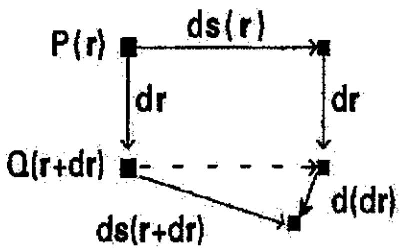
ANHANG A DEFORMATIONEN, SPANNUNGEN UND FLUIDE

A.1 DEFORMATIONSTENSOR

"Hydrodynamische Teilchen", also *Fluidteilchen* , können sich z.B. erwärmen oder deformieren. Sie haben *innere Eigenschaften*, im Gegensatz zu den *Massenpunkten* der "normalen" Mechanik. Man kann sich vorstellen, dass das Fluid in winzige materielle Einheiten aufgeteilt wird, in eben solche Fluidteilchen. Es ist sehr anschaulich, dass diese während der Strömung i.A. ihre *Form* ändern. Luftteilchen ändern i.A. auch ihre *Größe*, da Luft ein *kompressibles* Fluid ist. Wir unterscheiden also zwischen den eigenschaftsbehafteten *Luft- oder Fluidteilchen* und den rein geometrisch definierten eigenschaftslosen *Massenpunkten* (*Molekülen*) des hydrodynamischen Mediums. In diesem Sinne sind die im Exkurs E.3(c) betrachteten flüssigen Quadrate 2D-"Fluidteilchen". Die Eckpunkte dieser Quadrate, deren Bewegungen die kinematischen Größen Divergenz D, Vorticity ζ, Scherungs- und Streckungsdeformation χ, ϑ veranschaulichen, sind hingegen "Massenpunkte" oder "Subteilchen" der Fluidteilchen.

Wenn man nur *einen* Massenpunkt P innerhalb eines strömenden Fluids verfolgt, so erhält man hieraus keinerlei Information über Deformationen oder Rotationen des Fluidteilchens. Wenn man jedoch *zwei* beliebige Massenpunkte P(**r**) und Q(**r**+d**r**) verfolgt, und dabei den Relativ-Vektor d**r** zwischen ihnen betrachtet, so kann man z.B. die Strömung als reine Translationsbewegung identifizieren, wenn sich d**r** für keines der betrachteten Punktepaare ändert, wenn also in der folgenden Skizze der Punkt Q(**r**+d**r**) auf der gestrichelten Linie wandert, so dass d(d**r**) = 0:



Wenn sich aber die Verschiebungsvektoren von P und Q, also d**s**(**r**) und d**s**(**r**+d**r**), voneinander unterscheiden, *verändert* sich auch der Relativ-Vektor d**r**, so dass d(d**r**) ≠ 0. Man kann die Gleichung

$$d(d\mathbf{r}) \;=\; d\mathbf{s}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) \;-\; d\mathbf{s}(\mathbf{r}) \;\neq\; 0$$

als *Bedingung* dafür ansehen, dass der "starren" Translationsbewegung des Luftteilchens als Ganzem noch Rotations- und/oder Deformationsbewegungen überlagert sind. Berücksichtigt man nur den linearen Term $\mathbf{ds}(\mathbf{r}+\mathbf{dr})=\mathbf{ds}(\mathbf{r})+\mathbf{dr}\cdot\nabla(\mathbf{ds})$ einer Taylorentwicklung, so folgt als Bedingung für Rotation und/oder Deformation:

(A-1) $\quad d(\mathbf{dr}) = \mathbf{dr}\cdot\nabla(\mathbf{ds}) \neq 0 \quad$ oder auch $\quad \nabla(\mathbf{ds}) \neq 0$

wegen der Beliebigkeit der Richtungen von $\mathbf{dr}$ und $\nabla(\mathbf{ds})$. Auf die Zeit bezogen, folgt

(A-2) $\quad d(\mathbf{dr})/dt = \mathbf{dr}\cdot\nabla(\mathbf{ds}/dt) \neq 0 \quad$ oder auch $\quad \nabla(\mathbf{ds}/dt) = \nabla\mathbf{v} \neq 0$

Das Feld der Verschiebungsvektoren $\mathbf{ds}$ bzw. des Windes $\mathbf{v}$ muss also einen Gradienten haben, damit neben der Translation auch Deformations- und Rotationsbewegungen des Luftteilchens möglich sind. Wir können $\nabla(\mathbf{ds}/dt)$ mit $\nabla\mathbf{v}$ identifizieren, weil der Gradient des Translationsanteiles von $\mathbf{v}$ gradientfrei ist. Die *Deformation* wird völlig gleichwertig auch Verzerrung genannt. Sie setzt sich i.A. aus einer Volumen- *und* einer Formänderung zusammen, *kann* allerdings auch eine *reine* Volumenänderung ("formtreue Deformation") oder eine *reine* Formänderung ("volumentreue Deformation") sein. Wenn *beides* der Fall ist, nennen wir die Verzerrung eine Deformation im weiteren Sinne ("i.w.S"):

(A-3) $\quad \nabla\mathbf{v} \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ Deformation i.w.S. *und* Rotation

Jede Deformation i.w.S. lässt sich in eine formtreue Volumenänderung (eine *Divergenz*, $\rightarrow$ Formel (E-44)) und in eine volumentreue Formänderungen (eine Deformation "im engeren Sinne", ("i.e.S")) aufspalten. Genau das haben wir letztendlich im Exkurs E.3(c) für den 2D-Fall getan. Dort haben wir *vier* Massenpunkte als Eckpunkte eines flüssigen Quadrates in 2D betrachtet, und dabei die Bedingung $\nabla_h\mathbf{v}_h \neq 0$ kinematisch aufgeschlüsselt. Die direkte Verallgemeinerung der dortigen Ergebnisse auf den 3D - Fall ist möglich, und man findet folgende weitere Spezifizierungen von (A-3):

(A-4) $\quad (\nabla\mathbf{v})^S = \left(\nabla\mathbf{v}+\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla\right)/2 \neq 0 \quad$ Deformation i.w.S., also *ohne* Rotation (Form- und Volumenänderung)

(A-5) $\quad (\nabla\mathbf{v})^S_I = \nabla\cdot\mathbf{v} \neq 0 \quad$ Formtreue Volumenänderung

(A-6) $\quad (\nabla\mathbf{v})^S - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{E} \neq 0 \quad$ Deformation i.e.S. (Volumentreue Formänderung)

(A-7) $\quad (\nabla\mathbf{v})^A = \left(\nabla\mathbf{v}-\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla\right)/2 \neq 0 \quad$ Rotation

Der untere Index I kennzeichnet die Spurbildung eines Tensors (→ auch (E-59) und (E-65)), die oberen Indizes S bzw. A kennzeichnen symmetrische bzw. antisymmetrische Tensoren (→ E.1 und E.3, (E-46)). Der enge Zusammenhang zwischen der Spur des symmetrischen Tensors und der Volumenänderung kann durch die 2D - Veranschaulichung in E.3 oder durch die dort ebenfalls hergeleitete "koordinatenfreie Darstellung der Divergenz" (E-44) verdeutlicht werden:

$$\text{(A-8)} \qquad (\nabla\mathbf{v})_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}} = (\nabla\mathbf{v})_{\mathrm{I}} = \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}\tau)}{\mathrm{d}t}$$

Aus (A-7) folgt das Verschwinden der Volumenänderung bei Rotation (→ auch (E-48)):

$$(\nabla\mathbf{v})_{\mathrm{I}}^{\mathrm{A}} = 0$$

Wegen $\mathbb{E}_{\mathrm{I}} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 3$ *verschwindet* auch die Spur von (A-6), so dass Volumenänderungen auch hier ausgeschlossen sind, wie der Zusatzname "volumentreu" zu (A-6) bereits sagt.

Genau genommen beschreiben die Tensoren $(\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{S}} = \left(\nabla\mathbf{v} - \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla\right)/2$ bzw. $(\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{S}} - (\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{E}/3$ keine Deformationen i.w.S. bzw. i.e.S., sondern entsprechende Deformations - *Geschwindigkeiten*. Der <u>Deformationsgeschwindigkeitstensor</u> erhält das Symbol " $\mathbb{D}$ ". Den Zusatz "i.w.S." lassen wir im Folgenden weg. Mit $\nabla\mathbf{v} = \nabla(\mathrm{d}\mathbf{s}/\mathrm{d}t)$ (→(A-2)) folgt:

$$\text{(A-9)} \qquad \mathbb{D} = (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla\right) = \frac{1}{2}\left[\nabla\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overset{\downarrow}{\mathbf{s}}}{\mathrm{d}t}\nabla\right]$$

Den *eigentlichen* <u>Deformations</u>- oder <u>Verzerrungstensor</u> $\mathbb{V}$ erhält man aus $\mathbb{D}$ durch

$$\text{(A-10)} \qquad \mathbb{D} = \dot{\mathbb{V}} = \frac{\mathrm{d}\mathbb{V}}{\mathrm{d}t} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{d}\mathbb{V} = \mathbb{D}\,\mathrm{d}t$$

Das ergibt:

$$\text{(A-11)} \qquad \mathrm{d}\mathbb{V} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathrm{d}\mathbf{s} + \mathrm{d}\overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\nabla\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\nabla\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\nabla\right) \quad \leftrightarrow \quad \mathbb{V} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\nabla\right)$$

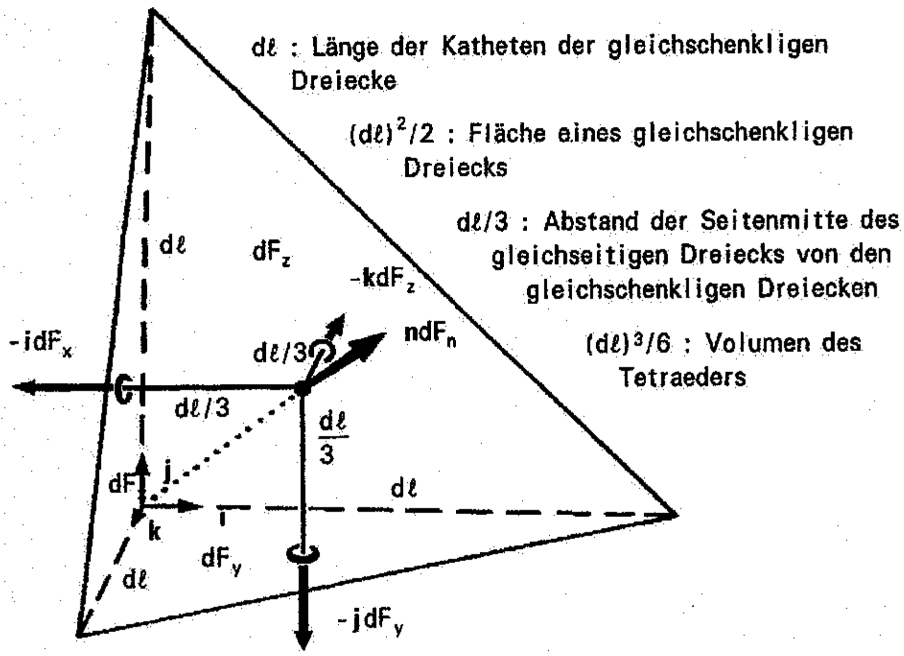
Damit kann die Bedingung für Deformation und/oder Rotation, z.B. in der Form (A-2), $\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r})/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla(\mathrm{d}\mathbf{s}/\mathrm{d}t) = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{v} \neq 0$, spezialisiert werden auf eine Bedingung für Deformation *ohne* Rotation. Dann darf der folgende Ausdruck nicht verschwinden:

$$\text{(A-12)} \qquad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r})}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{S}} = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbb{D} = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r}) = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbb{V}$$

Die zweite Form von (A-12) gibt mit Hilfe der Änderung d$\mathbb{V}$ der Verzerrung die Änderung d(d**r**) des Relativabstandes zweier Punkte innerhalb des Fluidteilchens an, also des "*relativen Verschiebungsweges*", welcher durch die Deformation verursacht wird (→ auch (A-1)). Dieses d(d**r**) ist der "Weg" bei der in Anhang A.3 erfolgenden elementaren Berechnung der Deformationsarbeit nach der Formel "Kraft·Weg".

A.2 SPANNUNGSTENSOR

Deformationsänderungen (A-9) rufen überall im Inneren des Fluids *Kräfte* hervor, die man durch Spannungen (beliebig orientierte Kräfte/Fläche) auf den Oberflächen der Fluidteilchen beschreiben kann. Der Spannungszustand im Fluid ist *dann* vollständig beschrieben, wenn zu jeder beliebigen infinitesimalen Fläche im Inneren die auf sie wirkende Spannung angegeben werden kann. Das beliebige Flächenelement ("Kontrollfläche") sei o.B.d.A. ein infinitesimales gleichseitiges Dreieck. Es kann durch drei weitere *rechtwinklig-gleichschenklige* Dreiecke dF_x , dF_y , dF_z zu einem Tetraeder ergänzt werden, welcher unser infinitesimales Fluidteilchen wiedergibt:



In infinitesimalen Fluidteilchen gilt der Satz vom lokalen Gleichgewicht der Spannungen: *Die Summe der an allen vier Begrenzungsflächen angreifenden Oberflächenkräfte verschwindet*! Der Grund liegt darin, dass beim Grenzübergang $V \to 0$ die Volumenkräfte "schneller" als die Oberflächenkräfte verschwinden. Daher muss im Gleichgewicht die Resultierende der nach dem Grenzübergang "übrigbleibenden" Oberflächenkräfte ebenfalls verschwinden. Die drei an den Dreiecksflächen dF_x , dF_y , dF_z angreifenden Spannungsvektoren seien $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$, $\mathbf{T}_z$. Dies sind *indizierte* Vektoren, die Komponenten dieser Vektoren müssen also zwei Indizes tragen:

$$\mathbf{T}_x = T_{xx}\mathbf{i} + T_{xy}\mathbf{j} + T_{xz}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_y = T_{yx}\mathbf{i} + T_{yy}\mathbf{j} + T_{yz}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_z = T_{zx}\mathbf{i} + T_{zy}\mathbf{j} + T_{zz}\mathbf{k}$$

Der erste Index i einer Komponenten T_{ik} gibt die Orientierung der zugehörigen Fläche an, der zweite Index kennzeichnet die Komponente der dort angreifenden Kraft. Auf die vierte Fläche dF_n (mit dem Normalvektor $\mathbf{n} = n_x\,\mathbf{i} + n_y\,\mathbf{j} + n_z\,\mathbf{k}$) wirke die Spannung $\mathbf{T}_n$. Die Gleichgewichtsbilanz der Oberflächenkräfte ergibt also

(A-13) $$\mathbf{T}_x dF_x + \mathbf{T}_y dF_y + \mathbf{T}_z dF_z + \mathbf{T}_n dF_n = 0$$

Die vier von der Mitte des gleichseitigen Dreieckes ausgehenden, auf jeweils einer Tetraederfläche *senkrecht* stehenden Pfeile sind die infinitesimalen vektoriellen Flächenelemente $-\mathbf{i}dF_x$, $-\mathbf{j}dF_y$, $-\mathbf{k}dF_z$, $\mathbf{n}dF_n$, welche jeweils die Richtung der nach außen gerichteten Flächennormalen $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$, $\mathbf{n}$ einnehmen. (Die Spannungsvektoren $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$, $\mathbf{T}_z$, $\mathbf{T}_n$ stehen natürlich i.A. *nicht* senkrecht auf den Flächen).

Die drei skalaren rechtwinkligen Dreiecksflächen dF_x, dF_y, dF_z sind Projektionen der Fläche dF_n in die jeweilige Koordinatenrichtung. Wegen $\mathbf{n}\cdot(-\mathbf{i}) = -n_x$ u.s.w. gilt also

$$dF_x = -n_x dF_n \quad ; \quad dF_y = -n_y dF_n \quad ; \quad dF_z = -n_z dF_n$$

Einsetzen in die Kräftebilanz (A-13) ergibt $\left(-n_x\mathbf{T}_x - n_y\mathbf{T}_y - n_z\mathbf{T}_z\right)dF_n = 0$. Da dF_n beliebig ist, folgt in Analogie zum inneren Vektorprodukt $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = x = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$:

(A-14) $$n_x\mathbf{T}_x + n_y\mathbf{T}_y + n_z\mathbf{T}_z = \mathbf{T}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbb{T} \qquad \text{mit} \quad \mathbb{T} = \mathbf{i}\mathbf{T}_x + \mathbf{j}\mathbf{T}_y + \mathbf{k}\mathbf{T}_z$$

Der einzige Unterschied zum inneren Vektorprodukt besteht darin, dass der rechte Faktor $\mathbb{T}$ von (A-14) nicht indizierte *Zahlen* b_x, b_y, b_z zusammenfasst, sondern indizierte *Vektoren* $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$, $\mathbf{T}_z$. So wie b_x, b_y, b_z die Komponenten eines Vektors $\mathbf{b}$ sind, müssen $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$, $\mathbf{T}_z$ als Komponenten eines *Tensors* aufgefasst werden, des <u>Spannungstensors</u> $\mathbb{T}$. In der Spaltendarstellung entsprechen sich:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_x \\ \mathbf{T}_y \\ \mathbf{T}_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

Der gesamte innere Spannungszustand kann also, ebenso wie der Deformationszustand $\mathbb{V}(\mathbf{r})$, durch einen vom Ort $\mathbf{r}$ abhängigen ("*lokalen*") Tensor $\mathbb{T}(\mathbf{r})$ beschrieben werden, denn wegen $\mathbf{T}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbb{T}$ kann bei Kenntnis von $\mathbb{T}(\mathbf{r})$ zu jeder beliebig herausgegriffenen infinitesimalen Fläche (Orientierung $\mathbf{n}$) die zugehörige Spannung $\mathbf{T}_n$ angegeben werden. Der Spannungstensor $\mathbb{T}$ ist symmetrisch, denn ein nichtverschwindender unsymmetrischer Anteil würde das tetraederförmige infinitesimale Teilchen in Rotation versetzen und dabei den Drehimpuls-

Erhaltungssatz der Physik verletzen. Wegen der Symmetrie kann man bereits mit 6 Angaben den lokalen Spannungszustand kennzeichnen.

A.3 DEFORMATIONSARBEIT

Gegen die Spannungskräfte ist Arbeit zu leisten, wenn es aufgrund der Verzerrungsänderungen $d\mathbb{V}$ zu den in A.1, (A-12), angegebenen relativen Verschiebungswegen $d(d\mathbf{r}) = d\mathbf{r}\cdot d\mathbb{V}$ der Kontrollfläche kommt. Diese Kontrollfläche sei das gleichseitige Dreieck des Tetraeders. Sie verschiebt sich bei Deformationen gegen die Spannung $\mathbf{T}_n$, die sich gemäß $\mathbf{T}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbb{T}$ aus den Spannungen $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$, $\mathbf{T}_z$ auf die rechtwinkligen Dreiecksflächen berechnen lässt.

Auch der Verschiebungsweg kann auf die Verschiebungswege der drei rechtwinkligen Dreiecksflächen zurückgeführt werden. Dazu verlegt man den Ursprung des Koordinatensystems von der "rechtwinkligen" Tetraederecke (siehe vorige Skizze) auf die Seitenmitte des *gleichseitigen* Dreiecks, so dass deren Deformations-Bewegung (A-12), $d(d\mathbf{r}) = d\mathbf{r}\cdot d\mathbb{V}$, auf die drei Verschiebungswege

$$-\frac{d\ell}{3}\mathbf{i}\cdot d\mathbb{V}\ ,\ -\frac{d\ell}{3}\mathbf{j}\cdot d\mathbb{V}\ ,\ -\frac{d\ell}{3}\mathbf{k}\cdot d\mathbb{V} \qquad \text{(Wegkomponenten)}$$

der gleichschenkligen Dreiecke zurückgeführt wird. Dabei muss gegen die Kräfte als Produkte der Art Spannungen · Fläche

$$\mathbf{T}_x\frac{(d\ell)^2}{2}\ ,\ \mathbf{T}_y\frac{(d\ell)^2}{2}\ ,\ \mathbf{T}_z\frac{(d\ell)^2}{2} \qquad \text{(Kraftkomponenten)}$$

von der Umgebung des Tetraeders nach der klassischen Formel "*Kraft · Weg*" die folgende Verschiebungsarbeit geleistet werden:

$$\delta A_{def} = \frac{(d\ell)^3}{6}\left[\mathbf{T}_x\cdot\mathbf{i}\cdot d\mathbb{V} + \mathbf{T}_y\cdot\mathbf{j}\cdot d\mathbb{V} + \mathbf{T}_z\cdot\mathbf{k}\cdot d\mathbb{V}\right] = \frac{(d\ell)^3}{6}\left[\mathbf{i}\mathbf{T}_x + \mathbf{j}\mathbf{T}_y + \mathbf{k}\mathbf{T}_z\right]\cdot\cdot d\mathbb{V}$$

Da der Weg selbst schon durch ein Skalarprodukt ausgedrückt wurde, kommt es im Produkt "Kraft · Weg" zu einem *Doppelskalarprodukt* gemäß (E-11)! - Die Vertauschung $\mathbf{T}_x\mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{T}_x$ u.s.w. ist gerechtfertigt, da der Tensor $d\mathbb{V}$ symmetrisch ist. Wegen der obigen Spalten- und Matrixdarstellungen von $\mathbb{T}$ steht in der Klammer der letzten Zeile gerade die *Neunerform* $\mathbb{T}_{xx}\mathbf{ii} + \ldots + \mathbb{T}_{zz}\mathbf{kk}$. Der Vorfaktor $(d\ell)^3/6$ ist das Volumen V des Tetraeders, so dass der Energiegewinn durch Deformationsarbeit am tetraederförmigen individuellen Fluidteilchen gegeben ist durch $\delta A = V\mathbb{T}\cdot\cdot d\mathbb{V}$ oder

$$\text{(A-15)} \qquad \delta A_{ref} = \mathbb{T}\cdot\cdot d(V_o\mathbb{V})$$

wobei der Index an V andeuten soll, dass V beim Bilden des Differentials nicht mitdifferenziert werden soll. Mit (A-11), $d\mathbb{V} = (\nabla d\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{d}\mathbf{s}\nabla)/2$, folgt als alternative, "hydrodynamische" Darstellung

$$\delta A_{def} = V\mathbb{T}\cdot\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\nabla d\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{d}\mathbf{r}\nabla\right)\right] = V\mathbb{T}\cdot\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla\right)dt\right] = V\mathbb{T}\cdot\cdot\mathbb{D}dt$$

oder wegen der Symmetrie $\mathbb{T} = \mathbb{T}^C$:

(A-16) $\quad \delta A_{def} = V\mathbb{T}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}\, dt$

Wegen $\mathbb{T} = \mathbb{F} - p\mathbb{E}$ (s.u., (A-22)) umfassen (A-15) und (A-16) neben der Druckarbeit auch die Dissipation $V dt\, \mathbb{F}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} = T(d_iS)_r$ durch Reibung, welche in Kap. 1.4(e) diskutiert wird. Die Identität von Reibungs – Wärme und Deformations-Arbeit kann auch als Motivation zu der in Kap. 2.4 diskutierten Verallgemeinerten Thermodynamik angesehen werden.

A.4 SPANNUNGS-DEFORMATIONSBEZIEHUNG UND DEFINITION EINES FLUIDS

Mit der Gleichung (A-15) haben wir die Deformationsarbeit durch den Spannungstensor $\mathbb{T}$ *und* den Deformationstensor $\mathbb{V}$ beschrieben. Andererseits *entstehen* Spannungen erst durch Deformationen, d.h. sie müssen von ihnen *abhängen*! Die Art der Spannungs- Deformationsbeziehung $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{V})$ ist eine typische Materialeigenschaft. *Ideale Festkörper* geben die Deformationsarbeit, die man beim Anlegen von Spannungen an ihnen verrichtet, nach dem Aufheben dieser Spannungen wieder zurück und nehmen dabei wieder die Ausgangsform an. Daher nennt man diese Deformationsarbeit auch elastisch . *Ideale plastische Materialien* ("Wachskörper") *bleiben* verformt und speichern die Deformationsarbeit in Form von Wärme. Daher nennt man diese Deformationsarbeit auch dissipativ . Die elastische Deformationsarbeit ist reversibel , die dissipative Deformationsarbeit ist irreversibel . Damit haben wir neben der in (A-5,6) vorgenommenen *geometrischen* Klassifikation der Deformationen in reine Volumen- bzw. Formänderungen nun auch eine *physikalische* Klassifikation der Deformationsarbeit gefunden. Bei *Realen* Materialien ist die Deformationsarbeit elastisch *und* dissipativ.

Auch ein Fluid kann dadurch definiert werden, dass es mit bestimmten Spannungen auf Deformationen reagiert, genauer gesagt, mit welcher physikalischen Deformationsarbeit es auf welche geometrische Deformationsart reagiert. Das zeigt die folgende Tabelle, welche zum Vergleich auch ideale Festkörper und "Wachskörper" sowie den allgemeinsten realen Körper mit aufführt:

	.... *Reaktion* *auf*	
	Formtreue Volumenänderung	Volumentreue Formänderung
Idealer Festkörper	elastisch	elastisch
Idealer Wachskörper	dissipativ	dissipativ
Realer Körper	elastisch+dissipativ	elastisch+dissipativ
Ideales Fluid	elastisch	dissipativ
Reales Fluid	elastisch+dissipativ	dissipativ

Ein Fluid unterscheidet sich also vom allgemeinsten Körper dadurch, dass die Formelastizität verschwindet. Beim idealen Fluid verschwindet zusätzlich der dissipative Anteil der reinen Volumenänderung. (Es gibt jedoch auch andere Definitionen des "idealen Fluids", z.B. die Erfüllung der "idealen Gasgleichung" $p = R\rho T$, oder *gänzliche* Reibungsfreiheit).

Zur Präzisierung der Definition des realen und des idealen Fluids müssen die Bedingungen dieser Tabelle in die Spannungs-Verzerrungsrelation $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{V})$ eingearbeitet werden. Dazu genügt es, aus der Fülle solcher Beziehungen nur den Fall einer *linearen und isotropen* Abhängigkeit $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{V})$ zu betrachten. Wir fordern, dass der elastische Anteil der Spannung linear und isotrop vom *Ausmaß* der Verzerrung $\mathbb{V}$ abhängt, und dass der dissipative Anteil linear und isotrop von der *Geschwindigkeit der Verzerrungsänderung* $\mathbb{D} = d\mathbb{V}/dt$ abhängt (→(A-10)):

$$\mathbb{T} = f(\mathbb{V}) + g(\mathbb{D})$$

mit linearen Funktionen f und g. Lineare Abhängigkeit zwischen Vektoren beschreibt man bekanntlich durch Tensoren 2. Stufe: $\mathbf{v} = \mathbb{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbb{B}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{c}$. Hierbei verändern die Tensoren $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ i.A. die Richtung von $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{y}$. Wenn aber auch *Isotropie* gefordert wird, gilt $\mathbf{v} = A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + \mathbf{c}$. Analog dazu kann auch die lineare *und* isotrope Beziehung $\mathbb{T} = f(\mathbb{V}) + g(\mathbb{D})$ zwischen *Tensoren allein durch Skalare* formuliert werden. Allerdings wäre etwa der Ansatz $\mathbb{T} = \eta\mathbb{V} + \mu\mathbb{D} + \pi\mathbb{E}$ mit konstanten Skalaren η, μ und π noch nicht hinreichend allgemein: Eine lineare isotrope Funktionen $f(\mathbb{V})$ bzw. $g(\mathbb{D})$ erhält man *auch*, wenn man als Skalar *lineare Invarianten* von $\mathbb{V}$ bzw. $\mathbb{D}$ verwendet, also *nichtkonstante, deformationsabhängige* Größen, und diese mit dem Einheitstensor $\mathbb{E}$ verknüpft. Wie wir in E.5, Formel (E-59) gefunden haben, ist aber der *erste* Skalar die einzige *lineare* invariante Bildung eines Tensors. Somit folgt als allgemeinste linear-isotrope $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{V})$ - Beziehung:

(A-17) $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{V}) = \eta\mathbb{V} + \lambda\mathbb{V}_I\mathbb{E} + \mu\mathbb{D} + \sigma\mathbb{D}_I\mathbb{E} + \pi\mathbb{E}$ mit $\mathbb{D} = \dot{\mathbb{V}}$

η und λ sind Elastizitätskonstanten, μ und σ sind Viskositätskonstanten. π ist die Restspannung nach Verschwinden aller Deformationen (z.B. der hydrostatische Druck eines inkompressiblen Mediums). - Dieser linear-isotrope Ansatz $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbb{V})$ überträgt die physikalische Klassifikation nach elastischen und dissipativen Anteilen der *Deformation* und der Deformationsgeschwindigkeit auf eine entsprechende Klassifikation der Spannungen $\mathbb{T}$. *Das ist gemeint, wenn man auch von "elastischen und dissipativen Spannungen" spricht!*

Um jedoch die Fluid - Bedingungen der obigen Tabelle einzuarbeiten, benötigen wir noch die *geometrische* Aufteilung der Deformation nach reiner Form- und Volumenänderung. Wie bereits aus (A-8,9) bekannt ist, beschreiben die ersten Skalare von $\nabla\mathbf{v}$ oder von $\mathbb{D}$, also $\mathbb{D}_I = (\nabla\mathbf{v})_I$, Divergenzen $\nabla\cdot\mathbf{v}$ und damit Volumenänderungen, genauer gesagt, deren *Geschwindigkeiten.* Folglich beschreibt $\mathbb{V}_I$ wegen $\mathbb{D} = d\mathbb{V}/dt$ und wegen (A-11), $\mathbb{V} = \left(\nabla\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\nabla\right)/2$, das *Ausmaß* der Volumenänderungen. Wir bezeichnen die reine (formtreue) tensorielle Volumenänderung mit dem oberen Index V, die reine (volumentreue) Formänderung mit dem oberen Index F. Die Ausmaße bzw. die Geschwindigkeiten dieser beiden tensoriellen Deformationsanteile werden aufgespalten gemäß

(A-18) $\mathbb{V} = \mathbb{V}^V + \mathbb{V}^F \quad ; \quad \mathbb{D} = \mathbb{D}^V + \mathbb{D}^F$

Die Formänderung $\mathbb{D}^F$ ist gegeben durch (A-6), $(\nabla\mathbf{v})^S - \mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbf{v})/3$, $\mathbb{V}^F$ wegen (A-11), $\mathbb{V} = \left(\nabla\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\nabla\right)/2$, durch den entsprechenden Ausdruck $(\nabla\mathbf{s})^S - \mathbb{E}(\nabla\cdot\mathbf{s})/3$.

Jedoch werden die reinen (formtreuen) Volumenänderungen gemäß $\mathbb{V}_I = \nabla\cdot\mathbf{s}$ bzw. $\mathbb{D}_I = \nabla\cdot\mathbf{v}$ durch *Skalare* ausgedrückt, ($\rightarrow$ auch (A-5)). Wegen $\mathbb{E}_I = 3$ ist der Zusammenhang mit den tensoriellen reinen Volumenänderungen $\mathbb{V}^V$ und $\mathbb{D}^V$ gegeben durch

(A-19) $\mathbb{V}_I\mathbb{E} = (\nabla\cdot\mathbf{s})\mathbb{E} = 3\mathbb{V}^V \quad ; \quad \mathbb{D}_I\mathbb{E} = (\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{E} = 3\mathbb{D}^V$

Dies kann unmittelbar in die linear-isotrope Beziehung (A-17) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(\mathbb{V}) &= \eta\mathbb{V} + \lambda\mathbb{V}_I\mathbb{E} + \mu\mathbb{D} + \sigma\mathbb{D}_I\mathbb{E} + \pi\mathbb{E} \\ &= \eta\mathbb{V} + 3\lambda\mathbb{V}^V + \mu\mathbb{D} + 3\sigma\mathbb{D}^V + \pi\mathbb{E}\end{aligned}$$

oder mit (A-18)

(A-20) $\mathbb{T}(\mathbb{V}) = \eta\mathbb{V}^f + (\eta + 3\lambda)\mathbb{V}^V + \mu\mathbb{D}^F + (\mu + 3\sigma)\mathbb{D}^V + \pi\mathbb{E}$

Die Bedingung für das Verschwinden der "Formelastizität" bei Fluiden erzwingt offenbar die Bedingung $\eta = 0$. Damit geht auch ein *Anteil* der "Volumenelastizität" verloren, und man erhält für reale Fluide :

$$\mathbb{T} = 3\lambda\mathbb{V}^V + \mu\mathbb{D}^F + (\mu + 3\sigma)\mathbb{D}^V + \pi\mathbb{E} \qquad \text{oder}$$

$$\text{(A-21)} \qquad \mathbb{T} = \mu\mathbb{D}^F + (\mu + 3\sigma)\mathbb{D}^V + \lambda(\nabla\cdot\mathbf{s})\mathbb{E} + \pi\mathbb{E}$$

wegen (A-19), $3\mathbb{V}^V = (\nabla\cdot\mathbf{s})\mathbb{E}$. (A-21) wird abgekürzt durch die Beziehung

$$\text{(A-22)} \qquad \mathbb{T} = \mathbb{F} - p\mathbb{E}$$

$$\text{mit} \quad \mathbb{F} =: \mu\mathbb{D}^F + (\mu + 3\sigma)\mathbb{D}^V \quad \text{und} \quad p =: -(\lambda(\nabla\cdot\mathbf{s}) + \pi)$$

Es handelt sich hierbei also um die Spezifizierung der $\mathbb{T}(\mathbb{V})$ - Beziehung für reale Fluide. Hier wird deutlich, dass der hydrodynamische Druck p nicht nur den hydrostatischen Anteil π umfasst, sondern auch einen "Strömungsanteil" aus der elastischen Formänderung. $\mathbb{F}$ enthält die dissipativen Anteile von $\mathbb{T}$. Die bekanntere Form für den laminaren Reibungstensor $\mathbb{F}$, nämlich den Navier-Stokes'schen Ansatz, erhält man durch Ausklammern von μ und Wieder - Zusammensetzen von $\mathbb{D}^F + \mathbb{D}^V$ zum Tensor $\mathbb{D}$. (Wir benötigten die Aufspaltung nur "*zwischenzeitlich*" zur Einarbeitung der Fluid- Bedingung). Mit (A-9), $\mathbb{D} = \left(\nabla\mathbf{v} + \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla\right)/2$ und (A-19), $3\mathbb{V}^V = (\nabla\cdot\mathbf{s})\mathbb{E}$ folgt:

$$\text{(A-23)} \qquad \mathbb{F} = \mu\mathbb{D} + 3\sigma\mathbb{D}^V = \nu\left[\nabla\mathbf{v} + \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla\right] + \sigma(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{E} \quad \text{mit } \nu = \mu/2$$

Um als Bedingung eines Idealen Fluids das Verschwinden des dissipativen Anteils der reinen Volumenänderung in die obigen Formulierungen einzuarbeiten, ($\rightarrow$ Tabelle am Anfang von Kap.A.4), muss in (A-22) $\mu + 3\sigma = 0$ verwendet werden.