

## ANHANG B KUGELKOORDINATEN UND - FUNKTIONEN

### B.1 DIE GRUNDGLEICHUNGEN IN KUGELKOORDINATEN

#### B.1(a) Bewegungsgleichung

In Kap. 1.1(a) wurden die generalisierten Koordinaten  $p_i, q_i$  der Hamiltonfunktion angesprochen. Wegen der Kugelgestalt der Erde ist es für die Meteorologie nahelegend, insbesondere bei der Untersuchung globaler Aspekte, statt der kartesischen Koordinaten  $q_i = x, y, z$  Kugelkoordinaten  $q_i = \lambda, \varphi, r$  zu verwenden, wobei  $\lambda$  der Längswinkel ist, der den Abstand vom Greenwich - Meridian mißt, und  $\varphi$  der Breitenwinkel, der den Abstand vom Äquator mißt. Kugelkoordinaten werden auch zur Definition des Raumwinkels verwendet ( $\rightarrow$  Kap. 7.2(b), Formel (7-7)). In der dortigen Skizze entspricht der "Horizont" dem Äquator, der "Zenit" dem Nordpol und der Azimutwinkel  $\alpha$  entspricht der geographischen Länge  $\lambda$ . Die Breite  $\varphi$  als "Äquator-Abstandswinkel" entspricht dort einem "Horizont-Abstandswinkel", also *nicht* dem in Kap. 7.2(b) verwendeten "Zenit-Abstandswinkel"  $\vartheta \triangleq 90^\circ - \varphi$ . - Die generalisierten Geschwindigkeiten sind gegeben durch

$$\dot{q}_i = dq_i/dt = \dot{\lambda}, \dot{\varphi}, \dot{r} \quad \text{Bei Anwendung des Operators}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial}{\partial q_3}$$

auf  $q_i$  selbst muß sich eine Identität mit  $\dot{q}_i$  ergeben:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \dot{q}_1 \frac{\partial q_i}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial q_i}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial q_i}{\partial q_3} = \dot{q}_i \rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}$$

Das bedeutet, daß die generalisierten Koordinaten zeitunabhängig und orthogonal sein müssen. Die generalisierten Geschwindigkeiten werden verwendet in der in Kap. 1.6 und in Kap. 10.1(a) erwähnten Lagrange-Funktion zweiter Art. Sie wird mit der Kinetischen Energie  $K$  und der Potentiellen Energie  $\Phi$  gebildet und lautet im *Absolutsystem*

$$L = K^{(A)}(q_i, \dot{q}_i) - \Phi^{(A)}(q_i)$$

Hinkelmann (1969) überführt die Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten durch eine entsprechende Spezialisierung der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten. Als Bewegungsgleichung verwendet Hinkelmann (1969):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q_k}$$

Verglichen mit den in Anhang D.3 angegebenen Lagrange-Gleichungen II. Art ist hier jedoch durch den Druckgradienten  $\partial p / \partial q_k$  eine "Mischform" mit einer Euler'schen

Darstellung vorgegeben worden. Das Problem der Gewinnung einer Euler'schen Hydrodynamik aus dem Hamiltonprinzip ist hier also *nicht* gelöst worden ( $\rightarrow$  jedoch Kap. 10.3(c)). - Die Gewinnung der sphärischen Bewegungsgleichung gelingt aber dennoch. Zunächst bestimmen wir die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten *im Absolutsystem*, wo wir den Wind mit  $\mathbf{v}_a$  bezeichnen:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}_a^2 - \Phi^{(A)}(x, y, z) = \frac{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2}{2} - \Phi^{(A)}(x, y, z)$$

(Im Relativsystem muß man  $K^{(A)}$  und  $\Phi^{(A)}$  durch Relativkoordinaten ausdrücken). Wegen  $\partial L / \partial v_{ax} = v_{ax}$  und  $-\partial L / \partial x = \partial \Phi^{(A)} / \partial x$  folgt sofort

$$\frac{dv_{ax}}{dt} = - \frac{\partial \Phi^{(A)}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \nabla \Phi^{(A)} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Um zu Kugelkoordinaten überzugehen, verwenden wir folgende Beziehungen zwischen den kartesischen und den sphärischen Inkrementen

$$(B-1) \quad \delta\varphi = \frac{\delta y}{r} ; \quad \delta\lambda = \frac{\delta x}{r \cos\varphi} ; \quad \delta r = \delta z \quad \text{so daß}$$

$$(B-2) \quad v_y = r\dot{\varphi} \equiv v_\varphi, \quad v_x = r \cos\varphi \dot{\lambda} \equiv v_\lambda, \quad v_z = \dot{r} \equiv v_r$$

Dabei sind die Größen  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{r}$  generalisierte Geschwindigkeiten,  $v_\varphi$ ,  $v_\lambda$  und  $v_r$  jedoch *nicht*. - In der Lagrange-Funktion werden jetzt die Kinetische und die Potentielle Energie im Absolutsystem durch den Relativwind  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_f$  und das Schwerepotential ("effektives Potential")  $\Phi = \Phi^{(A)} - \mathbf{v}_f^2/2$  ausgedrückt ( $\rightarrow$  Kap. 2.2(f)):

$$\text{mit} \quad L = \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_f)^2 - \left( \Phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}_f^2 \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_f) - \Phi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= r \cos\varphi \dot{\lambda} \mathbf{e}_\lambda + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{v}_f &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = [\omega \sin\varphi \mathbf{e}_r + \omega \cos\varphi \mathbf{e}_\varphi] \times r \mathbf{e}_r = r \omega \cos\varphi \mathbf{e}_\lambda \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_f &= r^2 \omega \cos^2\varphi \dot{\lambda} \end{aligned}$$

durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[ r^2 \cos^2\varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 + 2r^2 \omega \cos^2\varphi \dot{\lambda} \right] - \Phi(\lambda, \varphi, r) \quad \text{oder} \\ L &= \frac{1}{2} \left[ r^2 \cos^2\varphi \left[ \dot{\lambda}^2 + 2 \omega \dot{\lambda} \right] + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right] - \Phi(\lambda, \varphi, r) \end{aligned}$$

Das ergibt die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( r^2 \cos^2\varphi \left[ \dot{\lambda} + \omega \right] \right) - \left( - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\varphi} \right) - \left( r^2 \cos\varphi \left[ \dot{\lambda}^2 + 2 \omega \dot{\lambda} \right] (-\sin\varphi) - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{d}{dt} (\dot{r}) - \left( r \cos^2\varphi \left[ \dot{\lambda}^2 + 2 \omega \dot{\lambda} \right] + r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \end{aligned}$$

Entsprechend (B-2) werden hier  $v_\varphi$ ,  $v_\lambda$ ,  $v_r$  eingesetzt:

$$\frac{d}{dt} \left( r \cos\varphi v_\lambda + r^2 \cos^2\varphi \omega \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (i)$$

$$\frac{d}{dt} \left( r v_\varphi \right) + \underline{v_\lambda^2 \tan\varphi} + \underline{v_\lambda} 2\omega r \sin\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (ii)$$

$$\frac{d}{dt} v_r - \frac{v_\lambda^2}{r} - \underline{v_\lambda} 2\omega \cos\varphi - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (iii)$$

Durch Anwendung der Produkt- und Kettenregel für (i) und (ii), durch Division von (i) und (ii) durch  $r \cos\varphi$  bzw.  $r$  sowie mit  $f = 2\omega \sin\varphi$ ,  $l = 2\omega \cos\varphi$  ergibt sich

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{v_\lambda v_r}{r} - \underline{v_\lambda v_\varphi \frac{\tan\varphi}{r}} + \underline{l v_r} - f v_\varphi = - \frac{1}{r \cos\varphi \rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (i)$$

$$(B-3) \quad \frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \underline{v_\lambda^2 \frac{\tan\varphi}{r}} + f v_\lambda = - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (ii)$$

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\lambda^2}{r} - \frac{v_\varphi^2}{r} - \underline{l v_\lambda} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (iii)$$

wobei die totale Ableitung in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$(B-4) \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{r \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \underline{v_r} \frac{\partial}{\partial r}$$

In der Literatur werden die drei Komponentengleichungen (B-3) und die totale Ableitung (B-4) häufig ohne *die* Terme ~~an~~ geschrieben, welche hier durch Unterstriche gekennzeichnet sind. Eine "großräumige Scale - Analyse" ergibt, daß sie gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden können. - Kann man diese sphärischen Gleichungen auch *ohne* den "Umweg" über *generalisierte* Koordinaten gewinnen, indem man die bekannten *kartesischen* Komponentengleichungen mit Hilfe von (B-1) und (B-2) *direkt* überführt? Die x-Komponente der Bewegungsgleichung lautet nach Kap 3.1(b)

$$\frac{dv_x}{dt} = f v_y - l v_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

also nach Anwendung von  $v_x = v_\lambda$ ,  $v_y = v_\varphi$ ,  $v_z = v_r$ ,  $\delta\lambda = \delta x / (r \cos\varphi)$ :

$$\frac{dv_\lambda}{dt} = f v_\varphi - l v_r - \frac{1}{\rho r \cos\varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (FEHLER !)$$

Dies wäre offenbar falsch, denn gegenüber (B-3) (i) fehlten zwei Terme, nämlich  $v_\lambda v_r / r$  und  $v_\lambda v_\varphi \tan\varphi / r$ . *Eine direkte Überführung einer in kartesischen Komponenten geschriebenen Gleichung in Kugelkoordinaten ist also nicht erlaubt!* Sowohl die kartesischen als auch die sphärischen Komponentengleichungen (B-3) kann man nur

"direkt" gewinnen, *entweder* durch Spezialisierung von Gleichungen in *generalisierten* Koordinaten *oder* durch Komponentenzzerlegung aus *vektoriellen* Gleichungen. Die Herleitung der sphärischen Gleichungen aus kartesischen Gleichungen führt jedoch zu den hier aufgedeckten Fehlern. Um den Grund dafür kennenzulernen, betrachten wir im folgenden die Komponentenzzerlegung der *vektoriellen* Bewegungsgleichung nach sphärischen Koordinaten. Dazu reicht es aus, den vektoriellen nichtlinearen Advektionsterm zu betrachten:

$$(B-5) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left( v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{r \cos \varphi \partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{\partial}{r \partial \varphi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right)$$

Das erste Skalarprodukt kann ausmultipliziert werden. So erhält man den *Advektionsoperator* in Kugelkoordinaten:

$$(B-6) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{v_\lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial}{\partial r}$$

Bei der "anschließenden" Anwendung dieses Operators auf  $\mathbf{v} = v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k}$  ist die Produktregel zu beachten, denn es sind *auch* Ableitungen nach den Basisvektoren zu bilden! Diese verschwinden *nur bei Verwendung kartesischer Koordinaten!* Hier ist also unbedingt die REGEL zu beachten, daß man bei der Zerlegung einer Vektorgleichung in nichtkartesische Koordinaten *erst* differenzieren muß, und *dann* erst die Komponentenbildung durch Multiplikation mit den Basisvektoren vollziehen darf. Bildet man nämlich schon im ersten Schritt die Komponenten, so fallen bei der entsprechenden Skalarmultiplikation die Basisvektoren in  $v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k}$  fort, auf die aber der Operator (B-6) im Rahmen der Produktregel noch zugreifen müßte! Genau dieser Fehler ist bei dem "~~verbotenen~~ Umweg" der Ableitung sphärischer Gleichungen über kartesische Gleichungen geschehen. Daraus folgt aber, daß auch eine vektorielle horizontale Bewegungsgleichung *nicht* direkt in sphärische Koordinaten zerlegt werden darf, da auch hier bereits "vorzeitige" (horizontale) Komponentenbildungen stattgefunden haben, die eine Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit von  $\mathbf{k}$  verhindern. Die Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit der Basisvektoren in Kugelkoordinaten erfolgt über die dreidimensionalen Frenet'schen Formeln:

$$(B-7) \quad \begin{array}{lll} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \lambda} = \sin \varphi \mathbf{j} - \cos \varphi \mathbf{k} & \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \lambda} = -\sin \varphi \mathbf{i} & \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \varphi} = -\mathbf{k} & \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \lambda} = \cos \varphi \mathbf{i} & \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = \mathbf{j} & \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial r} = 0 \end{array}$$

Berücksichtigt man diese Formeln in der Auswertung der advektiven Beschleunigung

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left( \frac{v_\lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right)$$

und führt *man* die Komponentenbildungen durch Skalarmultiplikation mit  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  erst danach durch, so erhält man (B-3) *mit allen Termen*. - Auch bei der Verwendung der natürlichen Koordinaten in Kap.3.3(a) mußten wir nichtverschwindende Ableitungen der Basisvektoren berücksichtigen. Das geschah mit Hilfe der "Frenet'schen Formeln in der Ebene" (3-25):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \kappa_s \mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = - \kappa_s \mathbf{t} \quad \text{mit } \kappa_s = \frac{1}{R_s}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} = \kappa_n \mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial n} = - \kappa_n \mathbf{t} \quad \text{mit } \kappa_n = \frac{1}{R_n}$$

Die entsprechenden sphärischen Formeln (B-7) sind einerseits natürlich allgemeiner, weil sie die dritte Dimension ins Spiel bringen (daher sind es 9 statt 4 Gleichungen), andererseits sind sie spezieller, weil statt der beliebigen und ortsabhängigen Krümmungen  $\kappa_s$  und  $\kappa_n$  nur die Krümmungen  $1/r$  bzw.  $1/(r \cos \varphi)$  von Längen- und Breitenkreisen auftreten können. - Zur weiteren Veranschaulichung betrachten wir nacheinander die Änderungen in  $\varphi$ -,  $r$ - und  $\lambda$ - Richtung.

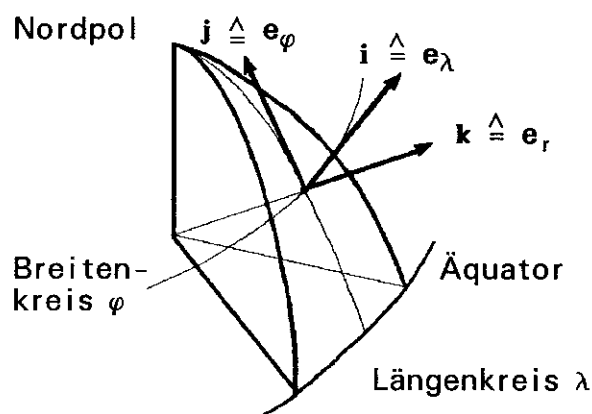
**Ableitungen nach  $\varphi$ :** Die Schnittebene durch einen Längenskreis  $\lambda$  ( $\lambda = \text{const}$ ) ist eine Ebene, in der die Frenet'schen Formeln (3-25) gelten, wobei  $\mathbf{j} \hat{=} \mathbf{t}$  der Tangentialvektor ist, -  $\mathbf{k} \hat{=} \mathbf{n}$  der Normalvektor und  $\mathbf{i}$  der "Binormalvektor". Der letztere bleibt konstant in der Schnittebene, d.h.  $\partial \mathbf{i} / \partial \varphi = 0$ . Weiterhin folgt

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \varphi} = r \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \hat{=} r \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = r \kappa_s \mathbf{n} \hat{=} \frac{r}{r} (-\mathbf{k}) \quad \text{q.e.d}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = r \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y} \hat{=} r \frac{\partial (-\mathbf{n})}{\partial s} = r \kappa_s \mathbf{t} \hat{=} \frac{r}{r} \mathbf{j} \quad \text{q.e.d}$$

**Ableitungen nach  $r$ :** Bei Änderung von  $r$  bleiben  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  invariant, daher verschwinden alle Ableitungen nach  $r$ .

**Ableitungen nach  $\lambda$ :** Die Schnittebene durch einen Breitenkreis  $\varphi$  ( $\varphi = \text{const}$ ) ist keine Ebene, in der die Frenet'schen Formeln gelten: Zwar ist  $\mathbf{i}$  der Tangentialvektor an den Breitenkreis  $\varphi = \text{const}$ , aber weder  $\mathbf{j}$  noch  $\mathbf{k}$  liegen in der Ebene und weder  $\mathbf{j}$  noch  $\mathbf{k}$  können der Normalvektor sein. (Es ist keine "Schmiegeebene")! Daher sind die Ableitungen nach  $\lambda$  innerhalb (B-7) nicht aus den Frenet'schen Formeln in der Ebene erklärbar! Wir begnügen uns mit einer Plausibilitätsbetrachtung: Eine "Fahrt" auf einem Längenskreis ist eine Fahrt "über einen Berg". Dabei "senkt sich"  $\mathbf{j}$ , d.h.  $\partial \mathbf{j} / \partial \varphi = - \mathbf{k}$ , und  $\mathbf{k}$  "kippt nach vorn" d.h.  $\partial \mathbf{k} / \partial \varphi = \mathbf{j}$ . Dies ist eine *qualitative Begründung der Ableitung nach  $\varphi$* , aber wir können die gleiche Betrachtung *auch für die Ableitungen nach  $\lambda$*  anstellen: Eine "Fahrt" auf einem Breitenkreis ist eine Fahrt "über den Berg" und "durch eine Linkskurve", wie die folgende Skizze veranschaulicht.



$\mathbf{k}$  ist der Normalvektor nach oben. Er wird durch die Linkskurve nicht beeinflusst, aber er kippt wegen der "Bergfahrt" nach vorn, d.h.  $\partial \mathbf{k} / \partial \lambda \cong \mathbf{i}$

$\mathbf{j}$  ist der Normalvektor nach links. Er wird durch die Fahrt "über den Berg" nicht beeinflusst, aber dreht sich wegen der Linkskurve "nach hinten weg", d.h.  $\partial \mathbf{j} / \partial \lambda \cong -\mathbf{i}$

$\mathbf{i}$  ist der Tangentialvektor. Er dreht sich in der Kurve nach links und er senkt sich wegen der "Bergfahrt", d.h.  $\partial \mathbf{i} / \partial \lambda \cong \mathbf{j}$  und  $\partial \mathbf{i} / \partial \varphi \cong -\mathbf{k}$ .

Die Faktoren in diesen Proportionalitätsbeziehungen sind  $\sin \varphi$  bzw.  $\cos \varphi$ . Auch das ist plausibel: Der "Kurveneffekt" ist proportional zu  $\sin \varphi$  (er ist in Polnähe am größten und verschwindet am Äquator). Der "Bergeffekt" ist proportional zu  $\cos \varphi$  (er verschwindet bei der engen "Umkreisung" des Nordpols und ist am Äquator am größten).

### B.1(b) Kontinuitätsgleichung

Auch die Überführung der Kontinuitätsgleichung in Kugelkoordinaten wurde von Hinkelmann (1969) durch Spezialisierung generalisierter Koordinaten und Geschwindigkeiten vorgenommen. Bei Verwendung der Summenkonvention gilt

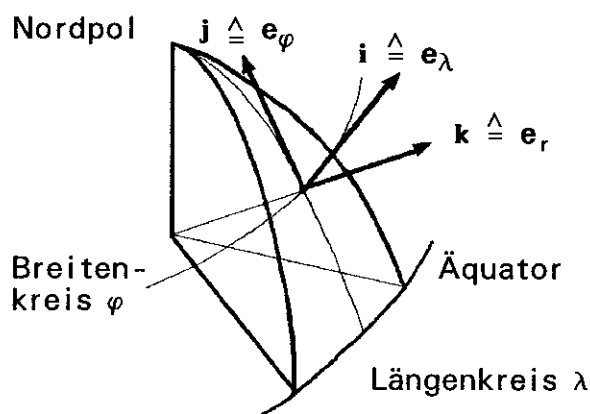
$$(B-8) \quad \frac{1}{\rho D} \frac{d}{dt} (\rho D) + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = 0$$

wobei D folgendermaßen aus einer Determinante zu gewinnen ist:

$$(B-9) \quad D = \sqrt{\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|} = \sqrt{\left| \frac{\partial^2 K^{(A)}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|}$$

Da in der Determinante  $D^2$  nur Ableitungen nach generalisierten Geschwindigkeiten vorkommen, ist von

$$L = K^{(A)}(\dot{q}_i, q_j) - \Phi^{(A)}(q_j)$$



$\mathbf{k}$  ist der Normalvektor nach oben. Er wird durch die Linkskurve nicht beeinflusst, aber er kippt wegen der "Bergfahrt" nach vorn, d.h.  $\partial \mathbf{k} / \partial \lambda \cong \mathbf{i}$

$\mathbf{j}$  ist der Normalvektor nach links. Er wird durch die Fahrt "über den Berg" nicht beeinflusst, aber dreht sich wegen der Linkskurve "nach hinten weg", d.h.  $\partial \mathbf{j} / \partial \lambda \cong -\mathbf{i}$

$\mathbf{i}$  ist der Tangentialvektor. Er dreht sich in der Kurve nach links und er senkt sich wegen der "Bergfahrt", d.h.  $\partial \mathbf{i} / \partial \lambda \cong \mathbf{j}$  und  $\partial \mathbf{i} / \partial \lambda \cong -\mathbf{k}$ .

Die Faktoren in diesen Proportionalitätsbeziehungen sind  $\sin \varphi$  bzw.  $\cos \varphi$ . Auch das ist plausibel: Der "Kurveneffekt" ist proportional zu  $\sin \varphi$  (er ist in Polnähe am größten und verschwindet am Äquator). Der "Bergeffekt" ist proportional zu  $\cos \varphi$  (er verschwindet bei der engen "Umkreisung" des Nordpols und ist am Äquator am größten).

### B.1(b) Kontinuitätsgleichung

Auch die Überführung der Kontinuitätsgleichung in Kugelkoordinaten wurde von Hinkelmann (1969) durch Spezialisierung generalisierter Koordinaten und Geschwindigkeiten vorgenommen. Bei Verwendung der Summenkonvention gilt

$$(B-8) \quad \frac{1}{\rho D} \frac{d}{dt} (\rho D) + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = 0$$

wobei  $D$  folgendermaßen aus einer Determinante zu gewinnen ist:

$$(B-9) \quad D = \sqrt{\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|} = \sqrt{\left| \frac{\partial^2 K^{(A)}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|}$$

Da in der Determinante  $D^2$  nur Ableitungen nach generalisierten Geschwindigkeiten vorkommen, ist von

$$L = K^{(A)}(\dot{q}_i, q_i) - \Phi^{(A)}(q_i)$$

nur der Summand  $K^{(A)}$  zu verwenden. Statt eines Beweises begnügen wir uns wie bei der Bewegungsgleichung mit einer "Probe" in kartesischen Koordinaten. Mit

$$K^{(A)} = \frac{1}{2} (v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2),$$

( $v_{ax}, v_{ay}, v_{az}$  sind die Komponenten des *absoluten Windes*), folgt

$$\left| \frac{\partial^2 K^{(A)}}{\partial v_{a_i} \partial v_{a_j}} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

d.h.  $D = 1$ . Wegen  $\nabla \cdot \mathbf{v}_a = \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}_f) = \nabla \cdot \mathbf{v}$  (die Führungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_f = \omega \times \mathbf{r}$  ist divergenzfrei) folgt aus (B-8) die bekannte Kontinuitätsgleichung. - Nun spezialisieren wir <sup>uns</sup> auf Kugelkoordinaten und verwenden wieder die Komponenten  $v_x, v_y, v_z$  des *Relativwindes*.

$$\begin{aligned} K^{(A)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_f)^2 & \mathbf{v}_f &= r \omega \cos\varphi \mathbf{i} \rightarrow \\ &= \frac{1}{2} \left( [v_\lambda + r \omega \cos\varphi] \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right)^2 & v_\lambda &= r \cos\varphi \dot{\lambda} \rightarrow \\ &= \frac{1}{2} \left( r^2 \cos^2\varphi [\dot{\lambda} + \omega]^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right) \end{aligned}$$

Hier mußten die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i = \dot{\lambda}, \dot{\varphi}, \dot{r}$  eingesetzt werden, weil nach ihnen abzuleiten ist:

$$\left| \frac{\partial^2 K^{(A)}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| = \begin{vmatrix} r^2 \cos^2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r^4 \cos^2\varphi$$

Aus  $D = r^2 \cos\varphi$  und (B-8) ergibt sich:

$$\frac{1}{\rho r^2 \cos\varphi} \frac{d}{dt} (\rho r^2 \cos\varphi) + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2}{r} \dot{r} - \tan\varphi \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = 0$$

$$(B-10) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2v_r}{r} - \frac{\tan\varphi}{r} v_\varphi + \frac{1}{r \cos\varphi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \quad \text{oder}$$

$$(B-11) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r \cos\varphi} \left\{ \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v_\varphi \cos\varphi)}{\partial \varphi} \right\} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} = 0$$

Wegen  $|v_r| \ll v_\varphi$  ist nach einer Scaleanalyse der unterstrichene Term zu vernachlässigen. Vergleichen wir (B-10) mit der Vektorform  $(1/\rho)d\rho/dt + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  der Kontinuitätsgleichung, erhalten wir auch die Divergenz in Kugelkoordinaten:



$$(B-12) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\tan \varphi}{r} v_\varphi + \frac{2v_r}{r}$$

vergleicht man dies mit dem Advektionsoperator (B-6), so kommt noch einmal die Rolle der sphärischen Frenet'schen Formeln (B-7) zum Ausdruck: In (B-6) ist der Operator  $\nabla$  noch "hungrig". In (B-12) dagegen hat er schon  $\mathbf{v}$  und damit auch die Basisvektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  "verarbeitet". Daß tatsächlich die in (B-12) "zusätzlichen" Terme  $-v_\varphi \tan \varphi / r$  und  $2v_r / r$  aus den Frenet'schen Formeln (B-7) resultieren, zeigt eine explizite Berechnung von

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left[ \frac{\mathbf{i}}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{j}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial r} \right] \cdot \left[ v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right]$$

unter Beachtung der Produktregel und (B-7). Analog zur Umformung von (B-10) nach (B-11) gilt auch die Darstellung

$$(B-13) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v_\varphi \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r}$$

Die Kontinuitätsgleichung hat im Relativ- und im Absolutsystem die gleiche Form. Das liegt daran, daß die Divergenz der Führungsgeschwindigkeit  $\omega \cos \varphi \mathbf{i}$  verschwindet, was man bei Anwendung von (B-13) sofort sieht.

### B.1(c) Erster Hauptsatz

Drückt man den ersten Hauptsatz durch die Potentielle Temperatur aus, z.B. im adiabatischen Fall  $d\theta/dt = 0$ , so bereitet die Darstellung in Kugelkoordinaten keinerlei Probleme. Es ist lediglich die Form (B-4) des individuellen Zeitoperators zu verwenden. Die Frenet'schen Formeln (B-7) kommen nicht zur Anwendung, da nur der *Skalar*  $\theta$  abzuleiten ist. Schreibt man den adiabatischen ersten Hauptsatz allerdings in der Form  $\rho c_v dT/dt = -p \nabla \cdot \mathbf{v}$ , so kommen die Frenet'schen Formeln (B-7) doch zum Einsatz, und zwar mit dem Ergebnis (B-12) oder (B-13) für  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ .

### B.1(d) Barotrope Vorticitygleichung

Die barotrope Vorticitygleichung lautet im z-System:

$$(B-14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 \psi + \mathbf{J} \left[ \psi, \nabla_h^2 \psi + f \right] = 0$$

Sie entsteht aus (4-26) im p-System, wenn dort  $\partial \omega / \partial p = 0$  gesetzt wird und somit der Erste Hauptsatz abgekoppelt wird ( $\rightarrow$  Kap. 4.6). Zur Bestimmung des Laplace-Operators  $\nabla_h^2$  in Kugelkoordinaten sind wiederum die Frenet'schen Formeln (B-7) zu beachten:

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 &= \left( \mathbf{i} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \lambda} \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$(B-15) \quad \nabla_h^2 = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Obwohl nach der Produktregel  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{j}$  nach  $\lambda$  und  $\varphi$  abgeleitet werden, ergibt nur  $\partial \mathbf{j} / \partial \lambda = -\sin \varphi \mathbf{i}$  einen nichtverschwindenden Beitrag. Ferner ist in kartesischen Koordinaten mit beliebigem  $\alpha$

$$J(\psi, \alpha) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

also in Kugelkoordinaten mit (B-1):

$$J(\psi, \alpha) = \frac{\partial \psi}{r \cos \varphi} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \left\{ \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} \alpha$$

In (B-14) ist  $\alpha = \nabla_h^2 \psi + f$ . Offenbar folgt für den  $f$ -Anteil wegen  $f = 2\omega \sin \varphi$  (d.h.  $f$  hängt nicht von  $\lambda$  ab):

$$J(\psi, f) = \frac{2\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

Der ganze Jacobi-Operator in (B-14) lautet also

$$(B-16) \quad J\left(\psi, \nabla_h^2 \psi + f\right) = \left\{ \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} \nabla_h^2 \psi + \frac{2\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

mit (B-15) für  $\nabla_h^2 \psi$ . - Um die Vorticitygleichung (B-14) in Kugelkoordinaten zu formulieren, muß man nur noch die Operatoren in der Klammer der rechten Seite von (B-16) um  $\partial / \partial t$  ergänzen. Setzt man (B-15) ein und multipliziert die ganze Gleichung mit  $r^2$ , so folgt

(B-17)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} \cdot \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \tan \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right] + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0$$

Diese nichtlineare Gleichung wird in Kap. 3.13 analytisch gelöst! Dazu müssen jedoch im nächsten Kapitel noch einige mathematische Hilfsmittel bereitgestellt werden.

**B.2 LEGENDRE-POLYNOME UND KUGELFUNKTIONEN**

Die Legendre-Differentialgleichung lautet

$$(B-18) \quad \frac{d}{dx} \left( [1-x^2] \frac{d}{dx} \right) P_n(x) = -n(n+1) P_n(x)$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung:  $n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  sind *Eigenwerte*, die Legendre-Polynome  $P_n$  sind *Eigenfunktionen*. Sie gelten nur für  $x \in [-1, 1]$ . Die "*Lösungen 1. Art*" dieser Gleichung sind durch Polynome  $n$ -ten Grades gegeben:

$$(B-19) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

Die Legendre-Polynome sind "orthogonal" im Sinne der Funktionalanalysis, da

$$(B-20) \quad \int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nl}$$

Die ersten Legendre-Polynome sind gegeben durch

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2-1) = x$$

$$P_2 = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} (x^2-1)^2 \right) = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \left( 2(x^2-1) 2x \right) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3 = \frac{1}{48} \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} (x^2-1)^3 \right) \right) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

Durch direktes Einsetzen kann man zeigen, daß die Legendre-Differentialgleichung in allen Fällen erfüllt ist. (Natürlich muß auch noch "von  $n$  auf  $n+1$ " geschlossen werden). Die Berechnungen können durch eine Rekursionsformel vereinfacht werden:

$$P_n = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1} - \frac{n-1}{n} P_{n-2}$$

Ausgehend von  $P_0 = 1$  lassen sich die obigen Polynome für  $n = 1, 2, 3$  direkt nachrechnen, und darüberhinaus

$$P_4 = \frac{1}{8} \left( 35 x^4 - 30 x^2 + 3 \right)$$

$$P_5 = \frac{1}{8} \left( 63 x^5 - 70 x^3 + 15 x \right) \quad \text{u.s.w.}$$

Die Differentialgleichung für die "Zugeordneten Legendrepolynome", auch "*allgemeine Legendre'sche Differentialgleichung*" genannt, lautet:

$$(B-21) \quad \frac{d}{dx} \left( [1-x^2] \frac{d}{dx} \right) P_n^m(x) - \frac{m^2}{1-x^2} P_n^m(x) = -n(n+1) P_n^m(x)$$

Die Lösungen  $P_n^m$  sind wieder Polynome  $n$ -ten Grades, denn  $P_n$  wird  $m \leq n$  mal differenziert und mit einem Polynom  $m$ -ten Grades multipliziert. Sie lauten:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad \text{mit} \quad m \leq n \quad \text{Beispiele:}$$

$$P_0^0 = P_0 = 1$$

$$P_1^0 = P_1 = x$$

Es gilt allgemein  $P_n^0 = P_n$  !

$$P_1^1 = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} x = (1-x^2)^{1/2}$$

$$P_2^0 = P_2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_2^1 = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} P_2 = (1-x^2)^{1/2} 3x$$

$$P_2^2 = (1-x^2) \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} P_2 \right) = (1-x^2) \frac{d}{dx} 3x = 3(1-x^2)$$

:

$$P_5^4 = (1-x^2)^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{8} (63 x^5 - 70 x^3 + 15 x) \right) \right) \right)$$

$$P_5^4 = 945 x (1-x^2)^2$$

Durch Transformation der Variablen

$$x = \sin\varphi, \quad dx = \cos\varphi d\varphi$$

erhält man eine trigonometrische Darstellung. Da  $x \in [-1, 1]$ , ist  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ .  $\varphi$  entspricht der Breite ("latitude") auf der Erdkugel. In der Physik ist es üblich eine andere Transformation durchzuführen:  $x = \cos\varphi$ , d.h.  $dx = -\sin\varphi$ . In diesem Fall ist  $\varphi \in [-\pi, 0]$ .  $\varphi$  wird dann "colatitude" genannt. Nach dieser Transformation erhält man die <sup>schöne</sup> Legendre Differentialgleichung sowie die Lösungen 1. Art:

$$(B-22) \quad \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} - \tan\varphi \frac{d}{d\varphi} \right] P_n(\sin\varphi) = -n(n+1) P_n(\sin\varphi) \quad \text{mit}$$

$$P_n(\sin\varphi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\sin\varphi)^n} (-\cos^2\varphi)^n$$

sowie die allgemeine Legendre'sche Differentialgleichung und die zugeordneten Legendrepolynome

$$(B-23) \quad \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} - \tan\varphi \frac{d}{d\varphi} - \frac{m^2}{\cos^2\varphi} \right] P_n^m(\sin\varphi) = -n(n+1) P_n^m(\sin\varphi) \quad \text{mit}$$

$$P_n^m(\sin\varphi) = \cos^m\varphi \frac{d^m}{d(\sin\varphi)^m} P_n(\sin\varphi)$$

Sowohl die gewöhnlichen als auch die zugeordneten Legendrepolynome hängen von *einer* Variablen ab ( $x$  bzw.  $\varphi$ ) und können daher nicht auf einer Kugeloberfläche definiert sein. Eine echte Kugelflächenfunktion ist dagegen

$$(B-24) \quad Y_n^m = N_{nm} e^{im\lambda} P_n^m(\sin\varphi) \quad , \quad m \leq n$$

da durch den Exponentialfaktor zur "Breitenabhängigkeit"  $\varphi$  eine "Längenabhängigkeit" hinzugefügt worden ist. ( $N_{nm}$  sind Normierungsfaktoren).

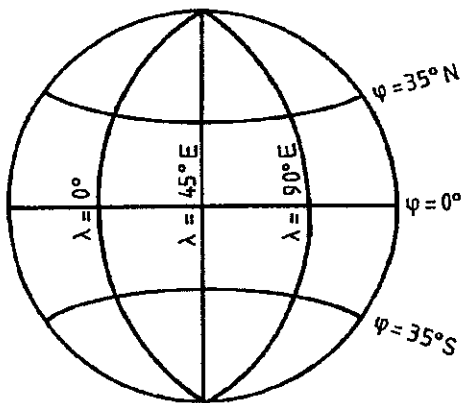
$Y_n^m$  genügt der Differentialgleichung, die aus der "allgemeinen" Legendre-Differentialgleichung durch die Ersetzung  $m^2 \rightarrow -\partial^2/\partial\lambda^2$  entsteht. Das sieht man durch Einsetzen und Abseparieren der  $\varphi$ -Abhängigkeit. Die Differentialgleichung für Kugelflächenfunktionen lautet also

$$(B-25) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \tan\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \right] Y_n^m(\lambda, \varphi) = -n(n+1) Y_n^m(\lambda, \varphi)$$

Durch Vergleich mit (B-15) stellen wir fest, daß die Kugelflächenfunktionen die Eigenfunktionen des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten sind, mit den Eigenwerten  $n(n+1)$ . Die Kugelflächenfunktionen lösen die "homogene Potentialgleichung". Für uns ist interessant, daß der Laplace-Operator auch Bestandteil der barotropen Vorticitygleichung (B-17) ist.

Geometrische Veranschaulichung der ersten Kugelflächenfunktionen durch ihre Knotenlinien (Nulllinien):

In allen folgenden graphischen Darstellungen blicken wir auf die Erdkugel "von Pol zu Pol" und von den Längen 45°W bis 135°E. Wir benutzen also ein "Gesichtsfeld" der Erde, das durch das folgende Schemabild der Kugel wiedergegeben ist:



Gesichtsfeld:  
 $\lambda = 45 \text{ W bis } 135 \text{ E}$

Auf Normierungen  $N_{nm}$  wird im folgenden nicht geachtet.

■  $Y_0^0 = 1$

(bis auf Normierung). Hier gibt es keine Knotenlinien. Die Kugelflächenfunktion ist immer positiv.

Knotenlinien von  $Y_1^m$ :

- $Y_1^0 = P_1 = x = \sin\varphi \stackrel{!}{=} 0$

d.h. die Knotenlinie befinden sich bei  $\varphi = 0$

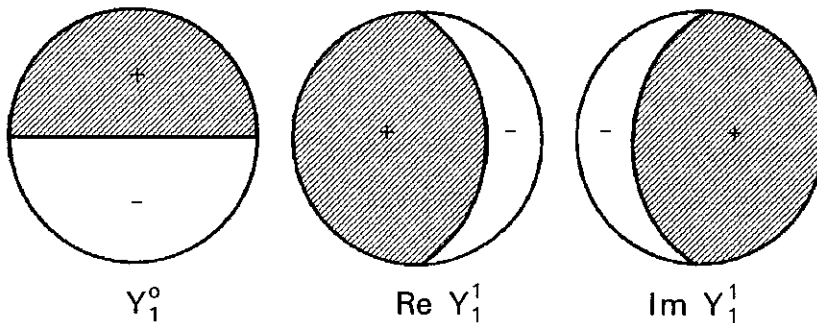
- $Y_1^1 = e^{i\lambda} P_1^1 = e^{i\lambda} (1 - x^2)^{1/2} = e^{i\lambda} \cos\varphi = \cos\lambda \cos\varphi + i \sin\lambda \cos\varphi \stackrel{!}{=} 0$

Da  $\cos\varphi$  nur an den Polen verschwindet, ist

$\cos\lambda \cos\varphi = 0$  wenn  $\cos\lambda = 0$  d.h. für  $\lambda = 90^\circ$  und

$\sin\lambda \cos\varphi = 0$  wenn  $\sin\lambda = 0$  d.h. für  $\lambda = 0^\circ$

Das ergibt für den Realteil im "Gesichtsfeld" eine Knotenlinie bei  $\lambda=90^\circ$ , und für den Imaginärteil eine Knotenlinie bei  $\lambda=0^\circ$ :

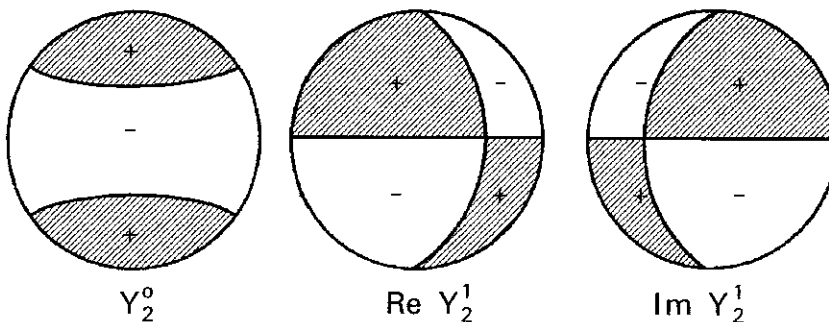


Knotenlinien von  $Y_2^m$ :

- $Y_2^0 = P_2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \sin^2\varphi - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$  das gilt für  $\sin^2\varphi = \frac{1}{3}$ , d.h.  $\sin\varphi = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow$  Knotenlinien bei  $\varphi \cong \pm 35^\circ$

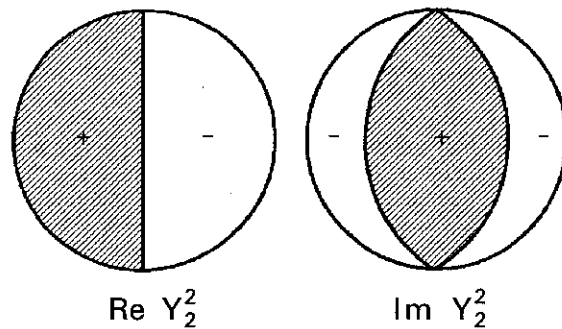
- $Y_2^1 = e^{i\lambda} P_2^1 = e^{i\lambda} 3 x (1-x^2)^{1/2} = 3 e^{i\lambda} \sin\varphi \cos\varphi = 3 \cos\lambda \cos\varphi \sin\varphi + 3 i \sin\lambda \cos\varphi \sin\varphi \stackrel{!}{=} 0$

Die Knotenlinien des Realteiles liegen bei  $\lambda = 90^\circ, \varphi = 0^\circ$ , die des Imaginärteiles bei  $\lambda = 0^\circ, \varphi = 0^\circ$ :



$$\begin{aligned} \blacksquare Y_2^2 &= e^{i2\lambda} 3(1 - x^2) = 3 e^{i2\lambda} \cos^2\varphi \\ &= 3 \cos 2\lambda \cos^2\varphi + 3 i \sin 2\lambda \cos^2\varphi \quad \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die Knotenlinien des Realteiles liegen bei  $\lambda = \pm 45^\circ$ ,  $\lambda = 135^\circ$ , die des Imaginärteiles bei  $\lambda = 0^\circ, \lambda = 90^\circ$ .



Im linken Bild ist zu beachten, daß die äußere Berandung des "Gesichtsfeldes" *auch* Knotenlinien sind (die Nulllinien bei  $\lambda = -45^\circ$  und bei  $\lambda = 135^\circ$ ).

Zusammenfassung: In *allen Beispielen* haben  $Y_n^m$  :

- nur breitenkreisparallele Knotenlinien, falls  $m = 0$
- nur längenkreisparallele Knotenlinien, falls  $m = n$
- Schnittpunkte von Knotenlinien, falls  $0 < m < n$

Dies gilt auch allgemein. Daher nennt man  $Y_n^m$  :

- zonale Kugelflächenfunktionen, falls  $m = 0$
- sektorielle Kugelflächenfunktionen, falls  $m = n$
- tesserale Kugelflächenfunktionen, falls  $0 < m < n$

Ferner erkennt man, daß  $2m$  die Zahl der Nulldurchgänge auf den Breitenkreisen ist, und  $n-m$  die Zahl der Nulldurchgänge von Pol zu Pol. Daher nennt man  $m$  die Wellenzahl auf den Breitenkreisen, und  $n-m$  "meridionale" Wellenzahl.