

ANHANG C WELLEN UND SPEKTRALTHEORIE

C.1 EBENE WELLEN

In Kap. 3.10(b-d) haben wir Wellen - Lösungsansätze der Art $A \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ verwendet. Das Einsetzen solcher Ansätze in die jeweilige Wellengleichung führte zu Lösungsbedingungen in Gestalt einer expliziten Gleichung der Art $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Gelegentlich liefert eine solche *charakteristische Gleichung* auch komplexe Wurzeln:

$$\omega = \omega_R + i\omega_I$$

wobei die Indizes Real- und Imaginärteil kennzeichnen. Für den Wellenansatz folgt:

$$A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_R t - i\omega_I t)} = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_R t) + \omega_I t}$$

Da der Imaginärteil einer komplexen Zahl natürlich reell ist, erhält die Wellenamplitude A der ebenen Welle im Falle $\omega_I > 0$ einen mit der Zeit exponentiell anwachsenden Faktor, d.h. die Lösung ist dann instabil:

$$(C-1) \quad A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{\omega_I t} A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_R t)}$$

Um zu verstehen, daß es sich hier um eine ~~eine ebene~~ Welle handelt, betrachten wir zunächst den Realteil des Lösungsansatzes (3-63) der Flachwassergleichung (3-62).

$$A^* = A \cos (\mathbf{k}_h \cdot \mathbf{r}_h - \omega t)$$

Wir wählen einen festen Zeitpunkt aus (o.B.d.A. $t=0$), und fragen nach den Orten, an denen alle Fluidteilchen an der Wasseroberflächen die gleiche Auslenkung haben. Wir suchen die Ortsvektoren \mathbf{r}_h der Phasenpunkte $\varphi_0 = \mathbf{k}_h \cdot \mathbf{r}_h$ in der xy - Ebene:

$$k_x x + k_y y = \varphi_0 \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{k_x}{k_y} x + \frac{\varphi_0}{k_y}$$

Die gesuchten Ortsvektoren der Punkte gleicher Phase, auch *Wellenfronten* genannt, bilden also in der xy -Ebene eine *Gerade* mit dem Steigungswinkel $\tan \alpha = -k_x/k_y$. Das bedeutet, daß der Vektor \mathbf{k}_h *rechtwinklig* auf den Wellenfronten steht. Um das einzusehen, betrachten wir eine Wellenfront mit einem "kleinen" Steigungswinkel $-k_x/k_y > 0$ und der Phase $\varphi = 0$, also eine "schwach" ansteigende Gerade durch den Ursprung eines xy -Koordinatensystems. Wenn wir im Ursprung *senkrecht* zu dieser Wellenfront, also nach "oben links", den Vektor \mathbf{k}_h errichten, so hat er gerade die Komponenten $-k_x$ und k_y , und der Winkel zwischen \mathbf{k}_h und der y -Achse ist identisch mit

dem Steigungswinkel α der Wellenfront. Wir haben also die Beziehungen $\tan\alpha = -k_x/k_y$. Ferner gilt auch

$$\cos\alpha = k_y/|\mathbf{k}_h|$$

Nun denken wir uns eine zweite Wellenfront, die zur ersten parallel ist und oberhalb von ihr liegt. Sie hat die Gleichung $y = -(k_x/k_y)x + \varphi/k_y$. Je größer der Phasenunterschied φ zur Ursprungs-Wellenfront ist, desto größer ist natürlich der y -Achsenabschnitt $b = \varphi/k_y$, und desto größer ist auch der Abstand D der beiden parallelen Wellenfronten. Offenbar gilt

$$\cos\alpha = D/b = Dk_y/\varphi$$

Der Vergleich mit dem obigen $\cos\alpha = k_y/|\mathbf{k}_h|$ ergibt $D = \varphi/|\mathbf{k}_h|$. Als *Wellenlänge* L bezeichnet man den Abstand zweier Wellenfronten *gleicher* Phase, hier also $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$. Das ergibt die bekannte Beziehung

$$L = 2\pi/|\mathbf{k}_h|$$

Entsprechende Überlegungen in 3D ergeben, daß die Wellenfronten im dreidimensionalen Raum *Ebenen* sind (\rightarrow z.B. die Lösung (3-59) der Schallwellengleichung (3-58)). Entsprechend ist $2\pi/|\mathbf{k}|$ der Abstand zwischen den *ebenen* Wellenfronten im *Raum*. Also ist $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/L$ die "Wellenzahl" (Anzahl der Wellen) in einem räumlichen Intervall der Länge 2π , ebenso wie die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ die Anzahl der Schwingungen mit Schwingungsdauer T im Zeitintervall der Länge 2π ist. \mathbf{k} gibt also Richtung und Abstand der Ebenen gleicher Phase an. Bildet man L/T im Sinne von "Geschwindigkeit=Weg/Zeit", so erhält man die skalare Phasengeschwindigkeit $\omega/k=c$. Die Wellenfronten wandern in \mathbf{k} -Richtung mit der *vektoriellen* Phasengeschwindigkeit

$$(C-2) \quad c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}^0 = \frac{\omega}{k} \mathbf{k}^0 = \frac{L}{T} \mathbf{k}^0$$

denn dann reproduziert die Ersetzung $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + c\Delta t$; $t \rightarrow t + \Delta t$ den alten Wert der Phase:

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + c\Delta t) - \omega(t + \Delta t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}^0 \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \Delta t - \omega t - \omega\Delta t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$$

wegen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}^0 = |\mathbf{k}|$. Wir betrachten eine ebene Welle, deren Wellenfronten senkrecht auf der xz -Ebene stehen und sich "zonal - vertikal" ausbreiten. Die vektorielle Phasengeschwindigkeit ist also

$$(C-3) \quad c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}^0 = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} = \frac{\omega}{k_x^2 + k_z^2} k_x \mathbf{e}_1 + \frac{\omega}{k_x^2 + k_z^2} k_z \mathbf{e}_3 \\ = c_x \mathbf{e}_1 + c_z \mathbf{e}_3$$

c_x und c_z sind *nicht* die Geschwindigkeiten, mit denen die Wellenfronten auf der x - bzw z -Achse wandern. Letztere sind größer, sie sind "geometrisch" bestimmt und können bei sehr spitzen Winkeln der Wellenfront mit den Achsen auch Überlicht-

geschwindigkeit erreichen. Wir nennen sie "trace velocities" c_{Tx} bzw c_{Tz} . Eine geometrische Überlegung ergibt:

$$c_{Tx} = \frac{\omega}{k_x} \quad ; \quad c_{Tz} = \frac{\omega}{k_z}$$

Diese Formel gibt offenbar die Geschwindigkeiten wieder, die man erhält, wenn man die horizontale bzw. die vertikale Wellenlänge durch die Schwingungsdauer dividiert. Dies sind jedoch *nicht* die Komponenten von (C-3)!

C.2 ORTHOGONALSYSTEME

In Kap. 6.1(c), Formel (6-3), haben wir die Ostwindkomponente als Fourierreihe geschrieben. Hier verallgemeinern wir diese Formel auf die Fourierentwicklung einer beliebigen Funktion im Intervall $[-a,a]$:

$$(C-4) \quad f(x) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n \cos k_n x + G_n \sin k_n x] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\phi_n e^{ik_n x}] \quad \text{mit}$$

$$F_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos(k_n x) dx \quad , \quad F_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx$$

$$G_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin(k_n x) dx$$

$$\phi_0 = F_0; \quad \phi_n = \frac{1}{2} [F_n - iG_n] = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) e^{-ik_n x} dx \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Die Wellenzahlen $k_n = 2\pi/L_n$ errechnen sich aus den Wellenlängen L_n , die ihrerseits ein Vielfaches des Intervalls $[-a,a]$ sein müssen, innerhalb dessen die eindimensionale Entwicklung des Skalarfeldes erfolgt. Also gilt $nL_n = 2a$ oder

$$(C-5) \quad L_n = 2a/n \quad \text{oder} \quad k_n = 2\pi/L_n = n \pi/a$$

Entwickelt man also im Intervall $[-\pi,\pi]$, so gilt einfach $k_n = n$, wie in (6-3)! Die Exponentialdarstellung in (C-4) ergibt sich aus der Formel

$$(C-6) \quad e^{\pm ik_n x} = \cos(k_n x) \pm i \sin(k_n x)$$

Wegen der aus (C-5) folgenden Beziehung $k_{-n} = -k_n$ enthält die Summe über die Exponentialfunktionen lauter Paare aus komplexen und konjugiert komplexen Zahlen, die bekanntlich reell sind. - Wir bilden folgende Integrale:

$$(C-7a) \quad \int_{-a}^a \sin(k_m x) \sin(k_n x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ a & \text{für } m = n \end{cases} \quad \text{und ebenso}$$

$$(C-7b) \quad \int_{-a}^a \cos(k_m x) \cos(k_n x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ a & \text{für } m = n \end{cases}$$

Bei geeigneter Normierung der Sinus- oder Kosinusfunktionen hätte man für $m = n$ auch das Ergebnis "1" erhalten können. Das bedeutet, daß diese Funktionen ähnliche Eigenschaften haben wie die orthogonalen Basisvektoren (\rightarrow E.1):

$$(C-8) \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Daher nennt man auch (C-7) eine Orthogonalitätsrelationen der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen. Das Innere Produkt (C-8) zweier orthogonaler Vektoren entspricht also der Produktintegration (C-7) zweier orthogonaler Funktionen. Weiterhin kann man die Entwicklung eines beliebigen Vektors nach den Basisvektoren

$$(C-9) \quad \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3$$

vergleichen mit der Entwicklung (C-4) einer Funktion f nach Sinus- und Kosinusfunktionen, wobei allerdings (C-7a,b) noch zu ergänzen ist durch

$$(C-7c) \quad \int_{-a}^a \sin(k_m x) \cos(k_n x) dx = 0 \quad \text{für beliebige } m \text{ und } n$$

Die Entwicklungskoeffizienten a_1, a_2, a_3 gewinnt man nach (C-9) aus dem zu entwickelnden Vektor \mathbf{a} durch innere Produktbildung mit den orthogonalen Basisvektoren, also $a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1$ u.s.w. In Analogie dazu gewinnt man die Fourierkoeffizienten F_n und G_n (und somit auch die Fourierkoeffizienten $\phi_n = (F_n - iG_n)/2$) der zu entwickelnden Funktion $f(x)$ durch Multiplikation mit der entsprechenden Orthogonalfunktion und anschließender Integration (\rightarrow 2. Zeile von Formel (C-4)).

Neben der Fourierreihe (C-4) in Sinus-Kosinus-Form bzw. in Exponentialform gibt es als weitere trigonometrische Form die "Amplituden-Phasenform", welche physikalisch besser zu interpretieren ist (\rightarrow Kap. 8.6(c)):

$$(C-10) \quad f(x) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(k_n x - \phi_n) \quad \text{mit (vgl. C-4):}$$

$$M_n = + \sqrt{F_n^2 + G_n^2}, \quad M_0 = F_0; \quad \tan \phi_n = \frac{F_n}{G_n}$$

$$\phi_n = \frac{M_n}{2} \exp(-i\phi_n) \quad \phi_0 = F_0 = M_0$$

Die "Koeffizienten" F_n und G_n der Sinus-Kosinus-Entwicklung in Formel (C-4) dürften eigentlich nicht "Amplituden" genannt werden, denn die "echten" Amplituden ergeben sich gemäß (C-10) erst aus der Wurzel von $F_n^2 + G_n^2$. Andererseits ist F_n/G_n der Tangens der Phase. Die Koeffizienten der Sinus-Kosinus-Entwicklung enthalten also die Information über die Stärke und über den Ort der einzelnen Wellen in "vermischter" Form. Sie dienen eigentlich nur dazu, um räumliche oder zeitliche Feldverläufe zu transformieren, um einfacher mit ihnen rechnen zu können, sie danach "möglichst schnell" wieder zurück zu transformieren, um erst dann das Ergebnis der Rechnung physikalisch zu interpretieren. Der Vorteil der Amplituden-Phasen-Darstellung (C-10) ist der, daß die Informationen über die Stärke und die Orte von Wellenberg und Tälern *explizit* und *getrennt* angegeben werden.

Trigonometrischen Funktionen bzw. die damit zusammenhängenden komplexen Exponentialfunktionen sind nicht die einzigen Orthogonalfunktionen, die als Basissystem zur Entwicklung einer Funktion verwendet werden können. Sehr bekannt und besonders relevant für die sphärischen meteorologischen Felder ist die Orthogonalität der im Anhang B.2 besprochenen Legendre-Polynome, der zugeordneten Legendre-Polynome und der Kugelflächenfunktionen. Die Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome lauten

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} & \text{für } m = n \end{cases} \quad (\text{Legendre-Polynome})$$

$$\int_{-1}^1 P_m^k(x) P_n^k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} \frac{(m+k)!}{(m-k)!} & \text{für } m = n \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{Zugeordnete} \\ \text{Legendre-Polynome}) \end{matrix}$$

Wieder kann man für $m = n$ das Ergebnis "1" erhalten bei geeigneter Normierung der Orthogonalfunktionen, die dann zu einem "Orthonormalsystem" werden. Daß auch die Kugelflächenfunktionen ein Orthogonalsystem bilden, geht daraus hervor, daß sie gemäß (B-24) nichts anderes sind als zugeordnete Legendre-Polynome, welche ^{mit} dem Faktor $e^{im\lambda}$ multipliziert werden, d.h. mit Fourierfunktionen, die ihrerseits auch orthogonal sind. - Die graphischen Darstellungen im Anhang B.2 machen die Möglichkeit einer Reihenentwicklung sphärischer Funktionen in Kugelfunktionen plausibel.

C.3 SPEKTRALMODELLE

In den Kapiteln 3.15 und 3.16 wurde die Methode der numerischen Integration in Gittermodellen besprochen. In Kap. 3.17 sowie in Kap. 6.8(a) und 6.8(b) wurden einige Beispiele vorgestellt. In der Übersichtstabelle von Kap. 3.14 wurden

allerdings auch Spektralmodelle erwähnt, in welchen *Diskretisierungen* nur noch in der Zeit vorgenommen werden müssen. Daß^{man} die räumlichen Diskretisierungen durch die Spektralmethode vermieden^{ei} werden kann, können wir nun besser verstehen. Da es nur auf das Prinzip ankommt, gehen wir hier von einer vereinfachten Modellgleichung für eine Variable $f(x,t)$ aus, die außer von der Zeit t nur von einer Raumdimension x abhängt. $f(x,t)$ soll im orthogonalen Basissystem der komplexen Exponentialfunktionen im Intervall $[-\pi, \pi]$ entwickelt werden, d.h. nach (C-5) ist $k_n = n$. Ferner ersetzen wir das Symbol ϕ_n in (C-4) nun durch $\phi(n)$:

$$(C-11a,b) \quad f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n,t) e^{inx} \quad ; \quad \phi(n,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,t) e^{-inx} dx$$

Unsere Modellgleichung soll jedoch nicht nur die Funktion $f(x,t)$ enthalten, sondern auch deren Ableitung nach t und x . Die Ableitung von (C-11) nach x ergibt:

$$(C-12a,b) \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [in \phi(n,t)] e^{inx} \quad ; \quad in \phi(n,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} e^{-inx} dx$$

(C-12) ist aufzufassen als Fourier-Entwicklung der Funktion $\partial f/\partial x$. So wie $f(x,t)$ die Fourier-Koeffizienten $\phi(n,t)$ hat, so hat $\partial f/\partial x$ die Fourier-Koeffizienten in $\phi(n,t)$. - Die Ableitung von (C-11) nach t ergibt:

$$(C-13a,b) \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d\phi(n,t)}{dt} e^{inx} \quad ; \quad \frac{d\phi(n,t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} e^{-inx} dx$$

Die Fouriertransformierte von $\partial f/\partial t$ ist einfach die entsprechende Ableitung der Fouriertransformierten von f selbst, welche allerdings in *jedem Summanden* der Summe über n vorgenommen wird. Diese Ableitung nach t ist also keine partielle, sondern nur noch eine *gewöhnliche* Ableitung!

Wir setzen nun in die gesamte partielle lineare Differentialgleichung, welche aus Funktionen $f(x,t)$ und deren Ableitungen nach x und t besteht, die Formeln (C-11a), (C-12a) und (C-13a) ein. In der Praxis muß man die Reihen über unendlich viele Summanden n natürlich bei einem bestimmten n abbrechen. Z.B. werden bei einem sogenannten T21-Modell die Feldvariablen nur bis zur Wellenzahl 21 entwickelt. Das Entfallen der kleineren Wellen begrenzt die Auflösung der Feldstrukturen und entspricht der entsprechenden Begrenzung in Gittermodellen durch den endlichen Gitterabstand.

Nach dem Einsetzen der Reihenentwicklung besteht also jeder Term der ursprünglichen Gleichung aus einer z.B. 21-fachen Summe über n . Bis auf den Unterschied in der Dimensionszahl entspricht die Aufspaltung (C-11a) - (C-13a) der Variablen nach Spektralkomponenten genau der Aufspaltung (C-9) eines Vektors nach den Komponenten eines

orthogonalen Basissystems. Ebenso wie man aus einer Vektorgleichung durch Skalarmultiplikation mit *einem* Basisvektor wegen der Orthogonalität (C-8) eine Komponentengleichung erhalten kann, so kann man wegen der Orthogonalität (C-8) durch Multiplikation mit *einer* Funktion $\exp(-imx)$ aus der Feldgleichung eine Gleichung für die entsprechende Spektralkomponente (C-11b) - (C-13b) gewinnen. Tut man das für alle 21 Wellenzahlen, so erhält man aus der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung für das Feld $f(x,t)$ 21 gewöhnliche Differentialgleichungen für die Spektralkomponenten $\phi(n,t)$, $n = 1, \dots, 21$.

(C-11b), (C-12b) und (C-13b) gestatten also die Transformation von partiellen linearen Differentialgleichungen in den "Wellenzahlraum". Bei nichtlinearen Differentialgleichungen müssen die Formeln (C-11b) - (C-13b) ergänzt werden durch die Fouriertransformation von Produkten aus Funktionen $f(x,t) \cdot g(x,t)$. Sei entsprechend

$$(C-11a,b) \quad f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n,t) e^{inx} \quad ; \quad \phi(n,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,t) e^{-inx} dx$$

die Spektralentwicklung von $g(x,t)$ gegeben durch

$$g(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(m,t) e^{imx} \quad ; \quad \Gamma(m,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,t) e^{-imx} dx$$

so errechnen sich die Fourierkoeffizienten des Produktes aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x,t) \cdot g(x,t)] e^{-inx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x,t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(m,t) e^{imx} \right] e^{-inx} dx \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(m,t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,t) e^{-i(n-m)x} dx \right\} \end{aligned}$$

Die geschweifte Klammer ist in Analogie zu (C-11b) nichts anderes als $\phi(n-m)$:

$$(C-14) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x,t) \cdot g(x,t)] e^{-inx} dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(m) \phi(n-m)$$

Wenn in einem Funktionsprodukt eine der beiden Funktionen nach x abgeleitet wird, so erhält die rechte Seite noch den Faktor in bzw. im (\rightarrow (C-12a)). Die Transformation eines Produktes ruft also eine ganze Summe von Amplitudenprodukten her. Mit (C-14) ist die Transformation auch von nichtlinearen Differentialgleichungen möglich. (Im nachfolgenden Kapitel C.4 werden wir die Behandlung der nichtlinearen Terme am Beispiel der inkompressiblen Navier-Stokes'schen Gleichung explizit demonstrieren). Das resultierende gewöhnliche Gleichungssystem in den zeitlichen Änderungen der

Entwicklungskoeffizienten kann allerdings in der Regel noch immer nicht analytisch gelöst werden und muß daher zeitlich diskretisiert werden.

Wir betrachten wichtige Spezialfälle von (C-14). Mit $n = 0$ folgt

$$(C-15) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x,t) g(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(m) \phi(-m)$$

Das ist die sogenannte *Parseval'sche Gleichung*. Sie lautet für $f = g$

$$(C-16) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi(m) \phi(-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi(m)|^2 = \phi^2(0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} |\phi(m)|^2$$

Wenn für die Funktion f der Betrag v des Windes gewählt wird, stellt (C-16) eine Aufschlüsselung der Kinetischen Energie nach den spektralen Anteilen dar, also ein Energiespektrum (engl. "Powerspectrum"). $\phi(m)$ informiert darüber, welchen Anteil Bewegungsformen der zu m gehörenden Größenskala an der gesamten kinetischen Energie haben.

C.4 ASPEKTE DER SPEKTRALEN TURBULENZTHEORIE

Die Orthogonalentwicklung des 3D-Windfeldes \mathbf{v} ist in direkter Verallgemeinerung von (C-4) durch

$$(C-17) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

gegeben. Die Summanden dieser Reihe entsprechen den in (C-1) diskutierten ebenen Wellen in 3D. ebenso wird das Druckfeld dargestellt:

$$(C-18) p(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \bar{p}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Die Zeitabhängigkeit wurde hier nicht explizit dargestellt. Die Amplituden $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ des Vektorfeldes \mathbf{v} sind natürlich selbst Vektoren, und $\bar{p}(\mathbf{k})$ sind die Amplituden des skalaren Druckfeldes. Wir beschränken uns im folgenden auf ein turbulentes Strömungsfeld in einem inkompressiblen Medium. Einsetzen von (C-17) in die Kontinuitätsgleichung (Inkompressibilitätsbedingung) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot [e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0 \end{aligned}$$

wegen $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{E}$. Wegen $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \neq 0$ ergibt sich schließlich die spektrale Inkompressibilitätsbedingung, wonach $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ und damit auch $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ keine Komponente in Fortschreitungsrichtung der Welle haben:

$$(C-19) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}) = 0$$

Die Spektralentwicklungen sollen nun auch in die inkompressible Navier-Stokes'sche Gleichung eingesetzt werden. Diese erhält man aus der Bewegungsgleichung (2-20)

$$(C-20) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbb{T} - \rho \nabla \Phi - 2\omega \times \rho \mathbf{v} \quad \text{mit}$$

$$(C-21) \quad \mathbb{T} = \mathbb{F} - p\mathbf{E} \quad \text{und}$$

$$(C-22) \quad \mathbb{F} = \nu \left[\nabla \mathbf{v} + \overset{\downarrow}{\mathbf{v} \nabla} \right] + \sigma (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E}$$

Im inkompressiblen Fluid gilt $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ und damit auch

$$(C-23) \quad \nabla \cdot \mathbb{F} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Zur Vereinfachung vernachlässigen wir in (C-20) die Schwere- und die Coriolisbeschleunigung, was in der technischen Hydrodynamik durchaus gestattet ist. Nach Einsetzen von (C-21) und (C-23) in (C-20) und nach Division durch die konstante Dichte ρ schreibt sich die inkompressible Navier-Stokes'sche Gleichung:

$$(C-24) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Einsetzen von (C-17) und (C-18) ergibt nach den Regeln (C-12a) und (C-13a)

$$(C-25) \quad \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{k})}{\partial t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \cdot \sum_{\mathbf{k}''} i\mathbf{k}'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} = \\ = \nu \sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{1}{\rho} \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \bar{p}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Alle linearen Terme in dieser Gleichung enthalten den Faktor $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$. Wäre der nicht-lineare Term $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ mit seiner Doppelsumme über alle \mathbf{k}' und \mathbf{k}'' *nicht* vorhanden, so könnte man durch Ausnutzen der Orthogonalität der Funktionen $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ sofort die spektrale prognostische Gleichung für die Amplituden $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ angeben. In der Doppelsumme muß *jede* Kombination von möglichen \mathbf{k}' - und \mathbf{k}'' - Werten enthalten sein. Wenn man bei jeweils festgehaltenem \mathbf{k}' alle Werte von \mathbf{k}'' durchlaufen läßt, und dann \mathbf{k}' erhöht, so erhält man als Summationsfolge \mathbf{k}'/\mathbf{k}'' , symbolisch in Zahlen übersetzt:

$$1/1, 1/2, 1/3, \dots; 2/1, 2/2, 2/3, \dots; 3/1, 3/2, 3/3, \dots \quad \text{u.s.w.}$$

Die Summationsfolge kann aber auch geändert werden in

$$1/1; 1/2, 2/1; 1/3, 2/2, 3/1; 1/4, 2/3, 3/2, 4/1; \dots \quad \text{u.s.w.}$$

Das Prinzip dieser Sortierung der Summationsfolge besteht darin, immer solche Vektoren zu summieren, die in ihrer Summe einen vorgegebenen Vektor \mathbf{k} ergeben. Wenn man diesen Vektor \mathbf{k} ebenfalls variiert, so erhält man wieder jede Kombination von möglichen Vektorpaaren. Übersetzt man diese Zahlensymbolik wieder in die Symbolik der obigen Gleichung, so erhält man für den zweiten Term der linken Seite:

$$\sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \cdot \sum_{\mathbf{k}''} i\mathbf{k}'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot i\mathbf{k}'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Nach dieser Umschreibung der Doppelsumme in (C-25) läßt sich die Orthogonalität der Funktionen $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ ausnutzen, und man erhält aus (C-20) die Spektralgleichung

$$(C-26) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right] \mathbf{u}(\mathbf{k}) = -i\mathbf{k} \frac{\bar{p}(\mathbf{k})}{\rho} - i \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'')$$

$\mathbf{k} \cdot (C-26)$ ergibt wegen (C-19)

$$(C-27) \frac{\bar{p}(\mathbf{k})}{\rho} = -\frac{\mathbf{k}}{k^2} \cdot \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'')$$

Damit läßt sich aus (C-26) die Druckamplitude $\bar{p}(\mathbf{k})$ eliminieren. Einsetzen von (C-27) in (C-26) und Ausklammern der Doppelsumme führt auf

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right] \mathbf{u}(\mathbf{k}) = i \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} - \mathbb{E} \right] \cdot \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'')$$

Nun ist $\mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}'' = \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}')$ (wegen (C-19)). Das ergibt

$$(C-28) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right] \mathbf{u}(\mathbf{k}) = -i \left[\mathbb{E} - \mathbf{k}^0 \mathbf{k}^0 \right] \cdot \left[\mathbf{k} \cdot \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}'') \right]$$

Hier erkennt man den in Kap. 6.1(c) auf elementare Art erläuterten Energietransfer im \mathbf{k} -Raum wieder, d.h. den Energietransfer zwischen den Skalen. Die Amplitude der durch \mathbf{k} gekennzeichneten Welle wird durch das gleichzeitige Vorhandensein von *allen* Wellenpaaren \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' verändert, dessen Summenwellenzahl \mathbf{k} ist. Der Triadenterm, der diesen Transfer vermittelt, hat seinen Ursprung im *nichtlinearen* Term $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Der Anteil $\mathbf{k}^0 \mathbf{k}^0$ des "Projektionsoperators" $\mathbb{E} - \mathbf{k}^0 \mathbf{k}^0$ sorgt dafür, daß von den Trägheitskräften (\mathbb{E} -Anteil) die Komponenten in \mathbf{k} -Richtung abgezogen werden. Die Druckkräfte sorgen also dafür, daß $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ durch die rechte Seite nur so beeinflusst werden kann, daß $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}) = 0$ erhalten bleibt.

C.5 GRUPPENGESCHWINDIGKEIT UND DISPERSION

Die Komponenten von $c = L/T k^0$ sind nach (C-3) nicht durch L_x/T usw. gegeben. Das deutet darauf hin, daß die Phasengeschwindigkeit keine physikalische Bedeutung hat. Andererseits *haben* Wellen eine physikalische Bedeutung, denn sie können z.B. Energie und Impuls transportieren. Das tun sie jedoch nicht mit der Phasengeschwindigkeit, sondern mit der *Gruppengeschwindigkeit*. Um sie einzuführen, betrachten wir die Superposition zweier Wellen der Form (C-1). Es kann zu Verstärkung oder Abschwächung kommen: Haben beide Wellen gleiche Wellenlänge, so ist die Abschwächung oder Verstärkung zu gegebener Zeit an jedem Ort gleich. Haben sie jedoch leicht unterschiedliche Wellenlängen, so ergeben sich periodische Verstärkungen und Auslöschungen der Amplitude (*Amplitudenmodulation*), z.B.

$$\begin{aligned} e^{ik_1x} + e^{ik_2x} &= e^{\frac{i}{2}(k_1+k_2)x} \left\{ e^{\frac{i}{2}(k_1-k_2)x} + e^{-\frac{i}{2}(k_1-k_2)x} \right\} \\ &= 2 \cos \left[\frac{(k_1-k_2)}{2} x \right] e^{i \frac{k_1+k_2}{2} x} \end{aligned}$$

Wegen $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$. Falls $k_1 \approx k_2$ ^{ist}, ist auch die Frequenz $(k_1+k_2)/2$ der Summe etwa gleich, aber die Amplitude enthält den *langsam - periodischen* Modulationsfaktor $2 \cos \frac{1}{2}(k_1-k_2)x$. Exakt die gleiche Überlegung gilt für die ein-dimensionale *Welle*, wenn man in der vorstehenden Rechnung x durch $x-ct_0$ ersetzt. Nun bilden wir ein Wellenpaket aus Partialwellen mit *kontinuierlich* variierendem k mit $k \approx k_0$, $k = k_0 + \kappa$. Es sei vorausgesetzt, daß keine (oder nur geringe) *Amplitudenänderung* mit k stattfindet, so daß $A(k_0)$ vor das Integral gezogen werden darf. Ferner wird substituiert gemäß $k = k_0 + \kappa \rightarrow dk = d\kappa$.

$$\Psi = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} dk A(k) e^{i(kx-\omega t)} = A(k_0) \int_{-\Delta k}^{\Delta k} d\kappa e^{i \left[k_0 x + \kappa x - \omega_0 t - \kappa \frac{d\omega}{dk} t \right]}$$

wobei für $\omega = \omega(k)$ nur der lineare Anteil $\omega(k_0) + \kappa \frac{d\omega}{dk} = \omega_0 + \kappa \frac{d\omega}{dk}$ einer Taylorreihe verwendet wurde. Die weitere Umformung ergibt

$$\begin{aligned}
\Psi &= e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} A(k_0) \int_{-\Delta k}^{\Delta k} dk e^{ik \left[x - \frac{d\omega}{dk} t \right]} = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} A(k_0) \left[\frac{e^{i\kappa []}}{i []} \right]_{-\Delta k}^{\Delta k} \\
&= e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} A(k_0) \frac{e^{i\Delta k []} - e^{-i\Delta k []}}{i []} = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} A(k_0) \frac{2i \sin(\Delta k [])}{i []} \\
\Psi &= A(k_0) \frac{\sin \left[\Delta k \left[x - \frac{d\omega}{dk} t \right] \right]}{\Delta k \left[x - \frac{d\omega}{dk} t \right]} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}
\end{aligned}$$

Die ursprüngliche Amplitude $A(k) \approx A(k_0)$ erhält also einen Modulationsfaktor, der durch einen zeitabhängigen Faktor der Form $\sin X/X$ geprägt ist. Sei o.B.d.A. $t=0$, dann ist die Hüllkurve des Wellenpaketes gegeben durch $\sin(\Delta kx)/\Delta kx$. Die erste Nullstelle neben dem Maximum liegt bei $x_0 = \pi/\Delta k$, d.h. das Wellenpaket hat die "Breite" $\Delta x = 2\pi/\Delta k$: Je geringer die Bandbreite der zugelassenen Wellenzahlen im Wellenpaket ist, desto größer ist seine räumliche Erstreckung! Es läuft als ganzes mit der Gruppengeschwindigkeit $d\omega/dk$ nach rechts:

$$(C-29) \quad c_g = \frac{d\omega}{dk}$$

denn die Ersetzung $x \rightarrow x + c_g \Delta t$, $t \rightarrow t + \Delta t$ reproduziert das Wellenpaket. (C-29) beweist man auch folgendermaßen: Die maximale Amplitude liegt offenbar dort, wo alle Partialwellen die gleiche Phase haben, d.h. wo $d[\varphi(k)]/dk = 0$. Gesucht ist also der Ort, an dem sich die Phase "von Wellenlänge zu Wellenlänge" nicht ändert:

$$\frac{d}{dk} [kx - \omega t] = 0 \Rightarrow x - \frac{d\omega}{dk} t = 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{x}{t}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man $d[\varphi(\omega)]/d\omega = 0$ auswertet. Die *vektorielle Form* von (C-29) lautet

$$(C-30) \quad c_g = \frac{d\omega}{dk} = \nabla_k \omega$$

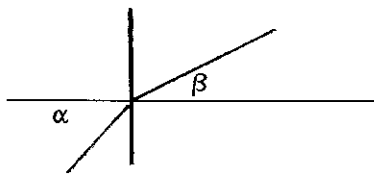
Das Beispiel "Schallwellen" (Kap. 3.10(b)) ergibt offenbar $c = c_g$. In komplizierteren Fällen ist jedoch $c \neq c_g$. Diesen Fall bezeichnet man als Dispersion. Dispersion liegt vor, wenn die Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl abhängt (wobei die Beziehung $c = \omega/k$ keine echte k -Abhängigkeit darstellt, denn dies ist nur die mit 2π erweiterte Definition $c = L/T$ der Geschwindigkeit):

$$(C-31) \quad c_g = \frac{d}{dk} [c(k) \cdot k] = \frac{dc}{dk} k + c = - \frac{dc}{dL} L + c$$

Dies ist die Rayleigh'sche Beziehung. Schallwellen zeigen auch deshalb *keine* Dispersion, weil $(\beta - \alpha)$ keine k -Abhängigkeit aufweist. Für Rossbywellen dagegen gilt

$$c = \bar{v}_x - \beta/k^2$$

d.h. diese zeigen Dispersion $c=c(k)$. Das wohl bekannteste Beispiel für Dispersion sind Lichtwellen in Materie (Farbaufspaltung im "Dispersionsprisma"):



$$c = \frac{c_{\text{vak}}}{n} \quad \text{mit}$$

$n =$ Brechungsindex:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

Die spektrale Aufspaltung wird durch den k -abhängigen Brechungsindex $n = n(k)$ verursacht. Wegen $c_{\text{vak}} = \text{const}$ bedeutet das, ^{daß} Dispersion $c = c(k)$ ^{vorliegt}. In Metallen ist gelegentlich $n < 1$, also $c > c_{\text{vak}}$. Dies ist jedoch nur eine *geometrische* Geschwindigkeit (die Geschwindigkeit eines gedachten Punktes gleicher Phase, wie die Tracegeschwindigkeit). Die *physikalische* Wellengeschwindigkeit ist die Gruppengeschwindigkeit, und $c_g \leq c_{\text{vak}}$ ist experimentell bestätigt.

An dieser Stelle ist mit wenigen Zusatzüberlegungen ein Bezug zur Quantentheorie herzustellen. Dieser Bezug ergänzt auch einige der Überlegungen in ~~in~~ Kap. 9 (Chaos-theorie) und Kap. 10 (hydrodynamische Energie-Wirbel-Theorie). Die Quantenmechanik identifiziert die Gruppengeschwindigkeit c_g der "Schrödinger - Materiewellen" mit der Teilchengeschwindigkeit, deren Geschwindigkeit natürlich kleiner als c_{vak} sein muß. Was haben Teilchen und Wellen gemeinsam? Die berühmte Formel $E = h\nu$ gilt für die Teilchenenergie im schwerelosen Raum. Diese ist (nichtrelativistisch) auch durch $(m/2)v^2$ gegeben:

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} \omega = \hbar \omega \stackrel{!}{=} \frac{m}{2} v^2 \quad \text{mit } \hbar = h/2\pi$$

Ein Teilchen mit dieser Energie soll also durch ein Wellenpaket dargestellt werden, dessen Gruppengeschwindigkeit $v_g = d\omega/dk = v$ ist:

$$\frac{d}{dk} \left[\frac{m}{2\hbar} v^2 \right] \stackrel{!}{=} v$$

Dies wird erreicht durch $k = \frac{mv}{\hbar}$, denn dann ist $dk = \frac{m}{\hbar} dv$ und

$$\frac{d}{dk} \left[\frac{m}{2\hbar} v^2 \right] = \frac{d}{dv} \left[\frac{1}{2} v^2 \right] = v$$

Wegen $mv = p$ (nichtrelativistischer Impuls) haben wir das Gleichungspaar

$$(C-32) \quad E = \hbar\omega$$

$$(C-33) \quad p = \hbar k$$

Dies sind die *De Broglie-Relationen*, die die Korrespondenz der Klassischen Mechanik zur Quantenmechanik (Wellenmechanik) begründen. Aus $p = \hbar k$ folgt auch sofort die *Heisenberg'sche Unschärferelation*: Multipliziert man $\Delta k = 2\pi/\Delta x$, also $\Delta x \cdot \Delta k/2\pi = 1$, mit \hbar und verwendet $p = \hbar k/2\pi$, so ergibt sich

$$(C-34) \quad \Delta x \cdot \Delta p = \hbar$$

Diese Unschärferelation hat auch eine Bedeutung im Zusammenhang mit der modernen *Chaos-Theorie* (\rightarrow Kap. 9), da die sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen in klassischen Systemen grundsätzlich einen anderen Stellenwert erhält, wenn diese *prinzipiell* nicht exakt, sondern nur unscharf vorgeben werden können.

Nach bisheriger Lehrmeinung erstreckte sich die Korrespondenz zwischen der Quantentheorie und der klassischen Physik *nicht* auf den Spin (Eigendrehimpuls der Elementarteilchen), welchen die Quantentheorie über Schrödingers Theorie der Materiewellen *hinaus* einführen muß. Jedoch hat die Névir'sche Verallgemeinerung der hydrodynamischen Hamilton'schen "Energie-Theorie" zu einer Energie - Wirbel - Theorie als "Nebenergebnis" auch ein solches bisher nicht bekanntes Korrespondenzprinzip zur Folge (\rightarrow Kap. 10.5). Diese Neuformulierung der Hydrodynamik, in der die meteorologisch so wichtige Wirbelgröße die gleiche fundamentale Bedeutung hat wie die Hamiltonfunktion, liefert auch eine Korrespondenz zur quantenmechanischen Spin - Formulierung!