ANHANG D: FUNKTIONALE UND FUNKTIONALABLEITUNGEN

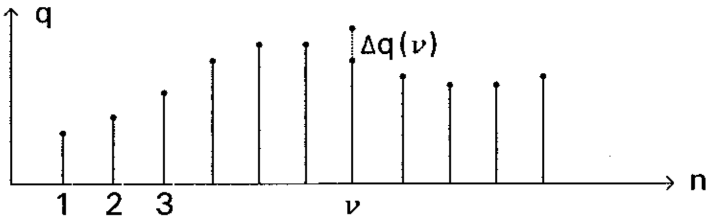
D.1 DEFINITIONEN

Ein Funktional $\mathcal{F}$ ist eine Verallgemeinerung einer Funktion mehrerer Argumente, auch abzählbar unendlich vieler Argumente, auf eine "Funktion" mit nicht abzählbar unendlich vielen Argumenten. Die entsprechende Verallgemeinerung der partiellen Ableitung nennt man Funktionalableitung. Für die zu verallgemeinernde Funktion abzählbar unendlich vieler Variablen gibt es folgende alternative Bezeichnungsweisen:

(i) $F = F(r_1, \ldots, r_\nu, \ldots)$

(ii) $F = F[q(n)] = F[q(1), \ldots, q(\nu), \ldots]$

In (i) werden die Argumente (reelle Zahlen r_ν) von F einzeln aufgeführt, in (ii) erhalten die Argumente von F den *einheitlichen* Namen q, wobei q als "Argumentenfunktion" *natürlicher Zahlen* die Rolle der Indizes von (i) übernimmt. q(n) kann z.B. in Form einer Wertetafel gegeben sein oder auch als graphische Darstellung:



Zu jeder Wahl eines Satzes von q(n)-Werten gehört also ein Funktionswert F[q(n)]. Die *Partielle Ableitung* bildet man, indem man *ein* $q(\nu)$ um $\Delta q(\nu)$ verändert, die resultierende Änderung $\Delta F[q]$ auf $\Delta q(\nu)$ bezieht und den Grenzwert $\Delta q(\nu) \to 0$ bildet:

$$\frac{\partial F[q(n)]}{\partial q(\nu)} = \lim_{\Delta q(\nu) \to 0} \frac{F[q(1), \ldots, q(\nu)+\Delta q(\nu), \ldots] - F[q(1), \ldots]}{\Delta q(\nu)}$$

Die Funktion F wird zum Funktional $\mathcal{F}$, wenn man die Funktion q(n) *natürlicher Zahlen* durch eine Argumentenfunktion q(r) *reeller Zahlen* ersetzt:

$$F = F[q(n)] \longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}[q(r)] \quad , \quad n \in \mathbb{N} \longrightarrow r \in \mathbb{R}$$

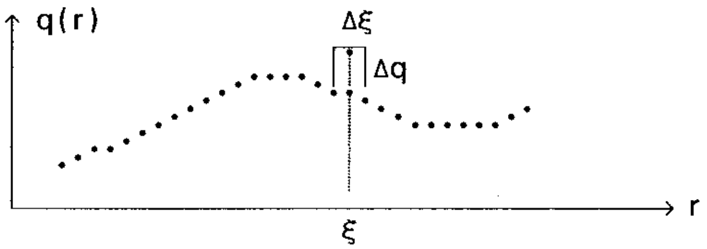
Durch ein Funktional wird also einer Funktion eine Zahl zugeordnet. Das ist zu unterscheiden von der Definition einer *impliziten Funktion* f(q(r)), wo jedem *Wert* der Funktion q(r) ein Wert von f zugeordnet wird. Dabei variieren nur die Werte *einer bestimmten Funktion* q(r). Bei einem Funktional dagegen variiert die Funktion q(r) *selbst*!

Nun soll die zur partiellen Ableitung analoge Funktionalableitung nach $r=\xi$ definiert werden: $\partial F[q(n)]/\partial q(\nu) \longrightarrow \partial\mathcal{F}[q(r)]/\partial q(\xi)$. Wie beschrieben, wird bei der Bildung der partiellen Ableitung von den diskreten Argumenten $q(n)$ *nur das eine* Argument $q(\nu)$ verändert. *Wie kann man aber innerhalb eines Kontinuums* $q(r)$ *von Argumenten nach einem "einzigen" Argument* $q(\xi)$ *ableiten ?* Man muß offenbar die Veränderung Δq der Argumentenfunktion $q(r)$ auf ein *Intervall* $\Delta\xi$ um ξ herum beschränken und anschließend den Grenzwert $\Delta\xi \longrightarrow 0$ bilden. Die Ableitung nach einem *einzigen* diskreten Argument wird zunächst ersetzt durch eine Ableitung nach einem *Intervall* $\Delta\xi$ von kontinuierlichen Argumenten, welches zur Selektion des *gewünschten* Argumentes "unendlich klein" gemacht werden muß. Der Grenzwert $\Delta\xi \longrightarrow 0$ muß also *zusätzlich* zum Grenzwert $\Delta q \to 0$ gebildet werden ! - Die Beschränkung der Veränderung der Argumentenfunktion $q(r)$ auf ein *Intervall* $\Delta\xi$ der Argumente r um ξ herum wird realisiert durch Multiplikation mit einer Stufenfunktion, die im Intervall $\Delta\xi$ den Wert 1 hat und sonst verschwindet:

$$\varepsilon(r;\ \xi,\Delta\xi) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } r \text{ im Intervall } \Delta\xi \text{ um } \xi \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so daß die Analogie $q(1),\ \ldots, q(\nu)+\Delta q(\nu),\ \ldots \;\longrightarrow\; q(r) + \Delta q\ \varepsilon(r;\ \xi,\Delta\xi),\ (\Delta\xi \to 0)$ entsteht, und damit

$$\frac{\partial\mathcal{F}[q(r)]}{\partial q(\xi)} \;=\; \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta q\to 0}} \frac{\Delta\mathcal{F}}{\Delta q\ \Delta\xi} \;=\; \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta q\to 0}} \frac{\mathcal{F}[q(r) + \Delta q\ \varepsilon(r;\xi,\Delta\xi)] - \mathcal{F}[q(r)]}{\Delta q\ \Delta\xi}$$



dies ist zu vergleichen mit

$$\frac{\partial F[q(n)]}{\partial q(\nu)} \;=\; \lim_{\Delta q(\nu)\to 0} \frac{\Delta F}{\Delta q(\nu)} \;=\; \lim_{\Delta q(\nu)\to 0} \frac{F[q(1),\ldots,q(\nu)+\Delta q(\nu),\ldots)] - F[q(1),\ldots)]}{\Delta q(\nu)}$$

Die Zähler *beider* Quotienten ($\Delta\mathcal{F}$ und ΔF) verschwinden mit $\Delta q \longrightarrow 0$. $\Delta\mathcal{F}$ verschwindet aber *auch* mit $\Delta\xi \longrightarrow 0$ (sogar *"ohne"* $\Delta q \longrightarrow 0$). Im "Funktional-Differenzenquotienten" muß daher $\Delta\mathcal{F}$ auf Δq *und* auf $\Delta\xi$ bezogen werden! Im diskreten Fall "vertritt" das veränderte Argument immer eine konstante "Intervall-Länge" im Argumentenbereich. *Daher* wird dort ΔF *nur* auf Δq bezogen.

D.2 BEISPIELE

Beispiel 1) $\mathcal{F}[q(r)] \;=\; q(x) \qquad [\; = \int q(r)\;\delta(x-r)\;dr \;]$

Die der Funktion q(r) zuzuordnende Zahl ist der Wert von q(r) bei einem speziellen Wert r=x. M.a.W., als Wert des Funktionals ist einfach die Argumentenfunktion q(r) an der Stelle r=x zu nehmen. Die Definition mit der "Deltafunktion" entspricht der häufig verwendeten Definition eines Funktionals als *Integral* über die unabhängige Funktion. Bei der Funktionalableitung dieses Funktionals spielen *zwei* spezielle x-Werte eine Rolle:

1) Der Wert r=x, d.h. die Stelle der Argumentenfunktion, die dem Funktional als Wert zugeordnet ist.
2) Der Wert r=ξ, nach dem das Funktional "partiell" abzuleiten ist.

$$\frac{\partial q(x)}{\partial q(\xi)} \;=\; \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta q\to 0}} \frac{q(x)\;+\;\Delta q\;\;\varepsilon(x;\xi,\Delta\xi)\;-\;q(x)}{\Delta q\;\;\Delta\xi} \;=\; \lim_{\Delta\xi\to 0} \frac{\varepsilon(x;\xi,\Delta\xi)}{\Delta\xi} \;=\; \delta(x-\xi)$$

Der Zähler des Differenzenquotienten ist entweder 1 oder 0, je nachdem, ob x im $\Delta\xi$ - Intervall um ξ liegt oder nicht. Beim Grenzübergang $\Delta\xi \longrightarrow 0$ wird die Stufenfunktion immer schmaler und der Nenner immer kleiner. Das Ergebnis ist die "Delta-Funktion" als Grenzwert von "Stufenfunktion / $\Delta\xi$" . (Beachte: Wenn die Funktionalableitung $\partial\mathcal{F}/\partial q$ durch das Symbol "δ" ausgedrückt würde, $\delta\mathcal{F}/\delta q$, handelte es sich *nicht* um einen Quotienten aus "Deltafunktionen" !)

Das diskrete Analogon zu Beispiel 1) ist die Funktion $F(q_i) = q_n = \sum q_i\;\delta_{in}$, wobei δ_{in} das <u>Kronecker-Symbol</u> ist:

$$\frac{\partial q_n}{\partial q_\nu} \;=\; \lim_{\Delta q_\nu\to 0} \frac{q_n+\Delta q_\nu\delta_{n\nu}\;-\;q_n}{\Delta q_\nu} \;=\; \delta_{n\nu} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial q_n}{\partial q_i} \;=\; \delta_{in}$$

Es kommt offenbar darauf an, ob "zufällig" nach dem "zugeordneten" Argument abgeleitet wird (Ergebnis "1") oder nicht (Ergebnis "0"). Diese Fallunterscheidung erfolgt durch ein "vorgezogenes" $\delta_{n\nu}$ im Zähler von ΔF. Dieses $\delta_{n\nu}$ entspricht bei der Funktionalableitung der Stufenfunktion $\varepsilon(r;\;\xi,\Delta\xi)$, die nach Division durch $\Delta\xi$ und $\Delta\cancel{\xi}$ q und nach der Grenzwertbildung die Deltafunktion ergibt.

Beispiel 2) $\mathcal{F}[q(r)] \;=\; \left.\frac{dq(r)}{dr}\right|_x \;=\; q'(r)|_x \;=:\; q'(x)$

Die der Funktion q(r) zuzuordnende Zahl ist der Wert der *Ableitung* von q(r) bei einem speziellen Wert r=x. Für die Funktionalableitung ergibt sich

$$\frac{\partial q'(x)}{\partial q(\xi)} = \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta q\to 0}} \frac{q'(x) + \Delta q\ \varepsilon'(x;\xi,\Delta\xi) - q'(x)}{\Delta q\ \Delta\xi} = \lim_{\Delta\xi\to 0} \frac{\varepsilon'(x;\xi,\Delta\xi)}{\Delta\xi}$$

$$= \frac{d}{dx} \lim_{\Delta\xi\to 0} \frac{\varepsilon(x;\xi,\Delta\xi)}{\Delta\xi} = \frac{d}{dx}\,\delta(x-\xi) = \delta'(x-\xi)$$

Beispiel 3) $\quad \mathcal{F}[q(r)] = f(q(x))$

Als Wert des Funktionals ist der Wert einer Funktion $f(q(r))$ der Argumentenfunktion $q(r)$ an der Stelle $r=x$ zu nehmen. Die Kettenregel ergibt

$$\frac{\partial f(q(x))}{\partial q(\xi)} = \frac{df}{dq}\,\frac{\partial(q(x))}{\partial q(\xi)} = \frac{df}{dq}\,\delta(x-\xi)$$

Hier konnte Beispiel 3) auf Beispiel 1) zurückgeführt werden, so daß die ursprüngliche Definition der Funktionalableitung nicht mehr benötigt wurde. Ebenso kann man das folgende Beispiel 4) auf Beispiel 2) zurückführen:

Beispiel 4) $\quad \mathcal{F}[q(r)] = f(q'(x))$

$$\frac{\partial f(q'(x))}{\partial q(\xi)} = \frac{df}{dq'}\,\frac{\partial(q'(x))}{\partial q(\xi)} = \frac{df}{dq'}\,\frac{d}{dx}\,\delta(x-\xi)$$

Die bei Funktionalen erfolgende Zuordnung einer Zahl zu einer Funktion kann auch durch Integration (in vorgegebenen Grenzen) erfolgen:

Beispiel 5) $\quad \mathcal{F}[q] = \int dx\ f(q(x))$

$$\frac{\partial}{\partial q(\xi)} \int dx\ f(q(x)) = \int dx\ \frac{\partial f(q(x))}{\partial q(\xi)} = \int dx\ \frac{df}{dq}\,\delta(x-\xi) = \frac{df}{dq}$$

Da Integration und Funktionalableitung vertauschbar sind, konnte Beispiel 5) auf Beispiel 3) zurückgeführt werden. Ebenso kann man das folgende Beispiel 6) auf Beispiel 4) zurückführen:

Beispiel 6) $\quad \mathcal{F}[q] = \int dx\ f(q'(x))$

$$\frac{\partial}{\partial q(\xi)} \int dx\ f(q'(x)) = \int dx\ \frac{\partial f(q'(x))}{\partial q(\xi)} = \int dx\ \frac{df}{dq'}\,\frac{d}{dx}\,\delta(x-\xi)$$

Hier kann nach partieller Integration $\int u\delta' = u\delta - \int u'\delta$ die Ableitung der Deltafunktion auf die Ableitung von $u \triangleq df/dq'$ übergewälzt werden. Der ausintegrierte Teil $u\delta$ verschwindet, wenn ξ *innerhalb* der Integrationsgrenzen liegt:

$$\frac{\partial}{\partial q(\xi)} \int dx\ f(q'(x)) = \int dx\ \frac{d}{dx}\,\frac{df}{dq'}\,\delta(x-\xi) = -\,\frac{d}{dx}\,\frac{df}{dq'}$$

D.3 FUNKTIONALABLEITUNGEN IN DER PUNKTEMECHANIK

Wenn man Beispiel 5) und 6) zusammenfaßt, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial q(\xi)} \int dx\ f\ [\ q(x),\ q'(x)\ ] \ = \ \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial q'}$$

Ähnlich, wie hier f von q(r) und seiner Ableitung q'(r) abhängt, hängt die in den Kapiteln 1.6 und 10.1(a) angesprochene und in Anhang B.1(a) verwendete *Lagrangefunktion II.Art* ab von generalisierten Orten $q_i(t)$ und ihren *Zeitableitungen*, den generalisierten Geschwindigkeiten. Man nennt

$$\mathcal{S} = \int dt\ L[q_i(t),\ \dot{q}_i(t)]$$

<u>Wirkungsfunktional</u> ("Wirkungsintegral"). Dieses wird nach dem Hamiltonprinzip bei allen Bewegungen minimiert. *Wir haben durch Nullsetzen der Funktionalableitung des Wirkungsfunktionals* $\mathcal{S} = \int Ldt$ *die Lagrange-Gleichungen II. Art hergeleitet:*

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\int dt\ L\ [\ q_i(t),\ \dot{q}_i(t)\ ] \ = \ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ = \ 0$$

Der üblichere Weg besteht in der Anwendung der "Variationsrechnung":

$$\delta\mathcal{S} \ = \ \delta\int dt\ L \ = \ \int dt\ \delta L\ [\ q_i,\dot{q}_i\ ] \ = \ \int dt\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right]$$

Die Variation an den Integralgrenzen verschwindet laut Voraussetzung. Daher kann nach partieller Integration $\int uv' = uv - \int u'v$ die Zeitableitung von δq

$$\delta\dot{q}_i = \delta\frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt}\,\delta q_i$$

auf die Zeitableitung von $\partial L/\partial\dot{q}_i$ übergewälzt und δq_i ausgeklammert werden:

$$\delta\mathcal{S} \ = \ \int dt\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\,\delta q_i\right] \ = \ \int dt\ \delta q_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] \ = \ 0$$

Die Bewegungsgleichungen (die "Variationsableitungen" von L) ergeben sich bei der Variationsrechnung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung, also dem Verschwinden von $\delta\mathcal{S}$, und dem *zusätzlichen* Argument, daß die Variationen δq_i *beliebig* sein können. Die Funktionalableitung dagegen "liefert" die Bewegungsgleichungen *direkt* aus dem Verschwinden von $\partial\mathcal{S}/\partial q$, da die auftretenden δ-Funktionen das Integral bereits "beseitigen". Ein direkter Vergleich liefert ein "Kochrezept" zur Überführung einer Variation in eine Funktionalableitung :

1) "Teile" die Variationsgleichung durch δq_i
2) Ersetze die Symbole "δ" durch "∂" und "streiche" die Integration $\int dt$

Die Funktionalableitungen von $\mathcal{S}$ entsprechen also den Variationsableitungen von L, d.h. den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen II. Art der Punktemechanik. Die Funktionalableitung kann also bereits in der Punktemechanik angewendet werden. Üblicherweise werden jedoch Funktionalableitungen erst für den Übergang von der Punktemechanik zur Feldtheorie eingeführt. Worin besteht also der Unterschied zur Anwendung in der Feldtheorie?

D.4 FUNKTIONALABLEITUNGEN IN DER FELDTHEORIE

Die Theorie der Punktemechanik geht über in eine Feldtheorie, ($\rightarrow$ auch Übergang von Kap. 10.2 nach 10.3), wenn man den Index i in den diskreten Argumenten der Lagrange-Funktion ersetzt durch ein *kontinuierliches* Argument $\mathbf{r}$: $q_i(t) \rightarrow q(\mathbf{r},t)$ Ferner muß die gewöhnliche Ableitung $\dot{q}_i(t)$ ersetzt werden durch die *partielle zeitliche* Ableitung $\partial_t q(\mathbf{r},t)$ des Feldes $q(\mathbf{r},t)$ $\dot{q}_i(t) \rightarrow \partial_t q(\mathbf{r},t)$ und sie muß ergänzt werden durch räumliche Ableitungen $\nabla q(\mathbf{r},t) =: \partial_k q(\mathbf{r},t)$. Die sich ergebende neue Funktion wird Lagrangedichte Λ genannt:

$$L\left[\, q_i(t),\ \dot{q}_i(t)\,\right] \quad \longrightarrow \quad \Lambda\left[\, q(\mathbf{r},t),\ \partial_t q(\mathbf{r},t),\ \partial_k q(\mathbf{r},t)\,\right]$$

Das Wirkungsintegral ~~ergibt~~ ist in beiden Fällen ein Funktional

$$\mathcal{S} = \int L\, dt \quad \longrightarrow \quad \mathcal{S} = \iiiint \Lambda\ dt\ d^3\mathbf{r}$$

(Die Ausdrücke $\partial_t q$ und $\partial_k q$ wurden im Einführungs-Beispiel 2) mit q' bezeichnet). Die Feldgleichungen lassen sich ebenso wie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen aus der Wirkungsfunktion gewinnen, und zwar entweder (I) durch das Variationsprinzip $\delta\mathcal{S}=0$ *oder* (II) durch die Funktionalableitung $\partial\mathcal{S}/\partial q$

<u>(I) Variationsprinzip $\delta\mathcal{S}=0$</u>

$$\delta\mathcal{S} = \iiiint dt\ d^3\mathbf{r}\ \delta\Lambda(q,\partial_t q,\partial_k q) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{(mit Summenkonvention in k):}$$

$$\delta\mathcal{S} = \iiiint dt\ d^3\mathbf{r} \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_t q}\,\delta\partial_t q + \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_k q}\,\delta\partial_k q \right]$$

$$= \iiiint dt\ d^3\mathbf{r} \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_t q}\,\partial_t\delta q + \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_k q}\,\partial_k\delta q \right]$$

$$= \iiiint dt\ d^3\mathbf{r}\ \delta q \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q} - \partial_t\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_t q} - \partial_k\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_k q} \right] = 0$$

Wieder wurden die Ableitungen von δq abgewälzt, nämlich durch partielle Integration in Verbindung mit dem geforderten Verschwinden der Variation δq an den Grenzen (hier auch an den *räumlichen* Systemgrenzen). Die Beliebigkeit der Variationen δq innerhalb dieser Grenzen erzwingt die Feldgleichungen:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q} - \partial_t \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_t q} - \partial_k \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_k q} = 0 \qquad \left\{ \text{vergl. mit } \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} = 0 \right\}$$

(II) Funktionalableitung $\partial\mathscr{S}/\partial q(\mathbf{r},t)$

$$\frac{\partial}{\partial q(\mathbf{r}',t')} \iiiint dt\, d^3\mathbf{r} \left[\Lambda\left(q(\mathbf{r},t),\ \partial_t q(\mathbf{r},t),\ \partial_k q(\mathbf{r},t) \right) \right]$$

$$= \iiiint dt\, d^3\mathbf{r} \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\frac{\partial q(\mathbf{r},t)}{\partial q(\mathbf{r}',t')} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_t q}\frac{\partial\partial_t q(\mathbf{r},t)}{\partial q(\mathbf{r}',t')} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_k q}\frac{\partial\partial_k q(\mathbf{r},t)}{\partial q(\mathbf{r}',t')} \right]$$

Dieser Ausdruck enthält die folgenden "Deltafunktionen":

$$\frac{\partial q(\mathbf{r},t)}{\partial q(\mathbf{r}',t')} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t'),$$

$$\frac{\partial\partial_t q(\mathbf{r},t)}{\partial q(\mathbf{r}',t')} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\partial_t\delta(t-t'), \qquad \frac{\partial\partial_k q(\mathbf{r},t)}{\partial q(\mathbf{r}',t')} = \delta(t-t')\,\partial_k\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

Nach dem Abwälzen der Ableitung von den Deltafunktionen in Term 2 und 3 auf die Λ-Ableitungen ergeben sich sofort die obigen Feldgleichungen!

Wenn man in Analogie zur Punktemechanik das Feld-Wirkungsintegral

$$\mathscr{S} = \iiiint dt\, d^3\mathbf{r}\, \Lambda\left(q(\mathbf{r},t),\ \partial_t q(\mathbf{r},t),\ \partial_k q(\mathbf{r},t) \right) = \mathscr{S}\left[q \right]$$

als ein *Zeitintegral* über eine "Lagrangefunktion" darstellen möchte, muß die letztere offenbar als *Raumintegral über die Lagrangedichte* definiert werden, d.h. sie wird *selbst* zu einem Funktional, dem Lagrange-Funktional $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{S} = \int \mathscr{L}\, dt = \mathscr{S}[q] \qquad \text{mit}$$

$$\mathscr{L} = \iiint d^3\mathbf{r}\, \Lambda\left(q(\mathbf{r},t),\ \partial_t q(\mathbf{r},t),\ \partial_k q(\mathbf{r},t) \right) = \mathscr{L}\left[q,\ \partial_t q \right]$$

Bildet man statt der Funktionalableitung des Wirkungsfunktionals $\mathscr{S}[q]$

$$\frac{\partial\mathscr{S}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \iiiint dt\, d^3\mathbf{r} \left[\Lambda\left(q(\mathbf{r},t),\ \partial_t q(\mathbf{r},t),\ \partial_k q(\mathbf{r},t) \right) \right]$$

die *beiden* Funktionalableitungen des Lagrangefunktionals $\mathscr{L}[q,\partial_t q]$, so folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \iiint d^3\mathbf{r} \left[\Lambda \left(q(\mathbf{r},t),\ \partial_t q(\mathbf{r},t),\ \partial_k q(\mathbf{r},t) \right) \right]$$

$$= \iiint d^3\mathbf{r} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q(\mathbf{r},t)}{\partial q(\mathbf{r}')} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_k q} \frac{\partial \partial_k q(\mathbf{r},t)}{\partial q(\mathbf{r}')} \right] = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \partial_k \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_k q}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t q} = \frac{\partial}{\partial \partial_t q} \iiint d^3\mathbf{r} \left[\Lambda \left(q(\mathbf{r},t),\ \partial_t q(\mathbf{r},t),\ \partial_k q(\mathbf{r},t) \right) \right]$$

$$= \iiint d^3\mathbf{r} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t q} \frac{\partial \partial_t q(\mathbf{r},t)}{\partial \partial_t q(\mathbf{r}')} \right] = \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t q}$$

und man erhält durch Vergleiche insgesamt drei Darstellungen der Feldgleichung:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \partial_t \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_t q} - \partial_k \frac{\partial \Lambda}{\partial \partial_k q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t q} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q} = 0$$

Diese Darstellung durch das Lagrangefunktional entspricht formal vollkommen den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen II. Art der Punktemechanik. Allerdings hat man dort *für jeden Freiheitsgrad* eine Gleichung, gekennzeichnet durch den Index i an den generaliserten Koordinaten q_i. Ein Feld hat aber unendlich viele Freiheitsgrade, und dennoch bekommen wir nur *eine* Feldgleichung. Diese enthält jedoch im Gegensatz zur Punktemechanik nicht nur die Zeit ($q_i(t)$), sondern auch den Ort ($q(\mathbf{r},t)$), und die unendlich vielen Freiheitsgrade spiegeln sich in der unendlichen Vielfalt möglicher $\mathbf{r}$-Werte wieder. Oft treten in einer Feldtheorie auch *mehrere* unabhängige Funktionen auf, ($q_i(\mathbf{r},t)$). Hier zählt der Index *nicht* die Freiheitsgrade, sondern die Felder (von denen jedes selbst unendlich viele Freiheitsgrade hat). Die Felder q_i in

$$\Lambda = \Lambda(q_i(\mathbf{r},t), \partial_t q_i(\mathbf{r},t), \partial_k q_i(\mathbf{r},t))$$

werden allerdings oft mit dem Symbol ψ_i bezeichnet. Mit dieser Bezeichnungsweise leitet man z.B. auch die "Funktional-Form" der Hamilton'schen kanonischen Feldgleichungen her. Man definiert völlig analog zur drittletzten Formelzeile von Kap. 1.6:

Generalisierte Feldimpulse:	$\pi_i = \partial\Lambda/\partial\partial_t\psi_i$	$(\equiv \partial\Lambda/\partial\dot{\psi}_i)$
Hamiltondichte des Feldes:	$\eta = \pi_i \partial\partial_t\psi_i - \Lambda$	$(\equiv \pi_i\dot{\psi}_i - \Lambda)$
Hamiltonfunktional:	$\mathcal{H} = = \iiint d^3\mathbf{r}\ \eta$	

Die Legendre-Transformation ergibt dann aus den Lagrangegleichungen die *kanonischen Feldgleichungen:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \psi_i} \longrightarrow \partial_t \psi_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i}, \quad \partial_t \pi_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_t \psi_i}$$