 1370\ Wm^{-2}$

ist die gemessene solare Flußdichte F, die beim mittleren Erdabstand R von der Sonne durch eine senkrecht orientierte Einheitsfläche hindurchgeht. Die Flußdichte nimmt auf dem Weg von der Sonne zur Erde ab, im Gegensatz zur Strahldichte (Intensität) I.

Die *extraterrestrische solare Strahlungsflußdichte* $Q^{\downarrow}$ ist das global-zeitliche *Mittel* der solaren Strahlungsflußdichte F an der gesamten Atmosphären-Obergrenze der rotierenden Erde, welches sich aus dem Faktor 1/4 für das Verhältnis Querschnittsfläche / Oberfläche einer Kugel ergibt:

(7-91) $Q^{\downarrow} = Q_o/4 = 342.5\ Wm^{-2}$

Die *terrestrische solare Strahlungsflußdichte* (ohne eigenes Symbol) ist die durch Reflexion reduzierte solare Strahlungsflußdichte $Q^{\downarrow}$, d.h. mit der Albedo $\alpha \approx 0.3$:

(7-92) $(1-\alpha)\ Q^{\downarrow} = (1-\alpha)\ Q_o/4 = 240\ Wm^{-2}$

Die mittlere solare Flußdichte auf der Sonnenoberfläche sei F_s. Man definiert die effektive Strahlungstemperatur T_s der Sonne durch die Beziehung

(7-93) $F_s = \sigma T_s^4$

T_s ist also die Temperatur, die die Sonne hätte, wenn sie ein schwarzer Körper wäre (so daß F_s aus dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz (7-19) bestimmt werden könnte). Der numerische Wert von T_s ergibt sich durch Vergleich zweier Darstellungen des gesamten solaren Strahlungsflusses ϕ ($\rightarrow$ (7-13)), nämlich des Flusses durch zwei geschlossene Kugelschalen: einmal mit dem Sonnenradius r und einmal mit dem Radius R der Erdbahn. Das führt auf die Bedingung

(7-94) $\sigma T_s^4\ 4\pi r^2 = Q_o\ 4\pi R^2 \quad \rightarrow \quad T_s = 5780\ K$

Die von der Erde ausgehende *langwellige terrestrische Flußdichte* sei F_e. Die *effektive Strahlungstemperatur der Erde* T_e ist analog zu T_s definiert durch

(7-95) $F_e = \sigma T_e^4$

Der numerische Wert von T_e ergibt sich aus der Voraussetzung, daß sich die langwellige Ausstrahlung (7-95) und die kurzwellige Einstrahlung (7-92) kompensieren:

(7-96) $\sigma T_e^4 = (1-\alpha)\, Q^{\downarrow} = (1-\alpha)\, Q_o/4 \longrightarrow T_e = \sqrt[4]{(1-\alpha) Q_o/4\sigma} = 255\ K$

Die von der Erde ausgehende <u>extraterrestrische</u> <u>Flußdichte</u> $Q_{\uparrow}$ enthält neben F_e noch die reflektierte Solarstrahlung:

(7-97) $Q_{\uparrow} = \sigma T_e^4 + \alpha Q_o/4 = 240\ Wm^{-2} + 102\ Wm^{-2}$

Als <u>extraterrestrische</u> <u>Strahlungsbilanz</u> bezeichnet man die an der Atmosphären-Obergrenze als kompensiert anzunehmende resultierende Strahlungsflußdichte

(7-98) $Q = Q^{\downarrow} - Q_{\uparrow} = (1-\alpha)\, Q_o/4 - \sigma\, T_e^4 = 0$

$Q^{\downarrow}$ enthält nach (7-91), $Q^{\downarrow}=Q_o/4$, nur kurzwellige, $Q_{\uparrow}$ nach (7-97) enthält dagegen lang- *und* kurzwellige Strahlung. Verlegt man die Referenzhöhe *in* die Atmosphäre und bezeichnet die von "oben bzw. von unten kommende" Flußdichte mit $F^{\downarrow}$ bzw. mit $F_{\uparrow}$, so haben *beide* Flußdichten lang- und kurzwellige Anteile F_L und F_K:

(7-99) $F = F^{\downarrow} - F_{\uparrow} = F_K + F_L$ mit

$F_K = F_K^{\downarrow} - F_{K\uparrow}$ und $F_L = F_L^{\downarrow} - F_{L\uparrow}$ und den Definitionen

$F_K^{\downarrow}$ = Globalstrahlung
= Direkte Sonnenstrahlung + Diffuse Sonnenstrahlung

$F_{K\uparrow}$ = Solare Reflexionsstrahlung

$F_L^{\downarrow}$ = Atmosphärische Gegenstrahlung

$F_{L\uparrow}$ = Direkte Terrestrische Strahlung + Terrestrische Reflexionsstrahlung

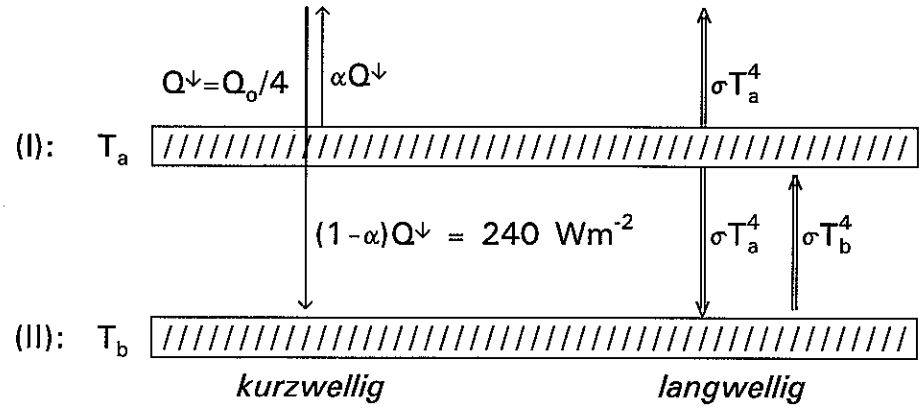
Die Diffuse Sonnenstrahlung nennt man auch *Himmelsstrahlung.* - Die Unterscheidung zwischen einer "kurzwelligen Strahlung" als Solarstrahlung und einer "langwelligen Strahlung" als terrestrische Strahlung ist begründet durch das Verschiebungsgesetz (7-18), $\lambda_{max} \cdot T$ = const, und durch die stark unterschiedlichen Temperaturen auf der Sonne bzw. im System Erde/Atmosphäre. In sehr einfachen Strahlungsmodellen legt man auch die Absorptions- und Emissionseigenschaften des Erdbodens und der Atmosphäre ausschließlich nach diesen beiden Strahlungsarten fest:

Erdboden: Schwarzer Körper für lang- und kurzwellige Strahlung

Atmosphäre: Schwarzer (oder Grauer) Körper für langwellige Strahlung, Weißer Körper mit Transmissionsvermögen "1" für kurzwellige Strahlung

Die atmosphärische Gegenstrahlung ist auch die Ursache für den <u>Treibhauseffekt</u>: Eine gedachte "kalte" Erdoberfläche erwärmt sich durch die Absorption der kurzwelligen Strahlung, strahlt aber dann wegen des Planck'schen Gesetzes auch zunehmend ab, bis ein Gleichgewicht zwischen Energiegewinn und Verlust erreicht ist. Wenn nun

auch eine langwellige Gegenstrahlung absorbiert werden muß, liegt dieses Gleichgewicht natürlich bei einer höheren Temperatur! Eine modellhafte quantitative Beschreibung des Treibhauseffektes erhält man, wenn man in einem solchen Strahlungsmodell nicht wie in (7-98) nur eine Bilanz, sondern *zwei* Strahlungsbilanzen betrachtet, nämlich eine für die im Anschluß an Formel (7-25) angesprochene Atmosphäre und eine Strahlungsbilanz für den *"schwarzen"* Erdboden:



Die vertikal nicht ausgedehnte "*Atmosphärenscheibe*" mit der Temperatur T_a absorbiert also die langwellige Zustrahlung vom Boden vollständig ("schwarz"), läßt die nichtreflektierte kurzwellige Strahlung vollständig hindurch ("Fenster"), und strahlt nach beiden Seiten langwellig ab. Die *Erdoberfläche* mit der Temperatur T_b absorbiert vollständig die langwellige Zustrahlung von der Atmosphäre *und* die kurzwellige Zustrahlung von der Sonne, und sie strahlt langwellig natürlich *nur nach oben* ab. Aus (7-34) folgt wegen a=1 für alle Emissionen $F_{em} = \sigma T^4$.

Bildet man die (lt. Voraussetzung insgesamt verschwindende) integrale Bilanz über die horizontal-homogene Plattenatmosphäre der Fläche A und verschwindender Dicke, so ergibt das Oberflächenintegral über die Flußdichten $A\ \sigma T_b^4 - 2A\ \sigma T_a^4 = 0$ oder

(7-100) $\sigma T_b^4 - 2\sigma T_a^4 = 0$ Bilanz (I)

Schon hieraus folgt der *Treibhauseffekt* $T_b > T_a$, denn

$$T_b = T_a\sqrt[4]{2} = 1.19\ T_a$$

Die Bilanz für die Erdoberfläche lautet

(7-101) $(1-\alpha)\ Q_o/4 + \sigma T_a^4 - \sigma T_b^4 = 0$ Bilanz (II)

Dies sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten T_a und T_b. Die Addition beider Gleichungen ergibt natürlich die extraterrestrische Bilanz (7-98) (mit $T_e=T_a$),

$$(1-\alpha)\ Q_o\cancel{/4} = \sigma T_a^4,$$

was hier als Bestimmungsgleichung für T_a aufgefaßt werden kann, so daß man nach Einsetzen in (7-100) T_b erhält:

$$T_a = 255K \quad \text{und} \quad T_b = 303K$$

Der Grund für diesen Treibhauseffekt ist letztendlich der, daß die Atmosphärentemperatur T_a in der Bilanz (I) sich so einstellen muß, daß über den Term σT_a^4 der langwelligen Zustrahlung von unten entsprochen wird, (damit die Temperatur stationär bleibt). Die Bodentemperatur T_b dagegen muß sich in der Bilanz (II) über den Term σT_b^4 so einstellen, daß die kurzwellige Zustrahlung *und* der Empfang der langwelligen Emission aus der Atmosphäre kompensiert wird. - Allerdings läßt weder die Atmosphäre die nicht reflektierte solare Strahlung vollkommen hindurch, noch absorbiert sie vollkommen die terrestrische Strahlung.

Wir verbessern die Beschreibung des Treibhauseffektes, indem wir in die Bilanzen (7-100), (7-101) eine grau absorbierende Atmosphäre einbauen. Der Boden soll jedoch noch immer schwarz emittieren. Es handelt sich also um die Modellvorstellung einer *Grauen Atmosphäre*. - In der Bilanz (I) ist nun die Absorption der vom Boden schwarz emittierten Energie σT_b^4 auf $a\,\sigma T_b^4$ mit $a < 1$ verringert. Andererseits wird wegen der <u>Prevost'schen</u> <u>Regel</u> von der Atmosphäre auch weniger Energie als $2\sigma T_a^4$ emittiert, was wegen des Kirchhoff'schen Gesetzes (7-28) *ebenfalls* durch das <u>Absorptionsvermögen</u> $a < 1$ beschrieben werden kann:

$$(7\text{-}102) \qquad a\sigma T_b^4 - 2a\sigma T_a^4 = 0 \qquad \text{Bilanz (I)}$$

In der Bilanz (II) ändert sich nichts an der kurzwelligen Zustrahlung (für den *kurzwelligen* Anteil ist die Atmosphäre noch immer ein Fenster) und an der langwelligen Abstrahlung. (Die Erde ist noch immer ein schwarzer Körper). Nur die langwellige Zustrahlung von der nun Grauen Atmosphäre verringert sich um den Faktor a:

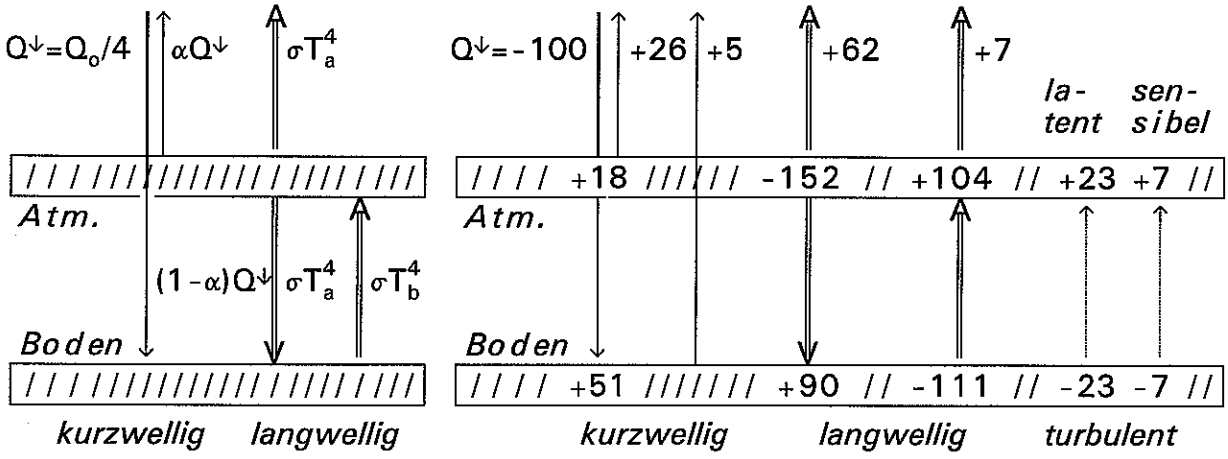
$$(7\text{-}103) \qquad (1-\alpha)\, Q_o/4 + a\sigma T_a^4 - \sigma T_b^4 = 0 \qquad \text{Bilanz (II)}$$

Es ergibt sich wie zuvor aus (I) der Koeffizient $\sqrt[4]{2}$ zwischen den beiden Temperaturen T_b und T_a. Die Werte der *beiden* Temperaturen hängen nun aber von a ab: Die Operation $2\cdot$(II) + (I) eliminiert T_a und ergibt

$$(7\text{-}104) \qquad (1-\alpha)Q_o/2 = (2-a)\sigma T_b^4$$

Mit wachsendem Absorptionsvermögen a wird die Bodentemperatur höher, und damit auch die Atmosphärentemperatur, wenn sie auch immer um den Faktor $1/\sqrt[4]{2}$ geringer bleibt als die Bodentemperatur. Obwohl qualitativ die höhere Bodentemperatur richtig "herauskommt", ist ihr Wert doch *zu* hoch. Das liegt *hauptsächlich* daran, daß neben den Strahlungsflüssen auch *turbulente* vertikale Energieflüsse (fühlbare und latente

Wärmeflüsse) zwischen dem Boden und der Atmosphäre berücksichtigt werden müssen. In der Realität verschwinden nämlich die Bilanzen in der Atmosphäre und im Boden erst dann! Diese turbulenten Wärmeflüsse kühlen den Boden und erwärmen die Atmosphäre und mildern somit den Treibhauseffekt. Gemäß der Definition in Kap. 7.1 bedeuten diese *materiellen* Wärmeflüsse, daß zwischen Atmosphäre und Boden *kein* Strahlungsgleichgewicht *besteht.* - Das folgende Bild wiederholt die obige Modellvorstellung der reinen Strahlungsflüsse *(links)* und gibt zum Vergleich die Korrekturen durch die turbulenten Flüsse sowie durch einige weitere Systemerweiterungen wieder *(rechts).* Die Zahlenangaben geben *gemessene* Energiegewinne und Verluste wieder, und zwar die extraterrestrischen Strahlungsbilanzen, sowie die Bilanzen in der Atmosphäre (I) und im Boden (II), die durch Strahlungsabsorption, Emission und durch Gewinn oder Verlust von sensibler und latenter Wärme entstehen. Alle verzeichneten Zahlen sind *Prozentangaben*, gemessen an der einfallenden kurzwelligen Flußdichte $Q^{\downarrow}$, die auf 100% festgesetzt wurde (Mittelwerte aus Fortak (1982), Schönwiese (1995) und anderen):



Gegenüber dem linken Bildteil mußten im realistischen rechten Bild, neben der schon erwähnten Berücksichtigung der turbulenten Transporte, noch folgende Erweiterungen vorgenommen werden:

- Die Atmosphäre ist für den nichtreflektierten Anteil der solaren Strahlung $Q^{\downarrow}$ *nicht vollkommen* durchlässig, sondern sie absorbiert den Anteil 18%.
- Die reflektierte Strahlung $\alpha Q^{\downarrow}$ besteht *nicht nur* aus dem in der Atmosphäre reflektierten Anteil (von 26%). Zur planetaren Albedo zählt auch eine Reflexion am Boden von 5%.
- Die vom Boden emittierte Strahlung (von 111% der Strahlung $Q^{\downarrow}$) wird *nicht vollkommen* von der Atmosphäre absorbiert. 7% werden hindurchgelassen.
- Die von der Atmosphäre emittierte Strahlung (von 152% der Strahlung $Q^{\downarrow}$) führt zu *unterschiedlichen* Energiegewinnen im Weltall (62%) und am Boden (90%).

Die letztgenannte Zahl verursacht als "langwellige Gegenstrahlung" den Treibhauseffekt. Das atmosphärische Absorptions- und Emissionsverhalten wird geprägt von Aerosolen sowie von "Treibhausgasen" wie Wasserdampf, Kohlendioxid oder Methan, (→ Kap. 8.3(e,f)). - In jeder horizontalen Schicht (extraterrestrischer Bereich, Plattenatmosphäre (I) und Erdboden (II)) herrscht energetisches Gleichgewicht, denn die Summe der Energiegewinne bzw. Energieverluste verschwindet in jeder Schicht:

Extraterrestrisch:	$-100 + 26 + 5 + 62 + 7 = 0$
Plattenatmosphäre:	$-152 + 18 + 104 + 23 + 7 = 0$
Erdboden:	$-111 - 23 - 7 + 51 + 90 = 0$

Da in der atmosphärischen Bilanz bzw. in der Bodenbilanz jeweils 23+7 = 30 Prozent des Energieumsatzes nicht durch Absorptions- und Emissionsprozesse, sondern durch materielle Wärmeflüsse erfolgen, liegt hier *kein* Strahlungsgleichgewicht im Sinne der Definition in Kap. 7.1 vor. - Bisher haben wir stets globale Energiebetrachtungen durchgeführt. Die angegebenen globalen Mittelwerte sind jedoch räumlich und zeitlich sehr stark differenziert. Betrachtet man die *meridionale* Differenzierung, so ist auch die extraterrestrische Strahlungsbilanz *nicht* ausgeglichen, sondern es kommt zu einem Überschuß in den Tropen gegenüber den Polargebieten von etwa 50 Wm^{-2}. Das ist gerade die schon häufig angesprochene differentielle Erwärmung, welche die Atmosphäre zu einer Wärmekraftmaschine macht. Der durch die differentielle Erwärmung induzierte Ausgleich geschieht durch die großräumige ozeanische und atmosphärische Zirkulation, letztendlich also durch das "Wetter". Das bedeutet, daß die absorbierte Solarenergie nicht hundertprozentig zu einer unmittelbaren Temperaturerhöhung genutzt wird, sondern zum Teil auch zum Aufbau von Verfügbarer Potentieller Energie, welche sich dann in Kinetische Energie umwandelt *und dann erst* über die Dissipation in Innere Energie. Genauer gesagt, führen fast 99% der Solareinstrahlung zu einer *unmittelbaren* Erhöhung der Inneren Energie. Erst das restliche Prozent macht die Atmosphäre zu einem System mit der Eigenschaft "Wetter", d.h. zu einer Wärmekraftmaschine, die offenbar einen sehr schlechten Wirkungsgrad hat und nur "ihre eigene Reibung" überwinden muß. Dieses eine Prozent der Solareinstrahlung ist aber so wichtig, daß wir ihm die fünf Kapitel 7.10 bis 7.14 widmen werden.

Die effektive Temperatur T_e des Systems Erde/Atmosphäre ist die Temperatur, die das System hätte, wenn es ein schwarzer Körper wäre. Dann wäre die Flußdichte $F_e = \sigma T_e^4$ der terrestrischen Ausstrahlung aus dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz bestimmt. In der Strahlungsbilanz (7-98) wurde vorausgesetzt, daß sich diese langwellige Ausstrahlung mit der kurzwelligen Einstrahlung (7-92) kompensiert. Wenn das nicht geschieht, muß es zu Temperaturänderungen kommen, die in einem "Klimamodell" beschrieben werden können (→ Kap. 8.6(a)).

7.10 ENTROPIK UND ENERGETIK DER ATMOSPHÄRE

7.10(a) Differentielle Erwärmung und Entropik

Wenn man davon ausgeht, daß im globalen langzeitlichen Mittel die gesamte Energie und die Entropie der Erde stationär sind, müssen die Oberflächenintegrale über die Energieflüsse verschwinden, während die im Oberflächenintegral dargestellten globalen Entropieflüsse die volumenintegrierten Entropiequellen kompensieren müssen. *Die Atmosphäre muß die produzierte Entropie exportieren!* Um dieses zu zeigen, betrachten wir globale Mittelwerte über die Entropiebilanzgleichung (2-69) mit (2-71) aus Kap. 2.7(c,d):

$$(7\text{-}105) \qquad \rho \frac{ds}{dt} = -\nabla\cdot\left[\frac{\mathbf{W}}{T} - \sum_{\nu} \rho_\nu \mathbf{u}_\nu \frac{\mu_\nu}{T} \right] + \frac{1}{T} \mathbb{F}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} + \sum_{\varepsilon} w_\varepsilon \frac{A_\varepsilon}{T}$$

Dabei erhalten wir aufgrund der vorzunehmenden Volumenintegration des Divergenztermes $\nabla\cdot[\ \mathbf{W}/T - \Sigma\ (\mu_\nu\rho_\nu\mathbf{u}_\nu)/T\ ]$ ein Oberflächenintegral über $\mathbf{W}/T - \Sigma\ (\mu_\nu\rho_\nu\mathbf{u}_\nu)/T$. Da jedoch der diffusive Entropiestrom $\Sigma(\mu_\nu\rho_\nu\mathbf{u}_\nu)/T$ die Grenzen der Atmosphäre nicht überschreiten kann, erhalten wir das globale Mittel

$$\overline{\nabla\cdot[\ \mathbf{W}/T - \Sigma\ (\mu_\nu\rho_\nu\mathbf{u}_\nu)/T\ ]} = \overline{\nabla\cdot[\mathbf{W}/T]}$$

Das Volumenintegral und damit das globale Mittel der Entropieproduktion ist natürlich positiv:

$$\overline{(\mathbb{F}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v})/T + \Sigma(w_\varepsilon A_\varepsilon)/T} > 0$$

Eine stationäre global gemittelte Entropiebilanz ist also nur möglich, wenn

$$\overline{\nabla\cdot[\mathbf{W}/T]} < 0$$

Eine entsprechende Integration über die Energiebilanz (2-18), $\rho de/dt = \nabla\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbb{T}-\mathbf{W})$, ergibt nach Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes, wegen des Verschwindens von $\mathbf{v}$ an der Atmosphären - Untergrenze und wegen des Verschwindens von $\mathbb{T}$ an der Atmosphären - Obergrenze:

$$\overline{\nabla\cdot\mathbf{W}} = 0$$

Das Volumenintegral über $\nabla\cdot\mathbf{W}$, also das Oberflächenintegral über $\mathbf{W}$, verschwindet *deswegen*, weil es zu einer Kompensation der Netto-Energiezustrahlung in niedrigen Breiten und der Netto-Energieabstrahlung in hohen Breiten kommt. Wenn sich aber die importierenden äquatornahen und die exportierenden polnahen Energieflüsse kompensieren, so *können* sich die entsprechenden Entropieflüsse $\mathbf{W}/T$ *nicht* kompensieren: Weil wegen der differentiellen Erwärmung in den exportierenden höheren Breiten eine niedrigere Temperatur herrscht als in den importierenden niedrigen Breiten, erhält der Export einen kleineren Nenner und damit ein höheres Gewicht bei der Berechnung

des *globalen* Netto-Entropiehaushaltes! Daher kann die irreversibel erzeugte Entropie auch wieder exportiert werden, so daß Stationarität des global gemittelten Entropiegehaltes der Atmosphäre ermöglicht wird. - Am Schluß von Kap. 3.9 wurde behauptet, daß die differentielle Erwärmung neben einem Netto-Wärmeimport bei kompensatorischem Entropieaustausch in reversiblen Kreisprozessen auch einen Netto-Entropieexport bei kompensatorischem Energieaustausch ermöglicht. Die Diskussion der global gemittelten Energie- und Entropiebilanzgleichung hat nun belegt, daß in der Atmosphäre gerade der zweite Fall realisiert ist.

7.10(b) Zum Haushalt der Totalen Potentiellen Energie

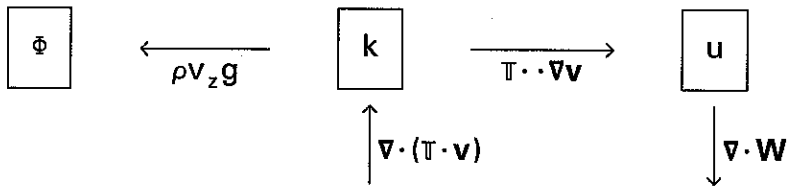
Die drei Bilanzen für die Potentielle, Kinetische und Innere Energie (2-25), (2-27a), (2-29a) aus Kap. 2.2(g) lauten

$$\text{(2-25)} \qquad \rho \frac{d\Phi}{dt} = \qquad\qquad + \rho \mathbf{v}\cdot\nabla\Phi$$

$$\text{(2-27a)} \qquad \rho \frac{dk}{dt} = - \mathbb{T}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} - \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi + \nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{v})$$

$$\text{(2-29a)} \qquad \rho \frac{du}{dt} = + \mathbb{T}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} \qquad\qquad - \nabla\cdot\mathbf{W}$$

wobei in guter Näherung $\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi = \rho v_z g$ gilt. Diese Gleichungen lassen sich durch das folgende Diagramm veranschaulichen:



In Kap. 2.2(g) wurde die Summe der Gleichungen (2-25) und (2-27a) als Bilanzgleichung für die spezifische Mechanische Energie $\mathfrak{m} = k+\Phi$ betrachtet. Das "vereinigt" die beiden linken Kästen, und die Umwandlung $\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi = \rho v_z g$ trat im dortigen Diagramm nicht explizit auf. Die Umwandlung $\mathbb{T}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} = - p\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbb{F}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}$ läßt sich in einen *reversiblen* Anteil $- p\nabla\cdot\mathbf{v}$ und in einen *irreversiblen* Anteil $\mathbb{F}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}$ aufspalten. - Es gibt aber auch gute Gründe dafür, die beiden *äußeren* Kästen des obigen Diagramms zu einer Energieart zusammenzufassen, der Totalen Potentiellen Energie π:

$$\text{(7-106)} \qquad \pi = \phi + u \quad \longrightarrow \quad e = k+\pi$$

Ein Grund für diese Definition liegt darin, daß Vertikalintegrale über ϕ und u nur *gemeinsam* größer oder kleiner werden können, denn falls die Temperatur einer vertikalen Luftsäule steigt, steigt nicht nur u, sondern auch der Schwerpunkt dieser Säule.

Die entsprechenden Bilanzgleichungen für π und die verbleibende Kinetische Energie lauten:

$$\text{(7-107)} \qquad \rho \frac{dk}{dt} = - \mathbb{T}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} - \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi + \nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{v})$$

$$\text{(7-108)} \qquad \rho \frac{d\pi}{dt} = + \mathbb{T}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi - \nabla\cdot\mathbf{W}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{k} \arrow[r, shift left, "\rho g v_z"] \arrow[r, shift right, "\mathbb{T}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}"'] & \boxed{\pi} \arrow[d, "\nabla\cdot\mathbf{W}"] \\ & \end{tikzcd} \qquad \uparrow \nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{v})$$

Bildet man nun globale Mittelwerte über *diese* Gleichungen, so verschwinden die meisten Terme: Die Volumenintegrale über $\nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{v})$ und über $\nabla\cdot\mathbf{W}$, welches im Rahmen der Mittelung zu bilden sind, verschwinden wie in Kap. 7.10(a,b) begründet. Ferner verschwindet das globale Mittel über $-p\nabla\cdot\mathbf{v}$, denn dies ist der *reversible* Anteil von $\mathbb{T}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}$. Der *irreversible* Anteil $\mathbb{F}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}$ verschwindet natürlich nicht, sondern er wandelt *überall* Kinetische Energie k in Totale Potentielle Energie π um. Eine globale *stationäre* Energiebilanz ist also nur dann möglich, wenn das Mittel über $\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi = g\rho v_z$ *nicht* verschwindet, sondern *negativ* ist, so daß die durch Reibung verlorengegangene Kinetische Energie aus der Totalen Potentiellen Energie wieder regeneriert wird. Wir fassen die Erörterungen zur globalen Mittelung zusammen:

$$\overline{\nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{v})} = 0 \;; \quad \overline{\nabla\cdot\mathbf{W}} = 0 \quad ; \quad \overline{-p\nabla\cdot\mathbf{v}} = 0$$

$$\text{(7-109)} \qquad \overline{\mathbb{F}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}} > 0 \quad ; \quad \overline{\rho g v_z} < 0$$

Die erforderlichen negativen Werte $\overline{\rho g v_z} < 0$ kommen zustande, wenn die absinkende Luft *im Mittel* dichter ist als die aufsteigende Luft. Da sich in der Atmosphäre stets negative Dichteschwankungen in positiven Temperaturschwankungen äußern und umgekehrt, muß also häufiger kalte Luft absinken und warme Luft aufsteigen als umgekehrt. Die Umrechnung von Dichteschwankungen in Temperaturschwankungen basiert auf der Zustandsgleichung $\rho = p/RT$, wobei *Druckschwankungen* vernachlässigt werden können. Das entspricht der Bemerkung in Kap. 3.6(a), wonach isobare Zustandsänderungen *realistischer* sind als isochore, $\rightarrow$ auch Ende von Kap. 6.4(a). Eine Zirkulation mit aufsteigender wärmerer Luft und absinkender kälterer Luft bewirkt netto ein Absinken des Schwerpunktes der zirkulierenden Luftmassen. Es ist also eine <u>thermisch</u> <u>direkte</u> Zirkulation. Man findet sie z.B. in der äquatorialen Hadley-Zelle und an Warm- und Kaltfronten. Die sich nördlich an die Hadley-Zelle anschließende meridionale Ferrel- Zelle ist zwar thermisch indirekt, kann aber das negative globale Langzeitmittel von $g\rho v_z$ nicht gefährden.

Wir haben also die Stationarität der global integrierten Energiearten k und π plausibel gemacht: k nimmt zwar durch Reibung ab, wird aber durch Schwerpunkts-

Erniedrigung (d.h. durch thermisch direkte Zirkulationen) gefüttert. Dadurch nimmt die Potentielle Energie ab. Die Abnahme dieses *Teiles* der Totalen Potentiellen Energie π wird jedoch kompensiert durch den Reibungseinfluß, d.h. durch die Erhöhung der Inneren Energie, die ja *ebenfalls* ein Teil der Totalen Potentiellen Energie ist.

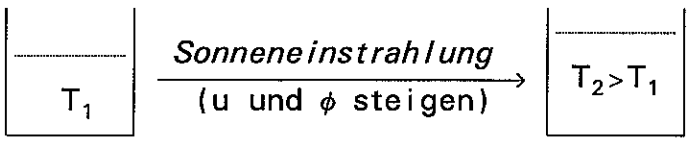
7.10(c) Differentielle Erwärmung und Energetik

Die Diskussion am Ende des vorigen Kapitels 7.10(b) fördert kaum das Verständnis für die allgemeine atmosphärische Zirkulation ("AAZ"): Die Totale Potentielle Energie kann nur *solange* für den Reibungsverlust der Kinetischen Energie aufkommen, wie der Schwerpunkt der Atmosphäre sinken *kann*. Wenn, salopp ausgedrückt, die gesamte kalte Luft "unten" und die gesamte warme Luft "oben" ist, kann der Schwerpunkt *nicht* weiter sinken! Dann fehlt der Antrieb (der "Motor") für die AAZ, sie stirbt reibungsbedingt aus. Am Ende liegt natürlich *wieder* Stationarität vor, aber nicht mehr, weil sich Reibung und Schwerpunkts-Erniedrigung kompensieren, sondern weil *alle* Terme der Energiegleichungen (7-107), (7-108) verschwinden. Wenn man diese beiden Gleichungen zur Gesamtenergiegleichung $\rho de/dt = \nabla\cdot[\mathbb{T}\cdot\mathbf{v}] - \nabla\cdot\mathbf{W}$ addiert und die globale Mittelung

$$\overline{\nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{v})} = 0 \quad ; \quad \overline{\nabla\cdot\mathbf{W}} = 0$$

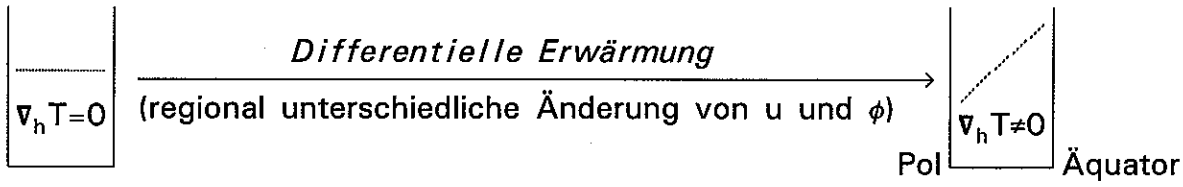
betrachtet, so ist überhaupt nicht mehr festzustellen, ob sich die Energie *deswegen* nicht mehr ändert, weil sich die Reibungsverluste der Kinetische Energie durch den Gewinn in der thermisch direkten Zirkulation kompensieren, oder ob die Energie *deswegen* konstant bleibt, weil *keine* Prozesse mehr stattfinden.

Nun ist bekannt, daß der Antrieb für die AAZ *der Sonne* zu verdanken ist. Dieser "Motor" der AAZ muß irgendwie dafür sorgen, daß der Schwerpunkt auch wieder angehoben wird, so daß direkte Zirkulationen *dauerhaft* möglich sind. In einer naiven Betrachtungsweise könnte man argumentieren, daß dies einfach dadurch geschieht, daß die Sonne die Atmosphäre erwärmt, und damit sowohl den u- als auch den ϕ- Anteil der Totalen Potentiellen Energie erhöht, etwa so, wie man sich in einer Art Kammermodell der Atmosphäre intuitiv veranschaulichen kann:



Die gepunktete Linie entspricht als Obergrenze der Atmosphäre z.B. einer sehr hochgelegenen Druckfläche (z.B. 1 hPa). - Man erkennt sofort, daß zwar die Totale Potentielle Energie $\pi = u+\phi$ angestiegen ist, daß sie jedoch *nicht* in Kinetische

Energie umgewandelt wird, weil der erwärmte Zustand keinen Anlaß zu einer Zirkulation gibt, d.h. zu einer Umwandlung der gewonnenen Totalen Potentiellen Energie in Kinetische Energie. Das Kammermodell hat den gravierenden Fehler, daß hier die Erwärmung horizontal-homogen erfolgt. Die Atmosphäre wird jedoch differentiell erwärmt, in z.B. äquatorialen Breiten wesentlich stärker als in mittleren, und in polaren Breiten sogar abgekühlt, weil auch die terrestrische Ausstrahlung berücksichtigt werden muß. Die global gemittelte Netto-Erwärmung verschwindet, wie wir gerade im Anschluß an Gleichung (7-108) diskutiert haben. Um die differentielle Erwärmung auch in einem Kammermodell zu berücksichtigen, müßte man das obige Bild folgendermaßen ändern:



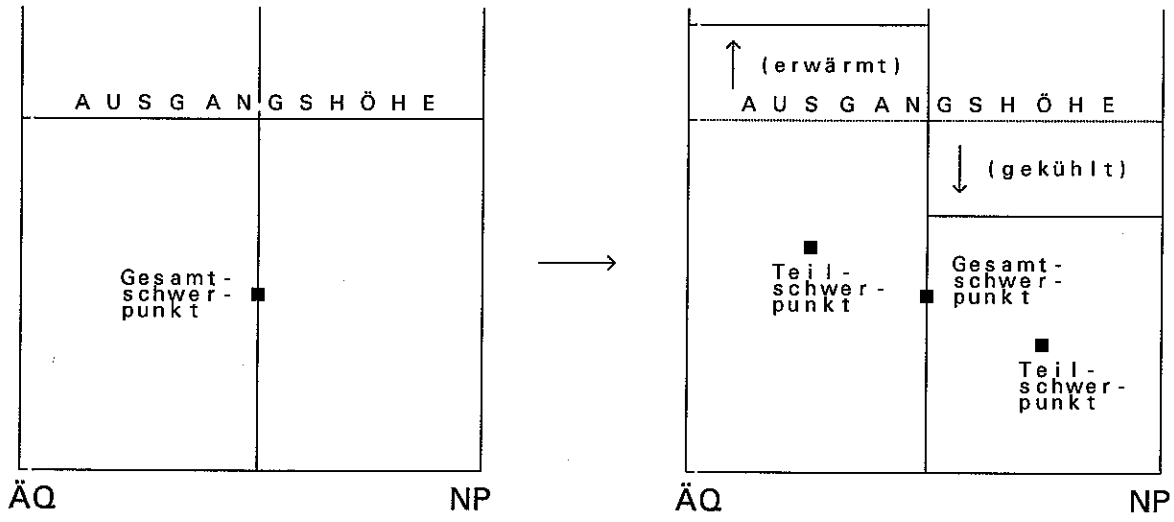
Der Höhengradient entsteht, weil sich bei Erwärmung nicht nur die Innere, sondern *auch* die Potentielle Energie ändert. Es ist unmittelbar anschaulich, daß der differentiell erwärmte Zustand instabil ist und eine Zirkulation auslöst, welche die horizontalen Gradienten von T und der Atmosphärenoberfläche (bzw. der 1 hPa-Fläche) abbaut. Dabei erniedrigt sich der Schwerpunkt solange, bis sich ein neuer horizontal-homogener Zustand eingestellt hat. Diesen nennt man Referenzzustand. Der differentiell erwärmte Zustand ist also dadurch gekennzeichnet, daß ein Anteil der Potentiellen Energie *verfügbar* ist zur Umwandlung in Kinetische Energie. Diesen Anteil nennt man Verfügbare Potentielle Energie, ("VPE"). Sie wird in Kap. 7.11 noch ausführlich erläutert werden.

Man kann auch sagen, daß die differentielle Erwärmung unterschiedliche Temperaturreservoire simuliert, zwischen denen eine atmosphärische Wärmekraftmaschine läuft. Die in Kap. 3.9 besprochenen "technischen" Wärmekraftmaschinen unterscheiden sich von der atmosphärischen nur dadurch, daß die Erwärmung nicht mehr zeitlich nacheinander erfolgt, sondern gleichzeitig an verschiedenen Orten (in verschiedenen Breiten), und daß sich die Arbeit nicht mehr in der Bewegung technischer Vorrichtungen wie Pleuelstangen oder Rädern zeigt, sondern in der Bewegung des differentiell erwärmten Mediums selbst. Die Arbeitsleistung besteht in der Überwindung der eigenen Reibungsverluste! Das *Grundprinzip* besteht jedoch immer darin, daß "dort" bzw. "dann" erwärmt wird, "wo" bzw. "wenn" das Medium sowieso schon überdurchschnittlich warm ist, und daß an kälteren Orten bzw. in kälteren Zeitphasen gekühlt wird! Genau das *definiert* die differentielle Erwärmung als "Generator von Gegensätzen". Diese Gegensätze repräsentieren einen Zustand höherer Ordnung, also niedrigerer Entropie.

7.11 VERFÜGBARE POTENTIELLE ENERGIE UND ATMOSPHÄRISCHER KREISPROZESS

Man kann den Unterschied zwischen den beiden Skizzen des Kapitels 7.10(c) dadurch charakterisieren, daß im Falle "homogener" Erwärmung zwar totale Potentielle Energie generiert wird, diese jedoch *nicht verfügbar* ist zur Umwandlung in kinetische Energie. Wir hatten diskutiert, daß die totale Potentielle Energie nur *solange* für den Reibungsverlust der kinetischen Energie aufkommen kann, wie der Zustand der Atmosphäre Möglichkeiten für Schwerpunktabsenkungen bietet. Die dort skizzierte differentielle Erwärmung schafft offenbar genau einen solchen Zustand. Die Möglichkeit zur Schwerpunkts-Absenkung ist identisch mit der Möglichkeit, daß sich ein Anteil der Totalen Potentiellen Energie in kinetische Energie der Strömung umwandeln kann. Diesen Anteil nennt man Verfügbare Potentielle Energie, abgekürzt VPE, (*englisch "Available Potential Energy" oder "APE"*).

Man könnte denken, daß die differentielle Erwärmung den Schwerpunkt des Systems erst einmal anhebt und *so* die Erzeugung von Verfügbarer Potentieller Energie realisiert. Das ist jedoch nicht der Fall. Um das *in der nächsten Skizze* zu veranschaulichen, modifizieren wir die "schräge" Oberfläche in der Skizze zur differentielle Erwärmung aus Kap. 7.10(c), und zwar durch folgende Modellvorstellung. Der nördliche und der südliche Bereich der Modellatmosphäre zwischen Nordpol (NP) und Äquator (ÄQ) seien zunächst durch eine "virtuelle" Trennwand voneinander isoliert. Die Ausgangs- Atmosphäre sei horizontal-homogen stabil geschichtet. Durch differentielle Erwärmung, also Abkühlung im Norden und Erwärmung im Süden, sollen die Teilschwerpunkte in beiden Kammern um den gleichen Betrag gesenkt bzw. angehoben werden. So ergibt sich ein meridionaler Höhengradient, der hier durch die Unstetigkeitsstelle an der virtuellen Trennwand realisiert wird:



Wir bezeichnen mit dem Symbol Π die gesamte im Zweikammersystem enthaltene Totale Potentielle Energie, also das *Massenintegral* $\iiint dm(\phi+u)$, welches wegen $dm = \rho d\tau$ mit dem *Volumenintegral* $\iiint d\tau(\rho\phi+\rho u)$ identisch ist:

$$\Pi = P + U$$

Dieses Integral ist ein Maß für die Schwerpunktshöhe des System. Wegen der Trennwand ist durch die differentielle Erwärmung die Masse in den beiden Teilkammern gleich geblieben. Daher hat sich auch nicht der Gesamtschwerpunkt gegenüber dem Ausgangszustand verändert, denn dieser ist der Halbierungspunkt der Verbindungsgeraden beider Teilschwerpunkte. Π ist durch die differentielle Erwärmung nicht geändert worden!

Wenn man nun die Trennwand entfernt, setzt eine Strömung ein und erzeugt den horizontal-homogen Referenzzustand, in dem offenbar der Schwerpunkt *tiefer* liegen muß als im ebenfalls horizontal-homogen Anfangszustand, so daß $\Pi_{ref} < \Pi$. Der Überschuß von Π gegenüber Π_{ref} ist gerade die Verfügbare Potentielle Energie, die wir mit dem Symbol "A" bezeichnen:

$$A = \Pi - \Pi_{ref} \quad ; \quad \Pi = P + U \tag{7-110}$$

Die Absenkung des Schwerpunktes ist deshalb möglich, weil sich durch die Strömung potentiell kältere Luft unter potentiell wärmere Luft schiebt und diese dabei anhebt. Oben fließt diese wärmere Luft hinüber zur kalten Säule, so daß sich insgesamt die Schichtung im Sinne von $d\theta/dz > 0$ stabilisiert. Gleichzeitig kommt es zur horizontalen Homogenisierung der Temperatur. Zum Erreichen der horizontal-homogenen Temperaturflächen der Referenzatmosphäre mußte also erwärmte Luft aufsteigen und gekühlte Luft sinken, wie in einer Hadley-Zirkulationszelle (→ Kap. 8.1(c)). In dieser thermisch direkten Strömung fällt natürlich der Schwerpunkt.

Wir bezeichnen den in der Skizze beschriebenen Vorgang der differentiellen Erwärmung der nichtströmenden Modellatmosphäre als "Phase I" eines Kreisprozesses. Der nach *Entfernung* der virtuellen Trennwand einsetzende Strömungsprozeß sei die "Phase II". In dieser Phase wird die in Phase I entstandene Verfügbare Potentielle Energie (7-110) aufgebraucht, und es entsteht eine horizontal-homogene, statisch stabile, aber *bewegte* Referenzatmosphäre, die folglich auch Kinetische Energie ("KE") enthält. Man kann den in Phase II erzeugten horizontal-homogenen Referenzzustand mit seiner verringerten Totalen Potentiellen Energie $\Pi \rightarrow \Pi_{ref}$ und der entstandenen KE allerdings nur dann eindeutig definieren, wenn die Strömung reibungsfrei verläuft, und wenn die differentielle Erwärmung in Phase II *nicht* mehr stattfindet. Diese Prozesse würden ja Π_{ref} wieder verändern! Der Referenzzustand

entsteht also *definitionsgemäß* aus dem differentiell erwärmten Zustand durch eine reversibel-adiabatische, also isentrope Strömung.

Zur Schließung eines vollständigen atmosphärischen Kreisprozesses fehlt noch eine "Phase III". In ihr muß die horizontal-homogene, statisch stabile und bewegte Referenzatmosphäre in die ebenfalls horizontal-homogene, statisch stabile, aber *unbewegte* Ausgangsatmosphäre überführt werden. Die in Phase III notwendige Rückverwandlung der Kinetischen Energie in Totale Potentielle Energie ("Dissipationsphase") geschieht dadurch, daß nun die in Phase II ausgeschaltete Reibung wieder eingeschaltet wird, bis die Strömung aufhört und die Reibungswärme den Schwerpunkt auf den alten Wert angehoben hat. - Mit der Abkürzung SP für Schwerpunkt und den genannten Abkürzungen für die Energiearten können wir das Geschehen während der drei Phasen des idealisierten atmosphärischen Kreisprozesses folgendermaßen zusammenfassen:

Phase / Vorgang		SP $\triangleq \Pi$	Π_{ref}	$A=\Pi-\Pi_{ref}$	KE
I	Differentielle Erwärmung	konstant	fällt	entsteht	0
II	Isentrope Ausgleichsströmung	fällt	konstant	verschwindet	entsteht
III	Dissipation der Strömung	steigt	steigt	0	verschwindet

In der tatsächlichen Atmosphäre finden alle drei Phasen des Kreisprozesses gleichzeitig statt. Wie bereits in Kap. 3.9 festgestellt, wird dadurch das Prinzip einer Wärmekraftmaschine *nicht* tangiert, da es nur darauf ankommt, *daß* differentiell erwärmt wird, und nicht darauf, wo und wann. Das Charakteristische bei der damit verbundenen Erzeugung von VPE ist *nicht* die Vergrößerung von Π, sondern die *Verkleinerung* von Π_{ref}.

Der Grad der differentiellen Erwärmung eines Augenblickszustandes der Atmosphäre entspricht letztendlich seiner Baroklinität, und die zugehörige VPE entspricht dem in dieser Situation *maximal möglichen* Schwerpunkts- Absenkung, d.h. dem maximal möglichen Gewinn an KE, der durch Homogenisierung und/oder Stabilisierung der aktuellen Schichtung erreicht werden kann. Synoptische Fallstudien haben ergeben, daß die atmosphärische KE im Durchschnitt etwa ein Zehntel der VPE beträgt. - Die in der Atmosphäre *jederzeit* stattfindende differentielle Erwärmung sorgt also dafür, daß das globale Mittel über $g\rho v_z$ *ständig* negativ sein kann, und somit die ebenfalls *ständigen* Reibungsverluste kompensieren kann.

7.12 DIE BILANZGLEICHUNGEN DER VERFÜGBAREN POTENTIELLE ENERGIE

7.12(a) Kinetische und Totale Potentielle Energie

Wir berechnen zunächst den integralen Gehalt der genannten Energiearten in atmosphärischen "Einheitssäulen", d.h. in Säulen mit der Querschnittsfläche 1 m^2. Sei K_S, P_S, I_S die über eine vertikale Säule integrierte Kinetische, Potentielle bzw. Innere Energie:

$$K_S = \int_{\text{Säule}} dm\ \mathbf{v}^2/2, \quad P_S = \int_{\text{Säule}} dm\ \phi = \int_{\text{Säule}} dm\ gz, \quad U_S = \int_{\text{Säule}} dm\ u$$

Bei der Integration über die jeweiligen spezifischen Energien einer Säule der Querschnittsfläche F kann man als Massenelemente $dm = \rho d\tau$ horizontale "Scheiben" der der Höhe dz verwenden, also $dm = \rho F dz$. Für die Einheitssäule ist jedoch die Querschnittsfläche F=1, so daß $dm = \rho dz$. Das ergibt die Höhenintegration

$$(7\text{-}111) \quad K_S = \int_{\text{Säule}} dz\ \rho\ \mathbf{v}^2/2, \quad P_S = \int_{\text{Säule}} dz\ \rho\ gz, \quad U_S = \int_{\text{Säule}} dz\ \rho u$$

Die Integration verläuft von z=0 bis zur Obergrenze der Atmosphäre, die jedoch nicht durch ein endliches z eindeutig festgelegt werden kann. Wegen der im großräumigen Scale gültigen hydrostatischen Approximation gilt $dz = -dp/g\rho$, und man kann bei der Integration die z-Koordinate durch den Druck ersetzen (p-System, → Kap. 4.3)). Dabei ist vom Bodendruck $p=p_o$ bis p=0 zu integrieren. Offenbar hebt sich die Dichte heraus, und es gilt

$$(7\text{-}112) \quad K_S = \int_0^\infty \frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho dz = \int_{p_o}^{0} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\left(-\frac{dp}{g}\right) = \frac{1}{g}\int_0^{p_o} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\, dp$$

$$P_S = \int_0^\infty gz\ \rho dz = \int_0^{p_o} z\ dp$$

$$(7\text{-}113) \quad U_S = \int_0^\infty u\ \rho dz = \frac{1}{g}\int_0^{p_o} u\ dp = \frac{c_v}{g}\int_0^{p_o} T\ dp$$

Die Formel für P_S wird durch eine partielle Integration umgeformt. $zdp = d(zp) - zdu$ ergibt

$$P_S = \int_0^{p_o} z\ dp = zp\Big|_0^{p_o} - \int_\infty^0 p\ dz = R\int_0^\infty \rho T\ dz$$

denn das Produkt zp verschwindet sowohl an der unteren als an der oberen Integrationsgrenze (einmal ist z = 0, einmal ist p = 0). Im Endergebnis kann wieder $\rho dz = -dp/g$ gesetzt werden. Damit erhält man

$$(7\text{-}114) \qquad P_S = \frac{R}{g} \int_0^{p_o} T \, dp$$

Offenbar ist der Quotient $P_S/U_S = R/c_\upsilon = 0.4$ konstant, d.h. die Erhöhung der Inneren Energie durch Erwärmung hebt den Schwerpunkt (unter den angenommenen hydrostatischen Bedingungen) stets so, daß die Potentielle Energie immer 40 % der Inneren Energie beträgt. - Die Totale Potentielle Energie $\Pi_S = P_S + U_S$ in der Einheitssäule ist wegen $R = c_p - c_\upsilon$ gegeben durch die vertikalintegrierte Enthalpie:

$$\Pi_S = \frac{c_p}{g} \int_0^{p_o} T \, dp = \int_0^{p_o} h \, \frac{dp}{g}$$

Alternativ läßt sich Π_S auch durch das Quadrat der Laplace'schen Schallgeschwindigkeit $c^2 = \kappa RT = (c_p/c_\upsilon)RT$ ausdrücken:

$$\Pi_S = (c_\upsilon/R) \int_0^{p_o} c^2 \, \frac{dp}{g}$$

Das führt wegen $c_\upsilon/R \approx 2.5$, $c \approx 300 \text{ ms}^{-1}$, $|\mathbf{v}| \approx 10 \text{ ms}^{-1}$ zu einem unmittelbaren Vergleich mit der Größenordnung der Kinetischen Energie:

$$\Pi_S \approx 2.5 \int_0^{p_o} c^2 \, \frac{dp}{g} \approx 5 \cdot 10^3 \int_0^{p_o} \frac{\mathbf{v}^2}{2} \, \frac{dp}{g} = 5 \cdot 10^3 \, K_S$$

Eine dritte Alternative besteht darin, Π_S als Vertikalintegral über die Potentielle Temperatur auszudrücken:

$$\Pi_S = \frac{c_p}{g} \int_0^{p_o} T \, dp = \frac{c_p}{g} \int_0^{p_o} dp \; \theta \left(\frac{p}{p_{oo}} \right)^k$$

$$(7\text{-}115) \qquad \Pi_S = \frac{c_p}{g \, p_{oo}{}^k} \int_0^{p_o} dp \; p^k \, \theta$$

Nun sollen die Kinetische Energie K und die Totale Potentielle Energie Π für die gesamten Atmosphäre betrachtet werden. Dazu muß man offenbar alle Einheitssäulen der Atmosphäre aufsummieren, d.h. man muß ein globales Flächenintegral über die Größen K_S und Π_S bilden:

$$K = \iint dF \; K_S \quad \text{und} \quad \Pi = \iint dF \; \Pi_S .$$

Mit der Formel für ein globales Flächenmittel

$$(7\text{-}116) \qquad \bar{\bar{\alpha}} = (1/F) \iint dF \; \alpha \quad \longleftrightarrow \quad \iint dF \; \alpha = F \, \bar{\bar{\alpha}} \quad ; \quad \alpha = \bar{\bar{\alpha}} + \alpha'$$

kann man offenbar Flächenintegrationen ausdrücken durch Flächenmultiplikationen mit den gemittelten Größen. Setzt man $\alpha = K_S, \Pi_S$, so ist zu beachten, daß die Säulenenergien *selbst schon Integrale* sind:

$$(7\text{-}117) \qquad K = F\,\overline{\overline{K_S}} = \frac{1}{g} \iint dF \int_0^{p_o} dp\, \frac{\mathbf{v}^2}{2}$$

$$(7\text{-}118) \qquad \Pi = F\,\overline{\overline{\Pi_S}} = \frac{c_p}{g\, p_{oo}{}^k} \iint dF \int_0^{p_o} dp\, p^k\, \theta$$

Könnte man die Flächen- und die Höhenintegration miteinander vertauschen, so könnte man K und Π durch Flächenmittelwerte über die Integranden ausdrücken. Die Integration $\iint dF$ ist allerdings eine Integration über alle Längen und Breiten, von denen die Integrationsgrenze p_o natürlich abhängt. Daher ist die Flächenintegration streng genommen *nicht* mit der Höhenintegration vertauschbar. Ersetzt man allerdings approximativ p_o durch $\overline{\overline{p_o}}$, so ist die Integrationsgrenze unabhängig von der Flächenintegration, und man darf doch vertauschen:

$$(7\text{-}119) \qquad K = \frac{1}{g} \int_0^{\overline{\overline{p_o}}} dp \iint dF\, \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \frac{F}{g} \int_0^{\overline{\overline{p_o}}} dp\, \overline{\overline{\frac{\mathbf{v}^2}{2}}}$$

$$(7\text{-}120) \qquad \Pi = \frac{c_p}{g\, p_{oo}{}^k} \int_0^{\overline{\overline{p_o}}} dp \iint dF\, p^k\, \theta = \frac{c_p F}{g\, p_{oo}{}^k} \int_0^{\overline{\overline{p_o}}} dp\, \overline{\overline{p^k\, \theta}}$$

Lorenz (1955) hat für Π eine alternative Formel hergeleitet, indem er vor der Vertauschung der Integrationen eine partielle Integration durchführte. Zunächst gilt wegen $dp^{k+1} = dp\, p^k\, (k+1)$:

$$\Pi = \iint dF\, \frac{c_p}{g\, p_{oo}{}^k} \int_0^{p_o} dp\, p^k\, \theta = \iint dF\, \frac{c_p}{g\, p_{oo}{}^k (k+1)} \int_0^{p_o} dp^{k+1}\, \theta$$

Die partielle Integration nach der Regel $\int du\, v = uv - \int u\, dv$ ergibt dann:

$$\Pi = \iint dF\, \frac{c_p}{g\, p_{oo}{}^k (k+1)} \left[p^{k+1}\, \theta \Big|_0^{p_o} - \int_\infty^{\theta_o} p^{k+1}\, d\theta \right]$$

Durch die partielle Integration ist die Vertikalintegration im p-System in eine Vertikalintegration im θ-System übergegangen. Will man wieder Flächen- und Höhenintegration miteinander vertauschen, so muß man *Druckmittelwerte auf θ-Flächen* bilden. Somit entsteht ein Problem, wenn eine θ-Fläche den Erdboden schneidet, wenn also $\theta < \theta_o$. Nach der "Lorenz-Konvention" muß man dann das Druckfeld folgendermaßen ergänzen:

$$p(\theta) = p_o\,, \quad \text{falls } \theta < \theta_o$$

Begründung: $p(\theta)$ errechnet sich aus der über θ liegenden Luft:

$$p(\theta) = -\int_{\theta}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial \theta'}\, d\theta' = -\int_{0}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial \theta'}\, d\theta'$$

denn die Höhen $\theta < \theta_o$ liefern keine Druckbeiträge, hier ist $p(\theta) = p(\theta_o) = \text{const}$:

$$-\int_{0}^{\theta_o} \frac{\partial p}{\partial \theta'}\, d\theta' = -\int_{0}^{\theta_o} \frac{\partial p_o}{\partial \theta}\, d\theta = 0$$

Ebenso darf in $\int p^{k+1}\, d\theta$ die Integrationsgrenze θ_o durch 0 ersetzt werden:

$$\Pi = \iint dF \frac{c_p}{g\, p_{oo}{}^k (k+1)} \left[p^{k+1}\, \theta \Big|_{p\to 0, \theta\to\infty}^{p=p_o, \theta=0} + \int_{0}^{\infty} p^{k+1}\, d\theta \right]$$

Ferner gilt $p^{k+1}\ \theta \to 0$ falls $p \to 0$ und $\theta \to \infty$. - Beweis: $\theta = T\, p_{oo}{}^k / p^k$, also $p^{k+1}\, \theta = p\, T\, p_{oo}{}^k \to 0$ q.e.d. Damit verschwindet der ausintegrierte Anteil! Mit der Lorenzkonvention ist außerdem die vertikale Integrationsgrenze von der Länge und der Breite unabhängig geworden, so daß die Flächen- und Höhenintegration im θ-System vertauschbar sind: $\iint dF \int d\theta = \int d\theta \iint dF$. Das ergibt

$$\Pi = \iint dF \frac{c_p}{g\, p_{oo}{}^k (k+1)} \int_{0}^{\infty} p^{k+1}\, d\theta = \frac{c_p}{g\, p_{oo}{}^k (k+1)} \int_{0}^{\infty} d\theta \iint dF\, p^{k+1}$$

also wegen $\iint dF\, \alpha = F\, \overline{\overline{\alpha}}$:

$$(7\text{-}121) \quad \Pi = \frac{F c_p}{g\, p_{oo}{}^k (k+1)} \int_{0}^{\infty} d\theta\, \overline{\overline{p^{k+1}}}$$

7.12(b) Referenz-Atmosphäre und Verfügbare Potentielle Energie

Die Verfügbare Potentielle Energie $A = \Pi - \Pi_{ref}$ soll nun explizit berechnet werden. Es soll also einerseits nach (7-121) das Integral $\int d\theta\, \overline{\overline{p^{k+1}}}$ gebildet werden. Dazu muß das Druckfeld in jedem durch die Koordinaten (λ, φ, p) gegebenen Punkt bekannt sein. Andererseits muß das gleiche Integral gebildet werden, nachdem sich das Temperaturfeld in einer isentropen Ausgleichsströmung horizontal homogenisiert hat. Hierbei ist $d\theta/dt = 0$, d.h. bei der Umlagerung sind die θ-Flächen *materielle Flächen*, und die Gesamtmasse oberhalb einer beliebigen θ-Fläche ändert sich nicht. Daher ändert sich auch nicht der mittlere Druck auf einer θ-Fläche, er ist im aktuellen Zustand und im Referenzzustand gleich:

$$p_{ref} = \frac{1}{F} \iint_{F(\theta)} dF\, p(\theta) = \overline{\overline{p}} = \text{const}$$

Die Strömung erfolgt also *in den θ-Flächen*, und gleichzeitig *verändert* sie diese zu horizontal-homogenen Flächen:

$$\theta(\lambda,\varphi,z,t) \longrightarrow \theta(z,t)$$

Zur Berechnung von Π_{ref} muß also das Integral $\int d\theta\, \overline{\overline{p^{k+1}}}$ mit $p_{ref} = \overline{\overline{p}}$ gebildet werden. Das ergibt sich für $A = \Pi - \Pi_{ref}$:

$$(7\text{-}122) \quad A = \frac{F c_p}{g\, p_{oo}{}^k (k+1)} \int_0^\infty d\theta \left[\overline{\overline{p^{k+1}}} - \overline{\overline{p}}^{\,k+1} \right]$$

Um zu beweisen, daß $A > 0$ ist, formt man mit Hilfe von $p = \overline{\overline{p}} + p''$ folgendermaßen um:

$$p^{k+1} = \overline{\overline{p}}^{\,k+1} \left(\frac{p}{\overline{\overline{p}}} \right)^{k+1} = \overline{\overline{p}}^{\,k+1} \left(1 + \frac{p''}{\overline{\overline{p}}} \right)^{k+1}$$

Die bekannte Reihenentwicklung $(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\epsilon^3 + \ldots$ ergibt mit $\epsilon = p''/\overline{\overline{p}}$

$$p^{k+1} = \overline{\overline{p}}^{\,k+1} \left[1 + (k+1)\frac{p''}{\overline{\overline{p}}} + \frac{(k+1)k}{2!} \left(\frac{p''}{\overline{\overline{p}}} \right)^2 + \frac{(k+1)k(k-1)}{3!} \left(\frac{p''}{\overline{\overline{p}}} \right)^3 + \ldots \right]$$

Eine Mittelung unter Verwendung von $\overline{\overline{p''}} = 0$, sowie unter Vernachlässigung der kubischen und höheren Terme ergibt

$$\overline{\overline{p^{k+1}}} \approx \overline{\overline{p}}^{\,k+1} + \overline{\overline{p}}^{\,k-1} \frac{(k+1)k}{2} \overline{\overline{p''^2}}$$

Verwendet man dies in (7-122), so folgt mit $\kappa c_p = R$:

$$(7\text{-}123) \quad A = \frac{F\,R}{2g\, p_{oo}{}^k} \int_0^\infty d\theta\, \overline{\overline{p}}^{\,k-1}\, \overline{\overline{p''^2}} \qquad \text{oder auch}$$

$$= \frac{R}{2g\, p_{oo}{}^k} \int_0^\infty d\theta \iint dF\, p^{k-1}\, p''^2 \quad > \quad 0$$

Maßgeblich für die VPE sind also Druckschwankungen auf θ-Flächen. Diese entstehen durch differentielle Erwärmung: Die θ-Flächen liegen am Äquator niedriger als am Pol, denn eine bestimmte Troposphärische Druckfläche ist in Äquatornähe "wärmer" als in Polnähe. Die Neigung der Druckflächen relativ zu den θ-Flächen kann auch in eine Neigung der T-Flächen relativ zu den Druckflächen umgerechnet werden: Lorenz (1955) hat die in (7-123) enthaltene Vertikalintegration über θ ins p-System zurücktransformiert. Das Ergebnis dieser Rechnung lautet:

$$(7\text{-}124) \quad A = \frac{1}{g} \iint dF \int_0^{p_o} dp\, \frac{\Gamma}{2} T''^2 = \frac{F}{g} \int_0^{\overline{\overline{p}}_o} dp\, \frac{\Gamma}{2} \overline{\overline{T''^2}} = \iiint_{Atm} dm\, \frac{\Gamma}{2} T''^2$$

mit dem Maß Γ für die statische Stabilität

$$(7\text{-}125) \qquad \Gamma = \frac{g}{\overline{\overline{T}}(\gamma_i - \overline{\overline{\gamma}}_g)} = -\frac{R}{p\left[\frac{\partial \overline{\overline{T}}}{\partial p} - k\frac{\overline{\overline{T}}}{p}\right]}$$

Man kann also die durch differentielle Erwärmung zustandegekommene Baroklinität auch durch Schwankungen T" auf Druckflächen ausdrücken, und somit A durch Aufsummierung aller quadratischen Temperaturschwankungen auf p-Flächen gewinnen. Formel (7-124) ist mit (7-119)/(7-117) zu vergleichen. Das führt auf

$$(7\text{-}126) \qquad K = \frac{1}{g}\iint dF \int_0^{p_0} dp\, \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \frac{F}{g}\int_0^{\overline{\overline{p}}_0} dp\, \frac{\overline{\overline{\mathbf{v}^2}}}{2} = \iiint_{Atm} dm\, \frac{\mathbf{v}^2}{2}$$

7.12(c) Die Bilanzgleichungen

Lorenz (1955) hat auch die *Bilanzgleichungen* für K und A hergeleitet. Dabei wurde z.B. die Kinetische Energie der Vertikalbewegung vernachlässigt. Die Details der Herleitung, die enthaltenen weiteren Approximationen, sowie auch die Herleitung von (7-124) aus (7-123) findet man z.B. in v. Mieghem (1973) oder Lange (1976). Mit den Symbolen $\mathbf{r}_h$ für die horizontale Reibungsbeschleunigung und Q für die Wärmezufuhr erhält man

$$(7\text{-}127) \qquad \frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{F}{g}\int_0^{\overline{\overline{p}}_0} dp\, \overline{\overline{\omega\upsilon}} + \frac{F}{g}\int_0^{\overline{\overline{p}}_0} dp\, \overline{\overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}} = \iiint_{Atm} dm\, \omega\upsilon + \iiint_{Atm} dm\, \mathbf{v}_h\cdot\mathbf{r}_h$$

$$(7\text{-}128) \qquad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{F}{g}\int_0^{\overline{\overline{p}}_0} dp\, \overline{\overline{\omega\upsilon}} + \frac{F}{g}\int_0^{\overline{\overline{p}}_0} dp\, \frac{\Gamma}{c_p}\,\overline{\overline{QT}} = \iiint_{Atm} dm\, \omega\upsilon + \iiint_{Atm} dm\, \frac{\Gamma}{c_p}\, QT$$

Auf den Flächen p=const gilt $\overline{\overline{\omega\upsilon}} = (R/p)\,\overline{\overline{\omega T}}$. Unter den Voraussetzungen $\overline{\overline{\omega}} = 0$, $\overline{\overline{Q}} = 0$, also auch $\omega = \omega''$ und $Q = Q''$, gilt wegen $\overline{\overline{\omega''T}} = \overline{\overline{\omega''T''}}$ und $\overline{\overline{Q''T}} = \overline{\overline{Q''T''}}$ außerdem

$$\overline{\overline{\omega\upsilon}} = (R/p)\,\overline{\overline{\omega T}} = (R/p)\,\overline{\overline{\omega''T''}} \qquad \text{und}$$

$$(\Gamma/c_p)\,\overline{\overline{QT}} = (\Gamma/c_p)\,\overline{\overline{Q''T''}}$$

Dies kann in die obigen Formeln eingesetzt werden. - Zum Verständnis der Struktur dieser Formeln sei noch einmal daran erinnert, daß wegen $dp/g = -\rho dz$ die Kombination einer Säulen-Höhenintegrationen mit der Flächenintegration (bzw. Flächenmittelung) eine Massenintegration mit dem Massenelement $dm = -\rho\, dz\, dF$ ergibt. Die Bewegung

eines beliebigen Luftteilchens der Größe "eine Masseneinheit" ergibt nach (7-126) den Beitrag $k = \mathbf{v}^2/2$ zur gesamten KE der Atmosphäre. Die kinetische Energie ist also eine lokal definierte Größe. Das gilt nicht für die Verfügbare Potentielle Energie: Man erhält *nicht* den Beitrag $a = (\Gamma/2)T''^2$ zur gesamten VPE der Atmosphäre *allein* aus der Temperatur dieses Luftteilchens, denn man benötigt die *Differenz* dieser Temperatur zur flächengemittelten Temperatur, d.h. den globalen Zustand der Atmosphäre. Das gilt auch für alle Terme der rechten Seiten der Bilanzgleichungen, welche die Größe T" enthalten. Dennoch stellen wir zur Vereinfachung der Diskussion und zur Gewinnung eines Anschlusses an die massenspezifischen Formen der Energiegleichungen in den Kapiteln 2.2(g) und 6.3 die bisher entwickelte VPE - Energetik in der Form von Bilanzgleichungen für die Beiträge zu den obigen Massenintegralen vor (→ z.B. v. Mieghem (1973), Lange (1976)):

(7-129)
$$\frac{\partial k}{\partial t} = -c - d \qquad \frac{\partial a}{\partial t} = c + g$$

$$\xrightarrow[g]{} \boxed{a} \xrightarrow[c]{} \boxed{k} \xrightarrow[d]{}$$

(7-130a) $k = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2$ Kinetische Energie KE

(7-130b) $a = \frac{\Gamma}{2}T''^2$ Verfügbare Potentielle Energie VPE

(7-130c) $c = -\frac{R}{p}\omega''T''$ Umwandlung ("conversion") zwischen VPE und KE

(7-130d) $g = \frac{\Gamma}{c_p}Q''T''$ Erzeugung ("generation") von VPE

(7-130e) $d = \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}$ Dissipation von KE

In diesen Gleichungen erkennen wir die in Kap. 3.10 diskutierten Mechanismen der atmosphärischen Energetik wieder, wie wir nun schrittweise zeigen. Um den Grad der horizontal - differentiellen Erwärmung (als Grad der Baroklinität) zu quantifizieren, müssen negative und positive Temperaturabweichungen T" vom Flächenmittel gleichermaßen eingehen, was durch das Quadrat von T" in (7-130b) erfolgt ist.

Die Tatsache, daß sich VPE auch in einer Abweichung von der maximal möglichen Stabilität verbirgt, also in einem vertikal-differentiell erwärmten Zustand, wird durch den reziproken Stabilitätsfaktor Γ berücksichtigt. Die entsprechenden differentiellen Erwärmungen selbst, die zur Erzeugung von VPE führen, sind in (7-130d) durch das Produkt Q"T" gekennzeichnet. Dieses ist positiv, wenn eine Erwärmung $Q'' > 0$ als Nettoeffekt kurzwelliger Einstrahlung und langwelliger Ausstrahlung mit einer positiven Temperaturabweichung $T'' > 0$ zusammenfällt, oder eine Abkühlung $Q'' < 0$ in kühler Luft ($T'' < 0$) geschieht.

In (7-130c) finden wir den ausführlich diskutierten Mechanismus des Absinkens kalter Luft und des Aufsteigens warmer Luft wieder. In beiden Fällen wird die erzeugte VPE in KE verwandelt, da das Produkt $\omega''T'' < 0$ ist.

Schließlich beschreibt (7-130e) die in Kap. 7.11 als "Phase III" beschriebene Verringerung der KE. Der Term d verändert nur die KE k, nicht die VPE a, denn durch d nehmen die Totale Potentielle Energie des aktuellen Zustandes und des Referenzzustandes gleichermaßen zu.

7.12(d) Die großturbulente Aufspaltung der Bilanzgleichungen

Die im Gleichungssystem (7-129) mit (7-130) verwendeten Abweichungen $T'' = T - \overline{\overline{T}}$ der lokalen Werte vom Flächenmittel unterscheiden nicht zwischen den breitenabhängigen Schwankungen, die durch die meridional-differentielle Erwärmung zustandekommen, und den Temperaturunterschieden in den Keilen und Trögen der planetaren Rossbywellen, die längenabhängig sind und durch barokline Instabilität unterstützt werden. Um diese Effekte voneinander zu trennen, führte Lorenz (1955) mittels einer der Flächenmittelung (7-116), $\overline{\overline{\alpha}} = (1/F) \iint dF\, \alpha$ vorausgehenden zonalen Mittelung

(7-131) $\overline{\alpha} = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} d\lambda\, \alpha \quad ; \quad \alpha = \overline{\alpha} + \alpha'$

einen "zonalen" und einen "großturbulenten" Scale ein (Indizes z bzw. E). Für die Aufspaltung von $k = \mathbf{v}^2/2$ folgt mit $\mathbf{v}^2 = (\overline{\mathbf{v}}+\mathbf{v}')^2 = \overline{\mathbf{v}}^2 + \mathbf{v}'^2 + 2\,\overline{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}'$:

$$\overline{\overline{k}} = \overline{\overline{\mathbf{v}^2/2}} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{v}}^2}}/2 + \overline{\overline{\mathbf{v}'^2}}/2 = \overline{\overline{k_Z}} + \overline{\overline{k_E}}$$

So wie sich die Kinetische Energie $k = \mathbf{v}^2/2$ quadratisch aus $\mathbf{v}$ errechnet, so errechnet sich die Verfügbare Potentielle Energie $a = \Gamma T''^2/2$ quadratisch aus T''. Analog zu $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$ ist also zunächst die Aufspaltung

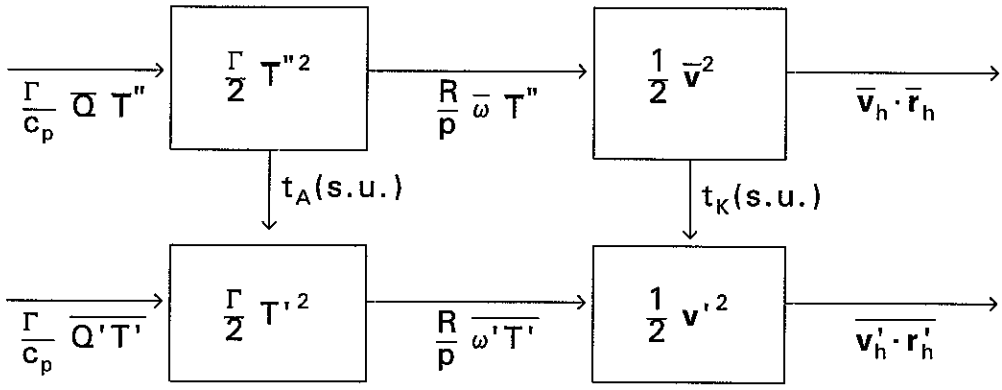
$$T'' = \overline{T''} + (T'')' = T'' + T'$$

vorzunehmen. Das zweite Gleichheitszeichen folgt aus $\overline{T''} = \overline{T - \overline{\overline{T}}} = \overline{T} - \overline{\overline{T}} = \overline{T} - \overline{\overline{T}} = T''$ und aus $(T'')' = (T - \overline{\overline{T}})' = T'$. Das ergibt die folgende Aufspaltung von a:

$$\overline{\overline{a}} = \Gamma/2\, \overline{\overline{T''^2}} = \Gamma/2\, \overline{\overline{T''^2/2}} + \Gamma/2\, \overline{\overline{T'^2/2}} = \overline{\overline{a_Z}} + \overline{\overline{a_E}}$$

Wieder ergeben die mit F multiplizierten Säulenintegrale dieser Größen die entsprechenden Massenintegrale: $F \int \overline{\overline{\alpha}}\, dp/g = -F \int \overline{\overline{\alpha}}\, \rho dz = \iiint_{Atm} dm\, \overline{\overline{\alpha}}$, $a = k_Z, k_E, a_Z, a_E$.
Auch für diese vier Größen hat Lorenz (1955) Bilanzgleichungen angegeben. Die

umfangreichen Herleitungen sind in allen Details in Lange (1976) nachzulesen. Das Ergebnis lautet, in einem Energiefluß - Diagramm zusammengefaßt:



Alle Angaben in diesem Diagramm beziehen sich auf die Beiträge der Masseneinheit zu den globalen Integralen. Das zugundeliegende Gleichungssystem lautet:

$$\text{(7-132)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial k_Z}{\partial t} &= c_Z + t_K - d_Z \\ \frac{\partial k_E}{\partial t} &= c_E - t_K - d_E \\ \frac{\partial a_Z}{\partial t} &= -c_Z - t_A + g_Z \\ \frac{\partial a_E}{\partial t} &= -c_E + t_A + g_E \end{aligned}$$

mit

(7-133a,b) $\quad k_Z = \frac{1}{2}\,\overline{v}^2 \qquad k_E = \frac{1}{2}\,v'^2$

(7-133c,d) $\quad a_Z = \frac{\Gamma}{2}\,T''^2 \qquad a_E = \frac{\Gamma}{2}\,T'^2$

(7-133e,f) $\quad c_Z = -\frac{R}{p}\,\overline{\omega}\,T'' \qquad c_E = -\frac{R}{p}\,\omega'T'$

(7-133g,h) $\quad g_Z = \frac{\Gamma}{c_p}\,\overline{Q}\,T'' \qquad g_E = \frac{\Gamma}{c_p}\,Q'T'$

(7-133i,j) $\quad d_Z = \overline{v}_h\cdot\overline{r}_h \qquad d_E = v_h'\cdot r_h'$

(7-134a) $$t_A = -\,\Gamma T'v_y'\,\frac{\partial T''}{\partial y} - \Gamma T'\omega'\left[\frac{\partial T''}{\partial p} - \frac{R}{pc_p}\,T''\right]$$

(7-134b) $$t_K = -\,v_x'v_y'\left[\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} + \frac{\tan\varphi}{r}\,\overline{v}_x\right] - v_x'\omega'\,\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial p}$$

7.13 ZUR KLIMATOLOGIE DES LORENZ'SCHEN ENERGIEZYKLUS

Die Diskussion dieser Gleichungen erfolgt mit Ausnahme der Transferterme t_A und t_K in Analogie zur Diskussion des Systems (7-129) mit (7-130).

1) *Die Kinetischen Energien* (k_Z,k_E)

k_Z beschreibt die Kinetische Energie des zonalen Grundstromes, k_E enthält die Kinetische Energie, die in den Abweichungen des großräumigen Windes vom zonalen Mittel enthalten ist, d.h. insbesondere in den rotierenden Strömungen der Tief- und Hochdruckgebiete. Die synoptischen Wirbel und alle sonstigen Abweichungen vom zonalen Windmittel werden auch als Großraumturbulenz bezeichnet. Der Index "E" soll an das englische Wort "eddy" für "Wirbel" erinnern. Wegen $\mathbf{v}^2 = \overline{\mathbf{v}}^2 + \mathbf{v}'^2 + 2\,\overline{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}'$ gilt $k \neq k_Z + k_E$. Bereits nach einer Zonalmittelung ist jedoch k durch die Summe aus k_Z und k_E gegeben.

2) *Die Verfügbare Potentielle Energie und ihre Erzeugung* (a_Z,a_E,g_Z,g_E)

Wegen $T'' = \overline{T''}$ beschreibt a_Z die "zonale VPE", die durch das Quadrat der zonalgemittelten Temperaturschwankungen (als Abweichungen vom Flächenmittel) gegeben ist. In a_Z verbirgt sich also die VPE, die durch meridional-differentielle Erwärmung entstanden ist. Genau diese Erzeugung von zonaler VPE wird offenbar durch den Term g_Z beschrieben. Der Term g_E dagegen beschreibt eine zonal-differentielle Erwärmung, z.B. durch ein Überwiegen von Kondensationswärme in den wärmeren Gebieten einer planetaren Welle. g_E ist allerdings in der Summe über die ganze Atmosphäre wesentlich kleiner als der Term g_Z. Klimatologisch gilt $g_E \ll g_Z$! Der großturbulente Anteil a_E der VPE ist darauf zurückzuführen, daß auch in Zonalrichtung Baroklinität vorliegt, was durch die quadrierten Temperaturschwankungen T' auf Breitenkreisen ausgedrückt wird. Auch für die VPE gilt $a \neq a_Z + a_E$, aber $\overline{a} = \overline{a}_Z + \overline{a}_E$.

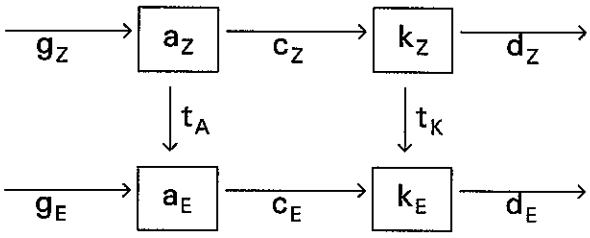
3) *Die Energie-Umwandlungen* (c_Z und c_E)

Die Umwandlung zwischen der KE und der VPE wird im zonalen Scale durch c_Z beschrieben, also durch das Produkt der zonalgemittelten Vertikalgeschwindigkeiten und Temperaturschwankungen. Das in Kap. 7.11 diskutierte Absinken von relativ kalter Luft und das Aufsteigen von relativ warmer Luft wird hier *im zonalen Mittel* beschrieben, d.h. $-\overline{\omega}$ und T'' sind entweder beide negativ oder beide positiv, so daß $c_Z > 0$ gilt und a_Z in k_Z umgewandelt werden kann. Das gilt allerdings nur für die Hadleyzellen am Äquator und an den Polen. Die dazwischenliegenden Ferrelzellen auf beiden Hemisphären sind *keine* thermisch direkten Zirkulationen. Hier wird im zonalen Mittel kalte Luft gehoben und warme abgesenkt, so daß ein Beitrag zu eine Schwer-

punktsanhebung und zu $c_Z < 0$ geleistet wird. In der Summe aller zonalgemittelten Zirkulationszellen ergibt sich ein $c_Z > 0$, welches allerdings vom Betrag her wesentlich geringer ist als das Gesamtintegral über $c_E > 0$. Klimatologisch gilt $c_Z \ll c_E$! Die großturbulente Umwandlung c_E von a_E in k_E geschieht hauptsächlich an den Warmfronten, wo warme Luft im Sinne von $T'>0$ gehoben wird ($-\omega'>0$), und an den Kaltfronten, wo kalte Luft $T'<0$ absinkt ($-\omega'<0$).

4) *Die Dissipation der Kinetischen Energien* (d_Z,d_E)

Die oben aufgestellten Behauptungen $g_Z \gg g_E$ in 2) und $c_E \gg c_Z$ in 3) (im klimatologischen Mittel) sind durch datenorientierte klimatologische Studien wie z.B. Dutton und Johnson (1967) belegt. Für g_Z und c_E werden meist Werte von mehr als 5 Watt pro m^2 angegeben, für g_E und c_Z dagegen wesentlich weniger als 1 W/m^2. Die gleichen Studien ergeben für die Dissipation die Beziehung $d_E \gg d_Z$, wiederum mit den gleichen Größenordnungen. Die VPE wird also hauptsächlich durch eine differentielle Erwärmung im zonalen Scale erzeugt, ihre Umwandlung in KE und die anschließende Dissipation geschehen jedoch hauptsächlich im großturbulenten Scale. Erzeugungen sind in der zonalen Skala wirksamer als in der großturbulenten Skala, bei den Umwandlungen und Dissipationen ist es umgekehrt. Im Energieflußdiagramm



muß folglich auch $t_A \gg t_K$ sein! Die klimatologische *"Hauptflußrichtung"* im Lorenz'schen Energiezyklus ist also $g_Z \rightarrow t_A \rightarrow c_E \rightarrow d_E$. Insbesondere ist die durch den Transfer t_A beschriebene Barokline Instabilität energetisch wesentlich wirksamer als die durch t_K beschriebene Barotrope Instabilität (s.u., Punkt 5) und 6)).

5) *Der Transfer der Verfügbaren Potentiellen Energie* (t_A)

Die Terme t_A und t_K beschreiben keine Umwandlungen zwischen Energiearten, sondern einen Wechsel zwischen der zonalen und großturbulenten Skala der *jeweiligen* Energieart VPE bzw. KE. Einen solchen Vorgang nennt man Energietransfer. Wir hatten bereits in Kapitel 2.2(g) vom Transferterm $\mathbb{F}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}$ zwischen der KE der hydrodynamischen Strömung und der KE der Molekularbewegung gesprochen. Dort handelte es sich also um einen Wechsel zwischen der hydrodynamischen und der molekularen Skala. Die molekularen Schwankungen verbergen sich im Navier-Stokes'schen $\mathbb{F}$-Anteil des Spannungs-

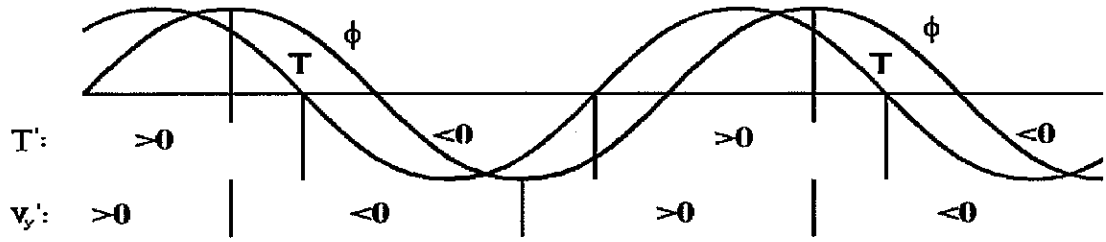
tensors $\mathbb{T}$, und diese Schwankungen werden multipliziert mit dem Gradienten der hydrodynamischen Strömung. Diese "Transferform" ist uns auch sehr häufig in Kap. 6 begegnet, als Austauschprozesse der KE zwischen der synoptischen, mikroturbulenten und molekularen Skala.

Hier haben wir es mit einem Austausch der KE *und* der VPE zwischen der zonalen und der großturbulenten Skala zu tun, und die "Transferform" ist auch in den Formeln (7-134a) und (7-134b) wiederzuerkennen: In t_A werden die großturbulenten Schwankungen $T'v_y'$ mit dem meridionalen Gradienten $\partial T''/\partial y$ eines Zonalmittelwertes multipliziert, sowie die Schwankungen $T'\omega'$ mit dem vertikalen $\partial T''/\partial p$. In t_K sind entsprechend die Schwankungen $v_x'v_y'$ bzw. $v_x'\omega'$ mit den Gradienten $\partial\overline{v}_x/\partial y$ bzw. $\partial\overline{v}_x/\partial p$ verknüpft. Der dritte Term in (7-134a) ist eine Folge des p-Systems als Vertikalkoordinate, der zweite Term in der eckigen Klammer von (7-134b) ist eine Folge der hier verwendeten sphärischen Horizontalkoordinaten, (→ Anhang B.1, → auch Lange (1976)). Die jeweils ersten Terme von t_A und t_K, also die Produkte eines meridionalen Wärme- bzw. Impulstransportes mit dem meridionalen Gradienten des jeweiligen zonalen Mittels, überwiegen alle weiteren Terme bei weitem. Das liefert auch eine Erklärung für die zu fordernden Mittelwerte $t_A \approx 5\ W/m^2 \gg t_K$. - Den Horizontalanteil von t_k, (7-134b), kann man mit $\partial/\partial y = \partial/r\partial\varphi$ so umformen, daß der meridionale Transport von Impuls als Transport von Drehimpuls erkennbar wird:

$$(7\text{-}134b') \qquad t_{K,Hor} = -\, v_x'v_y' \left[\frac{\partial\overline{v}_x}{\partial y} + \frac{\tan\varphi}{r}\,\overline{v}_x \right] = -\,(v_x'\, r\cos\varphi)\; v_y' \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\overline{v}_x}{r\cos\varphi} \right]$$

Hier ist $r\cos\varphi = l$ der Abstand von der Erdachse. Es handelt sich also im Horizontalanteil von t_k um den meridionalen Transport von spezifischem zonalen <u>Drehimpuls</u> $r\cos\varphi\ v_x' = l\ v_x'$ mit der Transportgeschwindigkeit v_y', multipliziert mit dem Meridionalgradienten der <u>Winkelgeschwindigkeit</u> $\overline{v}_x/(r\cos\varphi) = \overline{v}_x/l$.

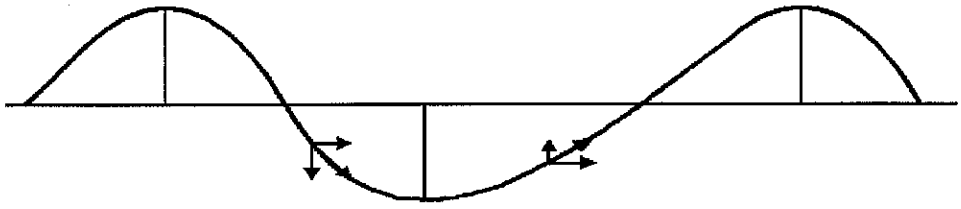
In t_A sorgt das eindeutige meridionale Temperaturgefälle nach Norden dafür, daß stets $\partial T''/\partial y < 0$ ist. Der im zonalen Mittel positive Faktor $T'v_y' > 0$ beschreibt den durch barokline Instabilität ausgelösten meridionalen Wärmetransport nach Norden. Somit ist das Produkt beider Terme negativ, und $t_{A,Hor} = -\,\Gamma T'v_y'\,\partial T''^2/\partial y$ ist als überwiegender Anteil von (7-134a) im Mittel positiv. - Daß somit a_Z in a_E transferiert wird, ist auch physikalisch verständlich: Der meridionale Wärmetransport baut den meridionalen Temperaturgradienten und damit a_Z ab. Da aber der Wärmetransport von den baroklinen Wellen, in denen die Temperaturwelle und die Höhenwelle phasenverschoben sind, gewissermaßen "zungenförmig" vonstatten geht, werden Temperaturgegensätze auf Breitenkreisen verstärkt, und damit a_E. Die folgende Skizze (→ auch Skizze und Diskussion in Kap. 4.8) veranschaulicht, wie durch die genannte Phasenverschiebung im Mittel ein *Wärmetransport* $T'v_y' > 0$ nach Norden entsteht:



Falls die Temperatur- und die Höhenwelle in Phase wäre, wäre die Meridionalkomponente v_y' des geostrophischen Windes stets auf der linken Hälfte einer T'>0 - Halbwelle positiv und auf der rechten Hälfte negativ, und es käme kein zonalgemittelter meridionaler Wärmetransport zustande. Entsprechendes gilt für die negative T-Halbwelle. Da jedoch die Phasen der Druckwelle *vor* (östlich) der Temperaturwelle liegen, vergrößern sich die Bereiche, in denen T' und v_y' das *gleiche* Vorzeichen haben, so daß im Zonalmittel $T'v_y' > 0$ ist.

6) *Der Transfer der Kinetischen Energie* t_K

Der Integrand t_K (7-134b) für den mittleren Transfer von KE enthält den von Vorzeichen her ebenfalls weitgehend eindeutigen Term $v_x'v_y' > 0$. (Der meridionale Impulstransport nach Norden wird von den typischen "nachschleifenden" Trögen der planetaren Wellen bewirkt, $\rightarrow$ nachfolgende Skizze). - Andererseits wechselt der Faktor von $v_x'v_y'$, der Meridionalgradient $\partial\overline{v}_x/\partial y$, häufiger sein Vorzeichen, weil es mehrere Westwindbänder geben kann. *Daher* ist im Mittel $t_A \gg t_K$. Synoptisch - klimatologische Studien ergeben sogar schwach *negative* Werte von t_K, so daß k_Z im Mittel von k_E "gefüttert" wird. Ein solcher Transfer von kleinen zu großen Skalen auch zwischen hydrodynamischer und molekularer KE wäre eine *negative Reibung*! Daher wird in der englischen Literatur der Befund $t_K < 0$ häufig als "negative viscosity effect" bezeichnet.



Ohne Achsenneigung ist offenbar im Mittel $v_x'v_y' = 0$. Die Druckwellen zeigen jedoch meistens eine Achsenneigung von SW nach NO und ergeben im Mittel $v_x'v_y' > 0$:

$$\overline{v_y} \simeq 0 \quad \rightarrow \quad v_y' \simeq v_y \quad ; \quad \overline{v_x} \neq 0 \quad \rightarrow \quad v_x' = v_x - \overline{v_x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dort, wo } v_y' = v_y > 0 \text{ gilt, ist } v_x > \overline{v_x} \rightarrow v_x' > 0 \\ \text{Dort, wo } v_y' = v_y < 0 \text{ gilt, ist } v_x < \overline{v_x} \rightarrow v_x' < 0 \end{array}\right. \longrightarrow \quad v_x'v_y' > 0$$

Die baroklinen Wellen leisten also nicht nur einen großturbulenten Wärmetransport nach Norden, sondern auch einen nach Norden gerichteten großräumigen Transport von zonalem Impuls. - (7-134b') führt zu einem äquivalenten Resultat.

7.14 ENERGETIK DER FLACHWASSER-ATMOSPHÄRE

Die in den Kapiteln 7.11 bis 7.13 dargestellte Energetik der baroklinen Atmosphäre ist nicht auf die in Kap. 3.2 beschriebene barotrope Flachwasser - Atmosphäre anwendbar. Eine Temperaturerhöhung von Wasser äußert sich bekanntlich nur sehr wenig in einer Dichteänderung und damit in einer Vertikalverschiebung des Schwerpunktes und in einer Änderung der Potentiellen Energie: Bei 0°C hat Wasser eine Dichte von ρ = 0.999 gcm^{-3}, bei 20°C ist ρ = 0.998 gcm^{-3}. Aufgrund der Dichteanoamalie liegt bei 4°C die größte Dichte ρ = 1 gcm^{-3} vor. Das Flachwasser - *Modell* idealisiert diese Verhältnisse durch die Annahme einer Dichte - *Konstanz*, in der die Temperaturabhängigkeit der Wasserdichte *völlig* vernachlässigt wird. Daher ist die Potentielle Energie *nicht* wie im baroklinen Fall (→ (7-113/114)) an die Innere Energie angekoppelt.

Dennoch soll sich die Beschreibung der Flachwasser-Energetik so weit wie möglich an das Vorgehen in Kap. 7.12 anlehnen. Die Säulenintegrationen (7-111) gelten auch hier. Die Integration verläuft von z=0 bis zur Obergrenze der Atmosphäre, und diese ist durch z=H eindeutig definiert. Man erhält somit für Energien der Einheitssäule der Flachwasser - Atmosphäre, wiederum unter Vernachlässigung der Kinetischen Energie der Vertikalbewegung:

$$\text{(7-135)} \qquad K_S = \int_0^H \frac{\mathbf{v}^2}{2} \rho \, dz = H \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2}$$

$$\text{(7-136)} \qquad P_S = \int_0^H gz \rho \, dz = g \rho \frac{H^2}{2}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise haben wir mit **v** und ∇ die entsprechenden *zweidimensionalen* horizontalen Vektoren bezeichnet. Da der Horizontalwind und die Temperatur von der Höhe *nicht* abhängen, und da die Kinetische Energie von v_z vernachlässigt wird, konnte hier die vertikale Integration explizit durchgeführt werden. Das war bei der baroklinen Atmosphäre *nicht* möglich. Das ist der tiefere Grund dafür, daß wir dort statt der Vertikalintegrale nur Beiträge der *Masseneinheit* zu den Integralen diskutiert haben. Die Innere Energie wird hier nicht berück-

sichtigt, da sie nicht an die Potentielle Energie gekoppelt ist und in den nun herzuleitenden Bilanzgleichungen keine Rolle spielt.

Wir wiederholen hier die Flachwassergleichungen aus Kap. 3.2, wobei wir zur Vereinfachung der Symbolik in den nachfolgenden Rechnung $\mathbf{v}_h \equiv \mathbf{v}$ setzen:

(7-137) $$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\, f\mathbf{k}\times\mathbf{v} - g\nabla H$$

(7-138) $$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla\cdot[H\mathbf{v}] = 0$$

Aus (7-137) folgt nach Skalarmultiplikation mit $\mathbf{v}$:

(7-139) $$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right] = -\,\mathbf{v}\cdot\nabla\left[\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right] - g\mathbf{v}\cdot\nabla H$$

Das ergibt mit (7-138) für die Ableitung von $K_S/\rho = H\mathbf{v}^2/2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial K_S}{\partial t} &= H\left[-\,\mathbf{v}\cdot\nabla\left[\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right] - g\mathbf{v}\cdot\nabla H\right] + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\left[-\,\nabla\cdot[H\mathbf{v}]\right]\\ &= -\,\nabla\cdot\left[\mathbf{v}\,H\,\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right] + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\nabla\cdot[H\mathbf{v}] - g\,\mathbf{v}\cdot\nabla\left[\frac{H^2}{2}\right] - \frac{\mathbf{v}^2}{2}\nabla\cdot[H\mathbf{v}]\end{aligned}$$

Die Ableitung von $P_S/\rho = gH^2/2$ ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_S}{\partial t} &= g\,H\,[-\,\nabla\cdot[H\mathbf{v}]] = -\,g\,H\,[H\,\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla H]\\ &= -\,2\,g\,\frac{H^2}{2}\nabla\cdot\mathbf{v} - g\,\mathbf{v}\cdot\nabla\left[\frac{H^2}{2}\right]\\ &= -\,g\,\frac{H^2}{2}\nabla\cdot\mathbf{v} - g\,\nabla\cdot\left[\mathbf{v}\,\frac{H^2}{2}\right]\end{aligned}$$

Das läßt sich zusammenfassen zu

(7-140) $$\frac{\partial K_S}{\partial t} = -\,\nabla\cdot[\,\mathbf{v}\,K_S\,] - \mathbf{v}\cdot\nabla P_S$$

(7-141) $$\frac{\partial P_S}{\partial t} = -\,\nabla\cdot[\,\mathbf{v}\,P_S\,] - P_S\,\nabla\cdot\mathbf{v}$$ mit (⟶ (7-135,136))

(7-142) $$K_S = H\rho\,\frac{\mathbf{v}^2}{2}$$

(7-143) $$P_S = g\rho\,\frac{H^2}{2}$$

oder alternativ

$$(7\text{-}144) \qquad \frac{\partial K_S}{\partial t} = -\,\nabla\cdot\left[\,\mathbf{v}(K_S+P_S)\,\right] - P_S\,\nabla\cdot\mathbf{v}$$

$$(7\text{-}145) \qquad \frac{\partial P_S}{\partial t} = -\,2\,\nabla\cdot\left[\,\mathbf{v}\,P_S\,\right] + \mathbf{v}\cdot\nabla\,P_S$$

(7-140,141) stellen die zeitliche Änderung der über einer Einheitsfläche vertikalintegrierten Kinetischen bzw. Potentiellen Energie dar als Divergenz eines entsprechenden konvektiven Transportes und durch Quellterme, die sehr anschaulich sind:

$-\mathbf{v}\cdot\nabla P_S = -g\rho H\,\mathbf{v}\cdot\nabla H$ in (7-140) beschreibt den Verlust bzw. den Gewinn der Kinetischen Energie durch Arbeit gegen den Druckgradienten bzw. durch Arbeit des Druckgradienten, (vergl. mit der Isotachengleichung (3-22), $\partial v/\partial t = -1/\rho\ \partial p/\partial s$!)

$-\,P_S\nabla\cdot\mathbf{v}$ in (7-141) beschreibt den Verlust bzw. den Gewinn der Potentiellen Energie, der eintreten muß, wenn die Strömung der inkompressiblen Flüssigkeit divergiert bzw. konvergiert.

Die beiden Quellterme ergeben in ihrer Summe den Divergenzterm $\nabla\cdot(\mathbf{v}P_S)$, der im Flächenmittel verschwindet, so daß die Quellterme als Umwandlungsterme interpretiert werden können und die Gesamtenergie K+P erhalten bleibt.

Eine *direkte* lokale Umwandlung zwischen Potentieller und Kinetischer Energie innerhalb der Einheitssäule wird formal durch die Gleichungssysteme (7-140,145) oder auch (7-141,144) beschrieben. Allerdings tritt dann in der lokalen K-Bilanz neben der Transportdivergenz von K auch eine solche von P auf, bzw. in der lokalen P-Bilanz tritt die entsprechende Transportdivergenz doppelt auf. Energieumwandlungen innerhalb der Säule sind also nur möglich, wenn gleichzeitig Energie exportiert wird.

Zur Herleitung der Haushaltsgleichungen für $\overline{K}$ und $\overline{P}$ mitteln wir (7-140) und (7-141) zonal. Das Vorziehen aller Konstanten ergibt:

$$(7\text{-}146) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{K_S}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{H\,\frac{\mathbf{v}^2}{2}}\right] = -\,\nabla\cdot\left[\overline{H\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}^2}{2}}\right] - \overline{\mathbf{v}\cdot\nabla\,\frac{H^2}{2}}$$

$$(7\text{-}147) \qquad \frac{1}{\rho g}\frac{\partial \overline{P_S}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{\frac{H^2}{2}}\right] = -\,\nabla\cdot\left[\overline{\mathbf{v}\,\frac{H^2}{2}}\right] - \overline{\frac{H^2}{2}\,\nabla\cdot\mathbf{v}}$$

Nach (7-143) ist die Potentielle Energie zweifach, nach (7-142) ist die Kinetische Energie sogar dreifach nichtlinear. In der Turbulenztheorie (Kap. 6.3) haben wir die

spezifische Kinetische Energie $\mathbf{v}^2/2$ gemittelt. Diese ist quadratisch und ergab *daher* eine Aufspaltung in die Kinetische Energie der mittleren Strömung und der turbulenten Strömung:

$$\overline{\mathbf{v}^2}/2 = \bar{\mathbf{v}}^2/2 + \overline{\mathbf{v}'^2}/2$$

Die Advektion dieser Größe bereitete als dreifach nichtlineare Bildung einigen rechnerischen Aufwand (→ Kap. 6.3). *Hier* ist wegen der Integration über die Säulenhöhe bereits die Kinetische Energie dreifach nichtlinear, und deren konvektiver Transport ist nun vierfach nichtlinear und äußerst kompliziert zu handhaben. Wir verwenden die Hilfsformeln

(7-148) $$\overline{\alpha\,\gamma^2} = \bar{\alpha}\,\bar{\gamma}^2 + 2\,\overline{\alpha'\gamma'}\,\bar{\gamma} + \overline{\alpha\,\gamma'^2}$$ d.h.

$$\overline{\alpha\,(\gamma^2-\gamma'^2)} = \bar{\alpha}\,\bar{\gamma}^2 + 2\,\overline{\alpha'\gamma'}\,\bar{\gamma}$$

(7-149) $$\overline{\alpha\,\varepsilon\,\gamma^2} = \bar{a}\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\gamma}^2 + \overline{\alpha'\varepsilon'}\,\bar{\gamma}^2 + \bar{\alpha}\,\bar{\varepsilon}\,\overline{\gamma'^2} + \overline{\alpha'\varepsilon'}\,\overline{\gamma'^2}$$
$$+ 2\,\bar{\alpha}\,\bar{\gamma}\,\overline{\varepsilon'\gamma'} + 2\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\gamma}\,\overline{\alpha'\gamma'} + \bar{\varepsilon}\,\overline{\alpha'\gamma'^2} + \bar{\alpha}\,\overline{\varepsilon'\gamma'^2}$$

Beweise:

$$\overline{\alpha\,\gamma^2} = \overline{(\bar{\alpha} + \alpha')(\bar{\gamma}^2 + 2\,\gamma'\bar{\gamma} + \gamma'^2)}$$
$$= \bar{\alpha}\,\bar{\gamma}^2 + \bar{\alpha}\,\overline{\gamma'^2} + 2\,\bar{\gamma}\,\overline{\alpha'\gamma'} \quad \overline{\alpha'\gamma'^2} \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha}\,\overline{\gamma'^2} + \overline{\alpha'\gamma'^2} = \overline{\alpha\,\gamma'^2}$$

$$\overline{\alpha\,\varepsilon\,\gamma^2} = \overline{(\bar{\alpha}\,\bar{\varepsilon} + \bar{\alpha}\,\varepsilon' + \alpha'\bar{\varepsilon} + \alpha'\varepsilon')(\bar{\gamma}^2 + 2\,\gamma'\bar{\gamma} + \gamma'^2)}$$
$$= \bar{\alpha}\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\gamma}^2 + \bar{\alpha}\,\bar{\varepsilon}\,\overline{\gamma'^2} + 2\,\bar{\alpha}\,\bar{\gamma}\,\overline{\varepsilon'\gamma'} + \bar{\alpha}\,\overline{\varepsilon'\gamma'^2}$$
$$+ 2\,\bar{\varepsilon}\,\bar{\gamma}\,\overline{\alpha'\gamma'} + \bar{\varepsilon}\,\overline{\alpha'\gamma'^2} + \bar{\gamma}^2\,\overline{\alpha'\varepsilon'} + \overline{\alpha'\varepsilon'}\,\overline{\gamma'^2} + 2\,\overline{\alpha'\varepsilon'\gamma'}\,\bar{\gamma}$$

Zusammenfassung der 4 Terme in $\bar{\gamma}^2$ bzw. in $\overline{\gamma'^2}$ einerseits sowie der 4 Korrelationen von γ mit α oder ε andererseits vervollständigen den Beweis.

Diese Hilfsformeln werden auf (7-146) und (147) angewendet und ergeben eine Gleichung in zonalgemittelten Größen und in "großturbulenten" Schwankungen:

(7-150)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{H}\,\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} + \overline{H\,\frac{\mathbf{v}'^2}{2}} + \overline{H'\mathbf{v}'}\cdot\overline{\mathbf{v}}\right] =$$

$$\nabla\cdot\left[\overline{H}\,\overline{\mathbf{v}}\,\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} + \overline{H'\mathbf{v}'}\,\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} + \overline{H}\,\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\frac{\mathbf{v}'^2}{2}} + \overline{H'\mathbf{v}'\frac{\mathbf{v}'^2}{2}} + \overline{H}\,\overline{\mathbf{v}'\frac{\mathbf{v}'^2}{2}} + \overline{\mathbf{v}}\,\overline{H'\frac{\mathbf{v}'^2}{2}} + \overline{H}\,\overline{\mathbf{v}}\cdot\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} + \overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{v}}\,\overline{H'\mathbf{v}'}\right]$$

$$- \overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\,\frac{\overline{H}^2}{2} - \overline{\mathbf{v}\cdot\nabla\,\frac{H'^2}{2}} - \overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla H'}\;\overline{\mathbf{v}}$$

(7-151)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\overline{H}^2}{2} + \overline{\frac{H'^2}{2}}\right] = -\,\nabla\cdot\left[\overline{H}\,\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} + \overline{H\,\frac{\mathbf{v}'^2}{2}} + \overline{H'\mathbf{v}'}\cdot\overline{\mathbf{v}}\right] - \frac{\overline{H}^2}{2}\,\nabla\cdot\overline{\mathbf{v}} - \overline{\frac{H'^2}{2}\,\nabla\cdot\mathbf{v}} - \overline{H}\;\overline{H'\nabla\mathbf{v}'}$$

Die linken Seiten von (7-150) und (7-151) legen nahe, $\overline{K}_S$ und $\overline{P}_S$ nach folgenden Definitionen in zonale Anteile (Index Z) und großturbulente Anteile (Index E) aufzuspalten. *Wegen der zusätzlichen Indizes verzichten wir fortan auf den Index* "S" *zur Kennzeichnung der Einheitssäule*:

(7-152) $$\overline{K} = \rho\,\overline{H\,\frac{\mathbf{v}^2}{2}} = \rho\,\overline{H}\,\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} + \rho\left[\overline{H\,\frac{\mathbf{v}'^2}{2}} + \overline{H'\mathbf{v}'}\cdot\overline{\mathbf{v}}\right] =: K_Z + \overline{K_E}$$

(7-153) $$\overline{P} = g\rho\,\overline{\frac{H^2}{2}} = g\rho\,\frac{\overline{H}^2}{2} + g\rho\,\overline{\frac{H'^2}{2}} =: P_Z + \overline{P_E}$$

P_Z und K_Z enthalten nur Zonalmittelwerte, P_E enthält nur Schwankungen der Feldgrößen. Wegen der dreifachen Nichtlinearität der vertikalintegrierten Energie K tauchen bei der Aufspaltung (7-152) auch Mischterme aus Mittelwerten *und* Schwankungen auf. Diese wurden in den obigen Definitionen als Beitrag zu K_E gewertet. Numerische Experimente mit dem in Kap. 3.16 beschriebenen Modell zeigen jedoch, daß die Mischterme klein sind und vernachlässigt werden können.

In welcher Weise sind nun die rechten Seiten von (7-150) und (7-151) auf die zonalen und großturbulenten Haushaltgleichungen von K bzw. von P zu verteilen? Haushaltsgleichungen von K_Z bzw. von P_Z gewinnt man mit Hilfe der gemittelten Gleichungen (7-137) und (7-138):

(7-154) $$\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\,\overline{\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}} - fk_x\overline{\mathbf{v}} - g\nabla\overline{H} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} = -\,\overline{\mathbf{v}}\cdot\overline{\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}} - g\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{H}$$

(7-155) $$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = -\,\nabla\cdot[\overline{H\mathbf{v}}]$$

also mit $\overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla(\mathbf{v}'\cdot\overline{\mathbf{v}})} = \overline{\mathbf{v}}\cdot\overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla\mathbf{v}'} + \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}\cdot\cdot\nabla\overline{\mathbf{v}}$

(7-156) $$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} = -\overline{\mathbf{v}}\cdot\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{\mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}}\cdot\overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla\mathbf{v}'} - g\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{H}$$

$$= -\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} - \overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla(\mathbf{v}'\cdot\overline{\mathbf{v}})} - \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}\cdot\cdot\nabla\overline{\mathbf{v}} - g\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{H}$$

(7-157) $$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = -\,\nabla\cdot[\overline{H}\,\overline{\mathbf{v}}] - \nabla\cdot\overline{H'\mathbf{v}'}$$

Damit erhält man die gesuchten Haushaltsgleichungen:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial K_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{H}\,\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2}\right] = \overline{H}\,\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} + \frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$$

$$= \overline{H}\left[-\,\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} - \overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla(\mathbf{v}'\cdot\overline{\mathbf{v}})} - \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}\cdot\cdot\nabla\overline{\mathbf{v}} - g\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{H}\right]$$

$$+ \frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2}\left[-\,\nabla\cdot[\overline{H}\,\overline{\mathbf{v}}] - \nabla\cdot\overline{H'\mathbf{v}'}\right]$$

(7-158) $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial K_z}{\partial t} = -\,\nabla\cdot\left[\overline{H}\,\overline{\mathbf{v}}\cdot\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2}\right] - \overline{H}\,\overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla(\mathbf{v}'\cdot\overline{\mathbf{v}})} - \frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2}\nabla\cdot\overline{H'\mathbf{v}'}$$

$$- \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}\cdot\cdot\nabla\overline{\mathbf{v}} - g\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\frac{\overline{H}^2}{2}$$ und analog

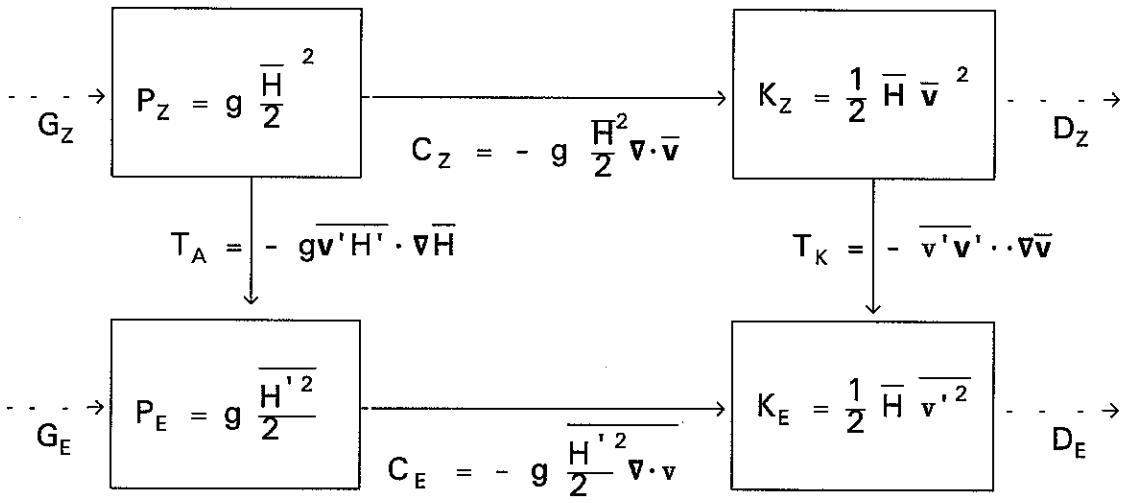
$$\frac{1}{\rho g}\frac{\partial P_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{H}^2}{2} = \overline{H}\,\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$$

$$= -\,\overline{H}\left[\nabla\cdot[\overline{H}\,\overline{\mathbf{v}}] - \nabla\cdot\overline{H'\mathbf{v}'}\right]$$

$$= -\,\overline{H}^2\,\nabla\cdot\overline{\mathbf{v}} - \overline{H}\,\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{H} - \nabla\cdot(\overline{H}\,\overline{H'\mathbf{v}'}) - \overline{H'\mathbf{v}'}\cdot\nabla\overline{H}$$

(7-159) $$\frac{1}{\rho g}\frac{\partial P_z}{\partial t} = -\,\nabla\cdot\left[\overline{\mathbf{v}}\,\frac{\overline{H}^2}{2} + \overline{H}\,\overline{H'\mathbf{v}'}\right] + \overline{H'\mathbf{v}'}\cdot\nabla\overline{H} - \frac{\overline{H}^2}{2}\nabla\cdot\overline{\mathbf{v}}$$

Wegen der Kleinheit der Mischterme aus Mittelwerten und Schwankungen in den Gleichungen (7-158) und (7-159) für K_Z und P_Z, aber auch in (7-150) und (7-151) für K und Z, kann man aus diesen vier Gleichungen sofort die Gleichungen für $K_E=K-K_Z$ und $P_E=P_Z$ gewinnen. Das folgende Diagramm faßt die resultierenden Gleichungen zusammen und ist mit dem entsprechenden baroklinen Energiefluß - Diagramm in Kap. 7.12(d) zu vergleichen:



Die Erzeugungs- und Dissipationsterme sind hier gestrichelt gezeichnet, da sie in barotropen reibungsfreien Modellen verschwinden. Der Vergleich mit dem entsprechenden baroklinen Energiefluß - Diagramm wird noch enger, wenn man beachtet, daß in der Flachwasser - Atmosphäre $A = P$ sowie $A_Z = P_Z$ und $A_E = P_E$ gilt. Das liegt daran, daß die Definition (7-110), $A = \Pi - \Pi_{ref}$, der baroklinen Verfügbaren Potentiellen Energie wegen der energetischen Inaktivität der Inneren Energie der Flachwasser- Atmosphäre übergeht in die Formel

(7-160) $\quad A = P - P_{ref} \quad$ mit $\quad P_{ref} = g\rho\, \overline{\overline{H}}^2/2 = \text{const}$

Das folgt aus (7-138), $\partial H/\partial t + \nabla\cdot[H\mathbf{v}] = 0 \longrightarrow \partial\overline{\overline{H}}/\partial t = 0$ (flächengemittelter zweidimensionaler Gauß'scher Satz), sowie aus (7-143), $P = g\rho\, H^2/2$.

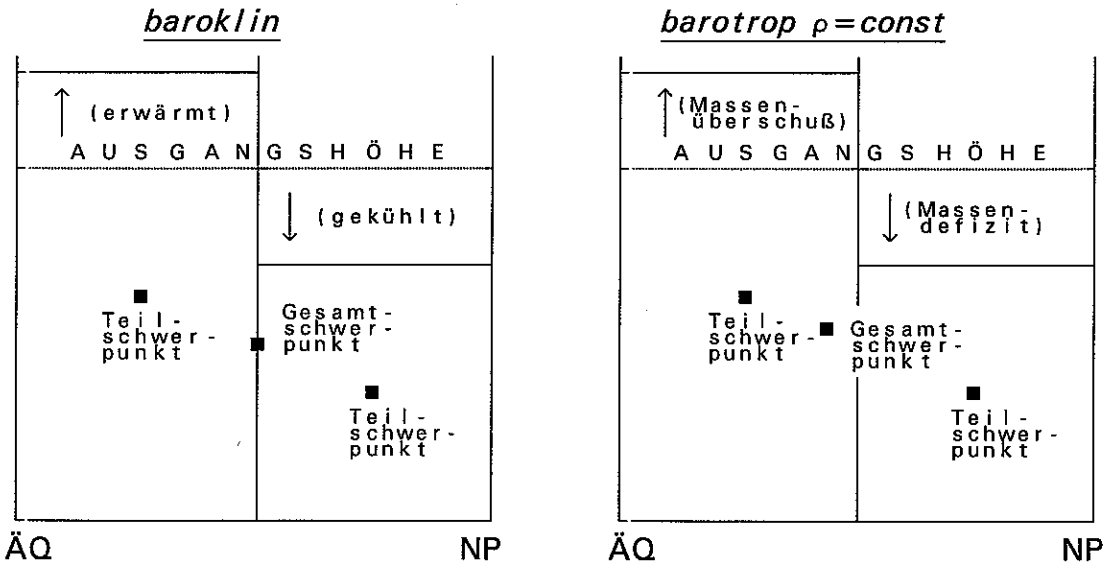
Der Wert dieser Herleitung der "barotropen Energetik" liegt zum Einen in dem nun möglichen Vergleich mit der baroklinen Energetik. Dort wurden energetische Größen der Einheitsmasse bestimmt, statt wie hier der Einheitssäule. Dadurch vermied man bei der Kinetischen Energie die Probleme der dreifachen Nichtlinearität. Allerdings blieb die ("Totale") Potentielle Energie linear, und sie war einer Aufspaltung nach zonalem und großturbulentem Anteil nicht zugänglich. Die Nichtlinearität entstand dort erst durch das quadratische Glied einer Reihenentwicklung der Differenz in

(7-122), in der anschließend noch mannigfache Approximationen notwendig sind. Der Vorteil der Integrierbarkeit verkehrt sich jedoch in einen technischen Nachteil, wenn man die großturbulente Aufspaltung $K=K_Z+K_E$ in Angriff nehmen will. Da K dreifach nichtlinear in H und **v** ist, und die entsprechende Transportdivergenz vierfach nichtlinear, erfordert die barotrope Energetik die Hilfsformel (7-149), wodurch sie "schwieriger" zu handhaben ist als die barokline Energetik.

Ein zweiter Wert der "barotropen Energetik" besteht darin, die Integration des Flachwassermodells, welche in Kap. 3.15 und 3.16 dargestellt wurde, durch numerische energetische Diagnosen testen und zu interpretieren zu können. In Kap. 6.8 wurde darüberhinaus dem Flachwassermodel eine untere Reibungs-Grenzschicht angekoppelt, mit dem Ergebnis, daß das Modell nun eine Senke für die Kinetische Energie erhält. Im obigen Energieflußdiagramm erhalten damit die gestrichelt gezeichneten Dissipationspfeile Realität. Die Energie-Erzeugungsterme fehlten jedoch noch immer. Wir konnten trotzdem die Reaktion der Grenzschicht studieren, weil ihre Response-Zeit nur 16h beträgt, während die Response-Zeit der Freien Atmosphäre etwa zwei Tage dauerte.

Ein dritter Wert des Studiums der "barotropen Energetik" besteht darin, den Weg zu weisen, nun doch die Erzeugungsterme im obigen Energieflußdiagramm ebenfalls zu "aktivieren", so daß man die in den Kapiteln 6.8(a) und 6.8(b) durchgeführten Studien über den Zeitraum der Reaktionszeit der Freien Atmosphäre hinaus verlängern kann (Lange (1995)).

Das folgende Schemabild soll verdeutlichen, wie die in Kap. 7.11 beschriebene Schematisierung der Abläufe für das Flachwassermodell zu modifizieren ist.



Der *wesentliche* Effekt bei der baroklinen Erzeugung von VPE war *nicht* eine Anhebung der Potentiellen Energie P des aktuellen Zustandes, sondern eine Absenkung der Potentiellen Energie P_{ref} des Referenzzustandes (Phase 1 des in Kap. 7.11 beschriebenen idealisierten atmosphärischen Kreisprozesses). Im Flachwassermodell kann wegen der "fehlenden Thermodynamik" dieser barokline Grundmechanismus des Antriebs der Atmosphärischen Zirkulation nicht nachgebildet werden.

Andererseits zeigt die Skizze des Zweikammersystems, daß man Verfügbare Potentielle Energie auch gewinnen kann, wenn man die "südliche" Erwärmung durch eine Zufuhr von Masse, und die "nördliche" Abkühlung durch einen Entzug von Masse ersetzt. Dabei wird nicht P_{ref} erniedrigt, (P_{ref} ist ja konstant), sondern P erhöht, was wegen (7-160) ebenfalls zu $A > 0$ führt. In der Skizze kommt das dadurch zum Ausdruck, daß der Gesamt-Schwerpunkt in der Phase I nicht mehr unbeweglich ist, sondern daß er nach "links oben" gewandert ist. Im Unterschied zum baroklinen Energiemodell wurde hier in Phase I die Gesamtenergie des Systems tatsächlich verändert! - Während der Massenumverteilung in Phase II wird nun der Schwerpunkt wieder gesenkt und Kinetische Energie gewonnen. Der Gesamt-Schwerpunkt wandert wieder an seinen ursprünglichen Ort zurück. Dennoch ist die in Phase I eingebrachte, gegenüber dem Ausgangszustand überschüssige Energie noch vorhanden, und zwar nun als Kinetische Energie. Um in einer Phase III den Kreisprozeß wieder zu schließen, reicht ein "normales" reibungsfreies Flachwassermodell nicht aus, da es, einmal angestoßen, ständig "weiterläuft" und nur durch einen Eingriff von außen wieder in den Ausgangszustand zurückzubringen wäre. Das energetische Prinzip läßt sich nicht durch eine Idealisierung zu einem zeitlich nacheinander ablaufenden Kreisprozeß verdeutlichen.

Die beiden bisher besprochenen Phasen der "barotropen Energetik" entsprechen einem Modell, welches zwar Antrieb enthält, jedoch keine Reibung. Umgekehrt wurde in Kap. 6.8(a) ein barotropes Zweischichtenmodell vorgestellt, welches zwar Reibung enthält, jedoch keinen Antrieb. Es bietet sich also an, die beiden Ansätze zu verbinden. - Zwar kann im antriebslosen Modell wegen des großen Unterschiedes zwischen den Responsezeiten von Reibungsschicht (ca. 16h) und Freier Atmosphäre (ca. 2-3 d) die Grenzschichtsteuerung gut zwei Tage lang untersucht werden. Dann allerdings führt der Rückkopplungseffekt von der Reibungsschicht zur Freien Atmosphäre als nichtlineares "Ekman Pumping" zu einem merklichen modellinternen Abbau des meridionalen Höhengradienten. Es kommt also zu einer meridionalen Massenumverteilung und zur Verringerung der Kinetischen Energie.

Zwar steht im barotropen Kopplungsmodell die differentielle Erwärmung als Antrieb nicht zur Verfügung, jedoch wurde in Lange (1996) das in Kap. 6.8(a) beschriebene

Modell mit einem "Ersatzantrieb" durch kontinuierliche zonale Massenumverteilung versehen, welche den modellinternen Abbau des meridionalen Höhengradienten verhindert. Somit konnten z.B. die frontentypischen Vertikalwindfelder über noch längere Zeiträume studiert werden. Dieser barotrope Modellantrieb entspricht gerade der soeben beschriebenen Phase I der idealisierten, nach Kreisprozeß-Zyklen getrennten barotropen Energetik des "normalen" Flachwassermodells. Darüberhinaus führt die Idealisierung des gekoppelten Reibungs - Modells nun doch zu einer Schließung des Kreisprozesses durch eine Phase III, in welcher die überschüssige Kinetische Energie durch nichtlineares "Ekman Pumping" wieder verschwindet.

Der Unterschied zwischen dieser barotropen Energetik und der in Kap. 7.11 beschriebenen <u>baroklinen</u> Energetik erschließt sich auch durch einen Vergleich der am Ende von Kap. 7.11 angegebenen Tabelle der einzelnen Kreisprozeß-Takte:

Phase / Vorgang		SP $\triangleq \Pi$	Π_{ref}	$A=\Pi-\Pi_{ref}$	KE
I	Differentielle Erwärmung	konstant	fällt	entsteht	0
II	Isentrope Ausgleichsströmung	fällt	konstant	verschwindet	entsteht
III	Dissipation der Strömung	steigt	steigt	0	verschwindet

mit einer entsprechenden Tabelle für das idealisierte, mit Antrieb und Dissipation versehene <u>barotrope</u> Zweischichtenmodell (Lange (1996)):

Phase / Vorgang		SP $\triangleq$ P	P_{ref}	$A=P-P_{ref}$	KE
I	Massenumverlagerung	steigt	konstant	entsteht	0
II	Ausgleichsströmung	fällt	konstant	verschwindet	entsteht
III	Dissipation der Strömung	konstant	konstant	0	verschwindet