Wetter und Klima im Phasenraum

*Zusammenfassung der Vorträge vom 9. Mai 2007 in der Wilhelm Förster Sternwarte Berlin (Titel: "**Die Launen des Wetters und die Naturgesetze**")*

*und vom 4. Juni 2007 im Meteorologischen Institut der Freien Universität Berlin (Titel: "**Atmosphärische Systemtheorie für Nichttheoretiker**")*

1. Einleitung

Schon während meines Physikstudiums hatte ich den Eindruck gewonnen, dass man am physikalischen System „Atmosphäre“ wohl am besten lernen kann, was Komplexität, was Nichtlinearität und was Vernetzung bedeuten. Diese Begriffe sind ja in aller Munde. Sie werden oft, wenn auch zu Unrecht, als gleichwertig angesehen, als äquivalente Begriffe. Sie werden aber zu Recht als Ursache für die Nichtvorhersagbarkeit mancher Systeme angesehen, wie z.B. des Systems Atmosphäre. Im gesamten Vortrag verstehe ich unter "Nichtvorhersagbarkeit" immer eine Nichtvorhersagbarkeit für längere Zeiträume als 10-14 Tage, wie sie für die Atmosphäre zutrifft. Für längere Zeiträume als diese sind die empirischen Bauernregeln oft besser als physikalische Vorhersagen.

Mein Vortragsziel ist ein genaueres Verständnis für die physikalischen Ursachen der Nichtvorhersagbarkeit der Atmosphäre in diesem Sinne. Ich möchte Ihnen verständlich machen, wieso eine komplexe, nichtlineare und vernetzte atmosphärische Physik automatisch ein launisches und unberechenbares Wetter ergibt, wieso man Wind und Wolken kaum für eine Woche vorhersagen kann, obwohl man Mondfinsternisse für Jahrhunderte vorhersagen kann.

Wie schon angedeutet, bedeuten Komplexität, Nichtlinearität und Vernetzung nicht das Gleiche. Ich möchte Ihnen zeigen, dass Nichtlinearität und Vernetzung vollkommen unabhängige Eigenschaften sind. Was Komplexität ist, kann ich Ihnen schon jetzt sagen. Komplexität ist eine Art Oberbegriff, der Nichtlinearität *und* Vernetzung umfasst. Wir werden finden, dass erst die so definierte Komplexität zu signifikanten Einschränkungen der Vorhersagbarkeit führt. Nichtlinearität oder Vernetzung *allein* "schaffen" das nicht.

Das zu erläuternde Prinzip ist aber allgemeingültig, es gilt nicht nur für die Atmosphäre, sondern auch für alle anderen launischen Systeme, z.B. für die Wirtschaft, für Roulette, für das System Mensch, für Gesellschaftssysteme usw. Das zu erläuternde Prinzip stützt sich nicht auf die oft in Anspruch genommene Chaostheorie. Allerdings möchte ich am Ende des Vortrags kurz andeuten, wie diese Theorie das hier und heute gegebene physikalische Bild noch bereichern kann. Dann nämlich können wir sozusagen die „Stelle“ sehen, an der die Chaostheorie in Sachen Nichtvorhersagbarkeit sozusagen noch „eins draufsetzen“ kann.

2. Strategie und Gliederung des Vortrags

Vielleicht verstehen wir am besten, was Nichtlinearität und Vernetzung bedeuten, wenn wir erst einmal ein Modell eines Systems betrachten, das weder nichtlinear noch vernetzt ist, und wenn wir dann erst die Komplexität schrittweise hinzufügen. Daraus ergibt sich die folgende Gliederung des Vortrags:

Nach wir erklärt haben, was ein Modell überhaupt ist, und nach einem allgemeinen Hinweis auf einige Probleme der Modellierung, beginnen wir mit linearen und unvernetzten Modellen. Schon hierzu gibt es viel zu sagen. Wenn man es z.B. auf das System Wirtschaft anwendet, ist es das Modell, mit dem der Club of Rome in den 70er Jahren Furore gemacht hat. Man kann schon hier systemtheoretische Begriffe ableiten, die später auch für die Komplexität wichtig werden, wie Freiheitsgrade, Phasenräume, Zustandspunkte, Fixpunkte, Kopplungen und Rückkopplungen, Stabilität und Instabilität, usw.

Wenn wir das haben, fügen wir Nichtlinearität hinzu, und dann erst Vernetzung. Wir werden jedes Mal geradezu beobachten können, welche Modelleigenschaften neu ins Spiel kommen und dabei die Vorhersagbarkeit mindern oder verhindern. Am Schluss folgt die schon erwähnte Bemerkung zur Chaostheorie, genauer gesagt, zur Theorie des deterministischen Chaos.

3. Das Prinzip und die Problematik der Modellierung

Was ist überhaupt ein Modell? Eine Modellierung eines Systems, oder wie man ja auch sagt, eine Simulation, bildet die Realität in Form von mathematischen Gleichungen ab. So kann versucht werden, Veränderung der Realität vorherzusagen, denn Gleichungen kann man ja lösen. Diese Prozedur ist jedoch bei komplexen Systemen notwendigerweise mit einer gewaltigen Vereinfachung der Realität verbunden. Meistens kennt man die Gleichungen nicht genau genug. Dann muss man sie irgendwie erfinden und dann lösen, um erst im Nachhinein zu sehen, ob die Modellannahmen plausibel waren. Das ist natürlich ungünstig z.B. bei Klimaprognosen.

Aber auch wenn man die Gleichungen kennt, kann man niemals alle Variablen berück-sichtigen, von denen das reale System tatsächlich abhängt. Man versucht natürlich, wenigstens die „wichtigsten“ Variablen ausfindig zu machen und zu berücksichtigen, das sind die Variablen, die die Veränderung des Systems am meisten beeinflussen. Aber dennoch bleiben Probleme bestehen.

Um das zu demonstrieren, betrachten wir einmal die atmosphärische Variable Temperatur. Wenn man diese über die gesamte Atmosphäre räumlich mittelt, hängt sie noch von der Zeit ab, und sie ist dann die wohl bekannteste Klimavariable. Sie ist eine sogenannte globale Variable, denn sie charakterisiert ja die Atmosphäre als Ganzes. Man sagt auch, und das ist unser erster wichtiger Begriff, sie stellt nur einen *Freiheitsgrad* der Atmosphäre dar. Hingegen kann die ungemittelte Temperatur in jedem Raumpunkt einen anderen Wert haben. Sie ist eine Feldvariable, und sie hat so viele Freiheitsgrade, wie der Raum Punkte hat, also unendlich viele. Da muss man natürlich welche weglassen!

Ein übliches Verfahren dazu ist es, irgendein Gitter zu verwenden und von den unendlich vielen Feld- Freiheitsgraden nur diejenigen zu berücksichtigen, die an den Kreuzungspunkten dieses Gitters liegen. So entsteht eine sogenannte diskretisierte Feldvariable, und diese hat nur noch so viele Freiheitsgrade, wie das verwendete Gitter Kreuzungspunkte hat. Für Atmosphärenmodelle ist es naheliegend, das geographische Gitter zu verwenden, die Werte des Druckfeldes, des Temperaturfeldes usw. also nur an den Kreuzungspunkten von Längen- und Breitenkreisen abzugreifen. Das natürlich in mehreren Höhen, denn die Atmosphäre hat ja auch eine vertikale Erstreckung.

Aber welche und wie viele Höhen muss man berücksichtigen? Und welche Breiten- und Längenkreise muss man nehmen? Reichen alle 5 Grad? Oder benötigt man vielleicht einen Abstand von 0,1 Grad oder weniger? Wie klein muss denn die Maschenweite des Rechengitters sein, damit die Freiheitsgrade zwischen den Kreuzungspunkten, die ja nicht berücksichtigt werden, im Sinne der Modellierung auch wirklich unwichtig sind? Wir haben also schon bei einer einzigen Feldvariablen ein riesiges Entscheidungsproblem. Hinzu kommt aber noch die Frage, welches überhaupt die wichtigen Variablen sind, seien es Felder oder seien es globale Variablen.

Dazu noch ein weiteres, ganz bewusst sehr extremes Beispiel: Wir wollen ein idealisiertes (reibungsfreies) Billardspiel simulieren, und die Modellrechnung soll bis zur 56. Kollision genau sein. Sicherlich wird eine solche Rechnung sehr sensibel auch von den Kräften abhängen, die nicht zu den eigentlichen Stoßkräften zwischen den Kugeln gehören. Und schon wieder taucht die Frage auf: Welche dieser sonstigen Kräfte darf man im Sinne der Modellbildung als unwichtig vernachlässigen?

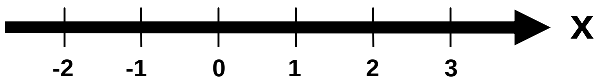
Der englische Physiker Berry hat 1978 ausgerechnet, dass man z.B. die Schwerkraft, die von einem einzigen Elektron ausgeht, nicht vernachlässigen darf, selbst dann nicht, wenn es 10 Milliarden Lichtjahre entfernt ist, also fast am Rande des sichtbaren Universums liegt. Von einer so unfassbar schwachen Kraft hängt das Zustandekommen des 56. Zusammenstoßes tatsächlich noch ab! Und von den näher liegenden Teilchen natürlich erst recht! Das hat Berry so errechnet, und der Österreichische Kosmologe Sexl hat das nachgerechnet und bestätigt! - Die Behauptung des Meteorologen Lorenz, ein Schmetterling könne das Wetter beeinflussen, ist demnach überhaupt nicht übertrieben! Wie aber kann man unwichtige Variable vernachlässigen, wenn es keine unwichtigen Variablen gibt?

4. Unvernetztes Modell und sein eindimensionaler Phasenraum

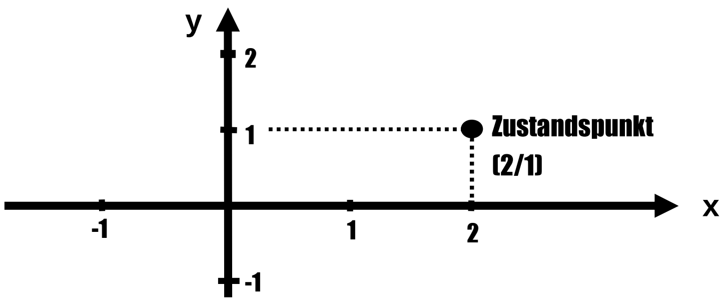
Trotz der extrem vielen Freiheitsgrade, die realistische Modelle benötigen, halten wir uns an unseren Vorsatz, zu Lernzwecken erst einmal ganz einfache Modelle zu betrachten. Wir wollten ja sogar mit linearen und unvernetzten Modellen beginnen, und diese erst im Nachhinein komplex machen. Die soeben besprochenen Freiheitsgrade haben etwas mit der Vernetzung zu tun: Vernetzt kann ein Modell nur dann sein, wenn es mehr als einen Freiheitsgrad hat. Vernetzung ist nämlich eine Wechselwirkung zwischen den Freiheitsgraden des Systems, eine Kopplung, eine wechselseitige Beeinflussung der Freiheitsgrade!

Wenn wir also die ohnehin notwendige Modellvereinfachung so weit treiben, dass wir nur noch einen einzigen Freiheitsgrad berücksichtigen, z.B. nur die global gemittelte Klimatemperatur, dann erhalten wir automatisch das gewünschte unvernetzte Modell. Die Zustände eines solchen Modells entsprechen dann den Werten des einzigen Freiheitsgrades. Das sind einfach Punkte auf der Zahlengeraden. Die Zahlengerade ist gewissermaßen der Raum aller möglichen Zustände. Man nennt ihn auch *Zustandsraum*, häufiger jedoch nennt man ihn *Phasenraum*.

Der Phasenraum ist *das* Hilfsmittel der Systemtheorie. Die zeitliche Veränderung eines Modells, z.B. die Klima-Temperaturänderung, entspricht dann einer Bewegung des Zustandspunktes durch diesen abstrakten Phasenraum. Ein solches Modell der noch immer dreidimensionalen Atmosphäre wird auch eindimensionales Modell genannt, weil eben sein Phasenraum eindimensional ist, weil es nur einen Freiheitsgrad hat. Wenn man ihn mit x bezeichnet, dann ist der Phasenraum einfach die x-Achse in dieser Skizze:



Zugegeben, das klingt schon sehr weit hergeholt. Wieso beschreibt man etwas so Normales wie eine globale Zustandsgröße, die verschiedene Werte annimmt, als eine Bewegung eines Zustandspunktes durch einen abstrakten eindimensionalen Phasenraum, eine Gerade, auf der zunehmende x-Werte angetragen sind ? - Den Vorteil dieses systemtheoretischen Konzeptes erkennen wir erst, wenn wir es mit Modellen mit mehreren Freiheitsgraden zu tun haben. Schon bei einem Modell mit zwei Freiheitsgraden, auch zweidimensionales Modell genannt, müssen wir ja die Modell-Zustände durch zwei Zahlenangaben kennzeichnen. Aber wir möchten gerne bei einem einzigen Zustandspunkt bleiben! Das können wir auch, wenn wir als Phasenraum nicht mehr die Zahlengeraden, sondern die Zahlenebene verwenden. Die beiden Projektionen des einen Zustandspunktes auf die Koordinatenachsen ergeben dann die beiden Freiheitsgrade x und y:



Wenn sich das zweidimensionale Modell zeitlich entwickelt, läuft das auf eine Bewegung dieses Zustandspunktes in der Phasenebene hinaus. Dabei verändern sich auch die beiden Projektionen auf die Achsen, also die Werte der beiden Freiheitsgrade. Bei drei Freiheitsgraden nehmen wir einfach einen dreidimensionalen Phasenraum und projizieren den einen Zustandspunkt auf seine drei Achsen, usw.

Ab vier Freiheitsgraden wird die Sache allerdings etwas unanschaulich, da brauchen wir einen vierdimensionalen Raum, denn wir brauchen ja 4 Projektionen des einen Zustandspunktes. Der „normale“ Raum hat aber drei Dimensionen. Aber der Phasenraum ist ja nur ein *gedachter* Raum, der konkrete Dinge wie Billardkugeln oder atmosphärische Luft gar nicht enthalten soll, sondern nur einen einzigen Punkt, dessen Koordinaten die *Werte* der konkreten Dinge verschlüsseln. Und das macht mathematisch keine Probleme. Ob die Vektoren 3 oder mehr Komponenten haben, verändert die elementaren Rechenregeln der Vektorrechnung nicht.

Ganz allgemein ist also ein n-dimensionales Modell ein Modell mit n Freiheitsgraden. Sein Zustand wird beschrieben durch die n Projektionen des einen Zustandspunktes auf die n Achsen des Phasenraumes. Aber noch einmal: das in diesem Sinne n-dimensional modellierte System befindet sich noch immer im ganz normalen 3D- Ortsraum. Wenn z.B. $n = 10^{80}$ ist, das ist die geschätzte Zahl aller Elementarteilchen des sichtbaren Universums, dann kann man aus Sicht der klassischen Physik die Veränderungen des ganzen Universums durch die Bewegung eines einzigen Zustandspunkt im 10^{80} - dimensionales Phasenraum darstellen! Das ist doch schon etwas, und für unseren Billardtisch brauchen wir das sogar, wie wir gesehen haben.
Die Zahl 10^{100} nennt man übrigens ein Googol. Aber das nur nebenbei.

5. Lineares unvernetztes eindimensionales Modell

Kehren wir von der Zahl 10^{80} zurück zur Zahl 1, zurück zum eindimensionalen Modell, welches ja automatisch unvernetzt ist. Die Klimatemperatur soll der einzige Freiheitsgrad eines Klimamodells sein. Die Änderung der Klimatemperatur soll also nur von der Klimatemperatur selbst abhängen.

Um das durch eine Modell - Gleichung auszudrücken, mit der man auch rechnen kann, bezeichnen wir die vorherzusagende Klimatemperatur mit „x“ und schreiben:

Die zeitliche Änderung von x ist gleich einer Einflussfunktion“, die nur von x abhängt

Exakt das gleiche beschreibt man auch mit dieser sogenannten Differentialgleichung

$dx/dt = f(x)$

Auf der rechten Seite dieser Modellgleichung steht die Einflussfunktion f(x), links steht die zeitliche Änderung der Temperatur, nämlich die Differenz dx. Diese Temperaturdifferenz wird bezogen auf das Zeitintervall dt, während dessen die Änderung dx stattfindet. So ergibt sich ein Differentialquotient dx/dt, welcher nicht nur, dass sich die Temperatur ändert, sondern auch, wie schnell sie sich ändert. Man nennt das auch die *Ableitung* „dx nach dt“.

Wir wollten aber ein Modell haben, dem nicht nur die Vernetzung fehlt, sondern auch die Nichtlinearität. Wie sind nun Nichtlinearität bzw. Linearität definiert? Ganz einfach: die Einflussfunktion f(x) muss nichtlinear bzw. linear sein. Für unsere gewünschte Modellgleichung muss also f(x) linear sein, d.h. f(x) muss proportional zu x sein. Nun haben wir unsere erste konkrete Modellgleichung! Sie lautet

$dx/dt = ax + b$

a ist der Proportionalitätsfaktor, und b ist der konstante Anteil, den eine allgemeine lineare Funktion auch noch enthält.

Alle Änderungen, die von irgendwelchen Modellgleichungen beschrieben werden, nennt man *dynamische Änderungen*. Das sind also die Änderungen, die von den im Modell berücksichtigten Freiheitsgraden verursacht werden, und sie müssen unterschieden werden von den Änderungen, die von den nicht berücksichtigten Freiheitsgraden verursacht werden, die aber natürlich trotzdem existieren. Solche Änderungen nennen wir *Störungen*. Aus der Sicht des Modells müssen Störungen als Zufallsschwankungen angesehen werden, denn sie werden ja nicht dynamisch berechnet. In unserem Einstiegsmodell $dx/dt = ax + b$ wirken sogar alle Freiheitsgrade außer der Temperatur als Zufallsschwankungen.

6. Eindimensionales Modell, Beispiel: Eis- Albedo Rückkopplung

Wie aber kann sich die Temperatur x selbst verändern? Kann eine bestimmte Temperatur eine Temperaturänderung zur Folge haben? Wie geht das? Fragen wir uns erst einmal etwas Leichteres. Was kann denn überhaupt die Temperatur verändern? Das könnten Eis- und Schneeflächen tun. Diese hellen Flächen reflektieren nämlich die Solarenergie und verhindern so ihre Absorption. Den entsprechenden Energieverlust nennt man Albedo. Wenn diese Reflexionsflächen der Solarenergie größer werden, geht mehr Energie verloren als vorher, wird mehr Energie reflektiert und weniger absorbiert. Es kommt zur Abkühlung $dx/dt<0$ durch Albedo - Zunahme.

Wenn umgekehrt die Reflexionsflächen schmelzen, werden neue Absorptionsflächen freilegt, der Energie - Verlust durch die Albedo wird kleiner, und es wird wärmer, $dx/dt>0$.

Wenn aber veränderliche Schnee- und Eisflächen Temperaturänderungen verursachen, dann kann man doch gleich sagen, die Temperatur selbst verursacht Temperaturänderungen, denn die Temperatur bestimmt ja, ob diese Flächen schmelzen oder wachsen. Das ist die bekannte Eis- Albedo- Rückkopplung: Die Temperatur verursachte Temperaturänderungen deshalb, weil sich die Ursache - Wirkungsketten Schneeflächenausbreitung → Albedo - Zunahme → $dx/dt < 0$ (Abkühlung) und Schneeflächenschmelze → Albedo - Abnahme → $dx/dt > 0$ (Erwärmung) zu Ursache – Wirkungs- *Kreisen* schließen, zu sogenannten Rückkopplungsschleifen. Das verdeutlichen die runden Pfeile von der Abkühlung zurück zur Schneeflächenausbreitung und von der Erwärmung zurück zur Schneeflächenschmelze:

Schneeflächenausbreitung → Albedo - Zunahme → $dx/dt < 0$ (Abkühlung) ⮌
Schneeflächenschmelze → Albedo - Abnahme → $dx/dt > 0$ (Erwärmung) ⮌

Tatsächlich ist ja z.B. die Erwärmung nicht nur die Wirkung der Schneeschmelze, was die geraden Pfeile anzeigen, sondern sie ist auch die Ursache für eine weitere, noch stärkere Schneeschmelze, was der runde Pfeil anzeigt. Zusammen genommen ergeben beide Pfeilarten, dass die Erwärmung die Ursache für eine weitere Erwärmung ist. - Wenn aber z.B. die Erwärmung gleichzeitig die Ursache und die Wirkung der Schneeschmelze ist, dann ist ja auch die Schneeschmelze gleichzeitig die Ursache und die Wirkung der Erwärmung, und dann kann man Ursache und Wirkung nicht mehr voneinander trennen! Dann muss man auch vorsichtig sein mit Aussagen wie: "Die Klimaerwärmung ist ja gar nicht die Wirkung des CO_2 - Anstiegs, sondern das CO_2 steigt an, weil sich das Klima erwärmt und dabei erst das in den Gewässern gelöste CO_2 austreibt".

In der Wirtschaft haben wir genau das Gleiche: Ist eine Lohnerhöhung die Ursache für die weitere Konjunkturentwicklung (so spricht der Unternehmer), oder ist diese Lohnerhöhung die Wirkung, sozusagen die gerechte Folgewirkung einer Konjunkturentwicklung (so spricht der Gewerkschafter). Natürlich haben in beiden Fällen, beim Klima und in der Wirtschaft, beide Recht. Wenn aber jeder denkt, nur er selbst habe Recht, der andere aber nicht, dann sollten sie sich erst einmal über Rückkopplungen in der Systemtheorie informieren.

Die besprochene Eis- Albedo- Rückkopplungsschleife wirkt wie ein Teufelskreis: Je wärmer es ist, desto schneller wird es noch wärmer! Ich nehme aber jetzt schon vorweg, dass es in der Atmosphäre nicht nur destabilisierende Rückkopplungen gibt wie diese, sondern auch stabilisierende Rückkopplungen, auf die wir noch zu besprechen kommen. In der aktuellen Klimadiskussion sollte es eigentlich nur um die Frage gehen, ob die Summe aller destabilisierenden oder ob die Summe aller stabilisierenden Rückkopplungen überwiegt. Die Antwort darauf weiß allerdings niemand, und ich werde im Verlauf meines

Vortrags verdeutlichen, dass diese Antwort aus Modellrechnungen heraus auch nicht gegeben werden *kann*.

Aber noch einmal zurück zur Eis- Albedo- Rückkopplung. Wenn Schneeflächen bei hoher Temperatur schmelzen und sich bei niedriger Temperatur ausbreiten, dann muss es eine mittlere Temperatur x_0 geben, bei der sie konstant bleiben und dann auch keinen Einfluss mehr auf Temperaturänderungen haben. Diese Gleichgewichtstemperatur nennt man *Fixpunkt*-Temperatur. Setzt man dieses x_0 in die Modellgleichung ein, dann ändert sich die Temperatur also nicht, und wir haben

$$0 = ax_0 + b$$

Das ist die sogenannte Fixpunktgleichung. Noch einfacher geschrieben lautet sie $b = -ax_0$, und damit kann man in der Ausgangsgleichung $dx/dt = ax + b$ das b ersetzen. Das ergibt $dx/dt = ax - ax_0$ ist, oder ausgeklammert

$$dx/dt = a(x-x_0).$$

Das heißt, die Temperatur - Änderung dx/dt ist proportional zum Abstand $x-x_0$ von der Gleichgewichtstemperatur. Und wenn der Proportionalitätsfaktor positiv ist, dann haben Temperatur - Änderung und Temperaturabstand das gleiche Vorzeichen! Dann wird es umso wärmer, je wärmer es schon ist!

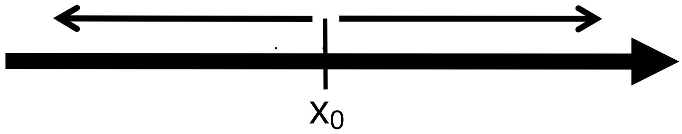
Also: Die lineare Mathematik bestätigt unsere vorausgegangenen physikalischen Überlegungen zur Eis-Albedo-Rückkopplung, als wir sagten, je wärmer es ist, desto schneller wird es noch wärmer. Aber nur mit Hilfe der Mathematik kann man auch rechnen. Und beim Rechnen ergibt sich eine Exponentialfunktion als Lösung dieser Differentialgleichung. - Vor einem entsprechenden exponentiellen Wirtschaftswachstum hatte ja auch der Club of Rome vor 30 Jahren auch gewarnt. Die völlig unrealistische Reduktion komplexer Systeme auf einen einzigen Freiheitsgrad ist also nicht besonders unüblich.

Wir sehen auch, dass die Lösung eines linearen Modells durchaus nichtlinear sein kann. Wenn wir später ein nichtlineares Modell bauen wollen, dann müssen wir nicht darauf achten, dass der Freiheitsgrad x(t), also die Lösung dieser Gleichung nichtlinear von der Zeit abhängt. Das haben wir ja schon hier. Vielmehr muss die Einflussfunktion f(x) nichtlinear vom Freiheitsgrad abhängen, -- bzw. von *den* Freiheitsgraden, wenn wir später zu vernetzten Modellen übergehen.

7. Repelloren und Attraktoren

Fixpunkte x_0 erleiden zwar keine dynamischen Änderungen, so waren sie ja definiert, wohl aber Änderungen durch Störungen, also durch die im Modell *nicht* berücksichtigten Freiheitsgrade. Auch Störungen können Temperatur- Abstände $x-x_0$ vom Gleichgewicht erzeugen, und diese werden dann im Falle a>0 dynamisch noch verstärkt, durch die gerade besprochene destabilisierende Rückkopplung. Da Störabstände noch vergrößert werden, nennt man diese Rückkopplungsart positiv. Die Skizze verdeutlicht das durch die vom Fixpunkt fortweisenden Pfeile:

a > 0:

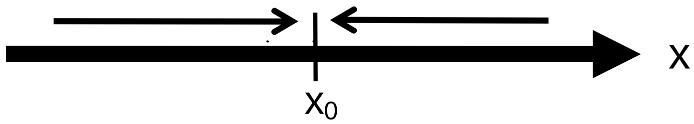


(Repellor - Fixpunkt)

Ein solcher Fixpunkt heißt auch Repellor. Repellorzustände werden in der Natur nie beobachtet, ebenso wenig wie Bleistifte, die senkrecht auf der Spitze stehen bleiben. Solche Repellorzustände sind sozusagen nur mathematisch möglich, aber physikalisch haben sie keinen Bestand. Sie sind ja instabil gegen Störungen, und Störungen sind immer vorhanden.

Kommen wir nun zu den Schwächen und Paradoxien der eindimensionalen Repellor - Modelle. Kein System in einer endlichen Welt kann durch nie endendes Wachstum zutreffend modelliert werden. In unserem atmosphärischen Beispiel zeigt sich diese Paradoxie darin, dass die Gleichung auch dann noch exponentiellen Temperaturanstieg voraussagt, wenn längst alle Eis- und Schneeflächen geschmolzen sind, also keine weiteren Absorptionsflächen mehr freigelegt werden können. Und umgekehrt erhält man auch dann noch eine Abkühlung, wenn die Vereisung schon den ganzen Globus überzogen hat, also keine kühlenden Reflexionsflächen mehr hinzukommen können. Wenn jedoch unsere lineare Klimagleichung einen negativen Proportionalitätsfaktor a hat, dann haben ja Temperatur - Störung (x-x_0) und Temperatur - Änderung dx/dt unterschiedliche Vorzeichen! Statt einer Vergrößerung der Störabstände haben wir nun eine dynamische Verkleinerung. Statt einer destabilisierenden positiven Rückkopplung haben wir eine stabilisierende, negative Rückkopplung, und statt eines Repellors haben wir einen Attraktor! Das alles verdeutlicht diese Skizze.

a < 0:



(Attraktor - Fixpunkt)

Wegen der ständigen Störungen ist aber die Rückkehr zum Attraktor nicht endgültig. Vielmehr ergibt sich ein andauerndes Hin und Her von zufallsbedingter Entfernung vom Attraktor und dynamisch bedingter Rückkehr. Ein solches schwingungsähnliches, quasi-periodisches, stabiles Verhalten bei negativem Proportionalitätsfaktor a entspricht schon eher der Realität als das nie endende exponentielle instabile Wachstum bei positivem a, und wir sollten uns einmal ein atmosphärisches Beispiel für diese Stabilisierung anschauen.

8. Beispiel für stabilisierende Rückkopplungen: Der Karbonat-Silikat Zyklus

Wie angedeutet, löst jede Temperaturänderung verschiedene Rückkopplungen aus. Die Eis- Albedo- Rückkopplung wirkt destabilisierend, weil Erwärmung Absorptionsflächen für weitere Erwärmung freilegt. Ein Beispiel für Stabilisierung wäre das folgende. Erwärmung fördert auch Verdunstung, Wolkenbildung und Niederschlag, und dabei ein Auswaschen des Treibhausgases CO_2, also eine Abkühlung durch sauren Regen. Diese Art der Temperaturstabilisierung wird verantwortlich gemacht für die schon zwei Milliarden Jahre bestehende relative Temperatur- Konstanz der Atmosphäre. In dieser Zeit schwankte die Temperatur quasiperiodisch um etwa 10 -15 Grad, obwohl sich in dieser Zeit die Solareinstrahlung um sagenhafte 30% erhöht hat. Hierauf möchte ich etwas ausführlicher eingehen, weil es noch einmal das ganze Ausmaß der atmosphärischen Komplexität demonstriert. Das motiviert noch einmal für die noch ausstehende Verallgemeinerung unseres einfachen Modells in Richtung Komplexität.

Im Zuge dieser Verallgemeinerung müssen wir ja auch weitere Freiheitsgrade in die Modellgleichungen aufnehmen. Jedes Mal, wenn wir einen neuen Freiheitsgrad in den Gleichungen berücksichtigen, werfen wir ja eine Störung hinaus, es wird jedes Mal eine zufällige Störung in eine dynamisch beschriebene Veränderung transformiert. Somit werden auch die Zufallsanregungen der Temperaturschwingungen um den Attraktor herum in dynamisch beschriebene Anregungen transformiert.

Zunächst muss man beschreiben, wohin der ausgewaschene Kohlenstoff gelangt. Er gelangt in verschiedene Kohlenstoffkreisläufe, die alle selbst schon sehr komplex sind. Ich beschreibe hier nur einen von ihnen, und auch den nur stark vereinfachend, den sogenannten Karbonat- Silikat- Zyklus, der von allen Kohlenstoffkreisläufen die längste Zeitskala hat.
Ein Teil des ausgewaschenen Kohlenstoffs gelangt in die Tiefen der Ozeane, und davon gelangt ein weiterer Teil in die irdische Gesteinsschicht, in die sogenannte Lithosphäre. Bei dieser Sedimentierung helfen z.B. nach unten sinkende tote Schalentiere, die den Kohlenstoff mit in die Tiefe reißen. Das ist der so genannte Marine Schnee. Ist der Kohlenstoff erst einmal in der Gesteinsschicht eingeschlossen, bleibt er der Atmosphäre meist für viele Millionen Jahre entzogen. Er wird erst durch die Plattentektonik wieder frei, wenn nämlich die auf dem heißen Magma schwimmenden Kontinentalplatten gegeneinander stoßen. Das reißt den Kohlenstoff doch wieder auf und schickt ihn als Treibhausgas CO_2 erneut in die Atmosphäre, die sich erneut aufheizt, bis Wolkenbildung und Niederschlag das CO_2 wieder auswaschen, usw. usw.

Tatsächlich haben Paleoklimatologen 6 oder 7 erdgeschichtliche Wechsel zwischen Eiszeitaltern und völlig eisfreien Perioden rekonstruiert, den so genannten Akryogenphasen, die jeweils mehrere bis viele Millionen Jahre andauerten, und die 10-15 Grad Temperaturunterschied mit sich brachten.

Gegenwärtig befinden wir uns gerade in einem Eiszeitalter, der pleistozänen Vereisung, die erst vor 2 Millionen Jahren auf der Nordhalbkugel begonnen hat. Diese Eiszeitalter und eisfreien Phasen sollten nicht verwechselt werden mit den viel bekannteren Eis- und Warmzeiten, wie Riß- oder Würm- Eiszeit und Eem- oder Neo- Warmzeit. Zur Unterscheidung nennt man sie auch Glaziale und Interglaziale. Das sind kleinere und kürzerfristige Temperaturschwankungen von etwa 6 Grad während der gegenwärtig anhaltenden pleistozänen Vereisung. Aber beide Perioden, und noch kürzere Klima- und Wetterperioden, kann man kaum als Zufallsanregungen des Attraktors eines Freiheitsgrades verstehen. Allein die Stichworte kohlenstoffsedimentierende Schalentiere und schwimmende Kontinentalplatten sollten verdeutlichen, dass ungeheuer viele Freiheitsgrade in wirklich realistischen Klimamodellen dynamisch zu berücksichtigen wären.

Auf Venus und Mars ist diese stabilisierende Rückkopplungsschleife unterbrochen worden, und daher ist es auf der Venus so heiß und auf dem Mars so kalt, also nicht deswegen, weil die Venus der Sonne etwas näher steht, und der Mars etwas weiter von ihr entfernt ist als die Erde. Vielmehr ist es auf der Venus deswegen so heiß, weil auf ihr keine kühlende CO_2 - Auswaschung mehr stattfinden kann! Sämtliches Wasser ist dort nämlich komplett verdunstet! Es ist einfach kein Wasser mehr da zum kühlenden Auswaschen von CO_2. Und auf dem Mars ist es deswegen so kalt, weil er zu klein ist für eine Plattentektonik auf heißem Magma. Der in der dortigen Lithosphäre gespeicherte Kohlenstoff steht also nie mehr als Treibhausgas zur Verfügung! Also bleibt es dort kalt. Das ist jedenfalls der Wissensstand von 2001, als ich hierüber für mein Lehrbuch recherchiert habe.

9. Zusammenfassung der Ergebnisse aus linearen unvernetzten Modellen

Nun kommen wir zur systemanalytischen Betrachtung der geschilderten Komplexität. Das Gute ist, dass wir dazu fast keine neuen Begriffe mehr einführen müssen, wir konnten schon fast alles Nötige aus den Eigenschaften des linearen unvernetzten Modells ableiten. Zur Vorbereitung bringen diese Begriffe noch einmal in Erinnerung. Also, was wissen wir bisher?

- Eine Modellierung ist eine Vereinfachung der Realität durch eine Reduzierung der Zahl der Freiheitsgrade, von denen das zeitliche Verhalten des Systems abhängt.
- Ein Freiheitsgrad ist entweder eine globale Variable oder nur ein Gitterpunktswert einer Feldvariablen.
- Die im Modell nicht berücksichtigten Freiheitsgrade nennt man Störungen. Im Rahmen der Modellierung sind das Zufallsschwankungen.
- Die größtmögliche Modell-Vereinfachung ist die Redu-zierung auf einen einzigen Freiheitsgrad, wobei automa-tisch eine Vernetzung zwischen Freiheitsgraden entfällt.

- Modelle mit einem Freiheitsgrad nennt man auch eindimensionale Modelle, weil ihre Phasenräume eindimensional sind.
- Die Differentialgleichung dx/dt = f(x) beschreibt dynamische Änderungen dx/dt des Freiheitsgrades x.
- Ist die Einflussfunktion f(x) linear, f(x) = ax+b, so ist auch das Modell linear. Unabhängig vom Vorzeichen von a gibt es einen Fixpunkt x0 des Freiheitsgrades x.
- Der Fixpunkt heißt Repellor, falls a>0. Die Lösung der Modellgleichung beschreibt dann instabiles exponentielles Wachstum, ausgelöst von einer Störung des Fixpunktes.
- Der Fixpunkt heißt Attraktor, falls a<0 ist. Die Lösung beschreibt dann stabiles quasiperiodisches Verhalten, ausgelöst durch ständige Störungen des Fixpunktes.
- Die Entstabilisierung des Repellors geschieht durch positive Rückkopplung, die Stabilisierung des Attraktors durch negative Rückkopplung .

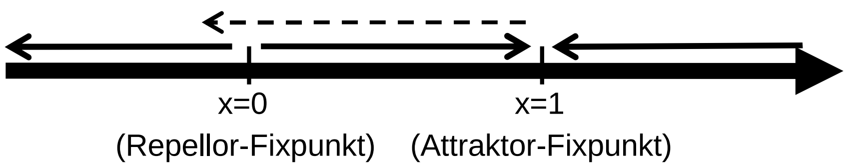
Mit Hilfe dieser systemtheoretischen Begriffe können wir nun unser einfaches Einstiegs - Modell vom Club of Rome - Typ in Richtung Komplexität ausbauen. Im ersten Schritt betrachten wir ein typisches nichtlineares Modell, und im zweiten Schritt vernetzte Modelle, also Modelle mit mehreren Freiheitsgraden.

10. Die nichtlineare unvernetzte Logistische Gleichung

Um schon den ersten Schritt so einfach wie möglich zu gestalten, gehen wir aus von der linearen Gleichung dx/dt = ax+b mit a=1 und b=0, also von dx/dt = x mit der Lösung x(t) = e^t, der Exponentialfunktion. Aus dieser wohl einfachsten nicht ganz trivialen Differentialgleichung überhaupt gewinnen wir durch Multiplikation mit dem Faktor (1-x) die nichtlineare und äußerst lehrreiche Logistische Gleichung

dx/dt = x(1-x)

Wir diskutieren sie anhand der Skizze des noch immer eindimensionalen Phasenraumes:



Beginnen wir mit den Werten x=0 und x=1. Beide Male ergibt die Modellgleichung dx/dt = 0, denn auf der rechten Seite ist ja entweder „0 mal 1“ oder „1 mal 0“ zu rechnen. Beide x-Werte sind also Fixpunkte. - Nun kommen wir zum Intervall aller x-Werte, die größer als 0, aber noch kleiner als 1 sind. x ist „nicht mehr“ Null, und 1-x ist „noch nicht“ Null. Wir multiplizieren also stets zwei positive Zahlen miteinander und haben daher immer positives Wachstum dx/dt > 0. Das deutet der Rechtspfeil in der Mitte der Skizze an.

Aber das Wachstum wird immer geringer: Am Anfang des Intervalls ist dx/dt noch ungefähr gleich x, weil der Faktor (1- x) noch fast 1 ist. Das bedeutete fast exponentielles

Wachstum $x = e^t$. Gegen Ende des Intervalls aber nähert sich x immer mehr der 1, der Faktor (1- x) also immer mehr der Null. Das Wachstum wird immer kleiner, bis es am Fixpunkt x=1 aufhört. Wir haben also mit Hilfe der Nichtlinearität das unrealistische endlose exponentielle Wachstum überwunden und die natürliche Wachstums - Begrenzung durch ausgehende Ressourcen gewissermaßen simuliert. Im Eis- Albedo- Modell waren die Ressourcen für das Temperaturwachstum die Absorptionsflächen, die ja auch nicht unendlich wachsen können. In der Wirtschaft versteht man unter Ressourcen-knappheit eher eine logistische Begrenzung, und das hat dieser Gleichung ihren Namen gegeben.

Für x - Werte größer als 1, rechts im Bild, haben wir negatives Wachstum, (1- x) ist ja kleiner als Null, wenn x>1 ist. Der Fixpunkt x=1 zieht also die linken und die rechten Nachbarpunkte an wie ein Magnet. Daher ist er ein Attraktor.
Für negative x - Werte, links im Bild, ist zwar der Faktor (1- x) positiv, aber der erste Faktor x ist ja jetzt negativ. Also ist dx/dt auch hier negativ, und wegen des Rechtspfeiles daneben ist der Fixpunkt x=0 ein Repellor.

Und nun kommt eine Beobachtung, die für die Erklärung der Launen des Wetters und anderer komplexer Systeme mitentscheidend sein wird: Es gibt Ausnahmen von der Stabilität eines Attraktors! - Wenn z.B. eine Störung den Zustand von x=1 bis hin zu x<0 verändert, (das ist der gestrichelter Pfeil), dann kehrt er nicht mehr zum Attraktor zurück, sondern er begibt sich auf eine Endlosreise nach links, gerade so, als wenn er direkt vom Repellor weggeschickt worden wäre. Ein Attraktor ist also nur dann stabil, wenn alle Störungen kleiner bleiben als der Abstand zum Repellor!
Attraktoren, die nur gegen kleine Störungen stabil sind, nennt man *metastabil*. Die Ursache für diese Neuerung ist die Nichtlinearität, denn diese verschaffte uns den zweiten Fixpunkt, den Repellor, und dieser kann zwischen den Attraktor und den gestörten Attraktor geraten und so die Rückkehr verhindern!

Um es salopp zu sagen: Der reine Zufall macht nicht alles kaputt. Er wird ja von den Fixpunkten in systematische Bahnen gelenkt. In linearen Modellen ist das entweder eine instabile exponentielle Bahn oder eine stabile quasiperiodische Bahn, je nach dem Vorzeichen des Proportionalitätsfaktors. In nichtlinearen Modellen aber kommen *beide* Bahnen in Betracht, und welche ausgewählt wird, bestimmt die Stärke einer *zufälligen* Störung. Die Vorhersagbarkeit der Stabilität des Systems ist durch die Nichtlinearität verloren gegangen.

11. Nichtlineare vernetzte Modelle

Nun fragen wir uns, was sich noch ändert, wenn wir zur Nichtlinearität auch noch die Vernetzung hinzufügen. Wir beginnen diese Untersuchung mit zwei Freiheitsgraden, sagen wir x und y. Die naheliegende Verallgemeinerung von dx/dt = f(x) ist offenbar das zweidimensionale Gleichungs - System mit zwei Einflussfunktionen f_1 und f_2:

$$dx/dt = f_1(x,y), \quad dy/dt = f_2(x,y)$$

Die Änderung von x ist wieder eine Funktion von x, nun aber auch von y. Und die Änderung von y ist eine Funktion von y, aber auch von x. Solche wechselseitigen Beeinflussungen definieren ja gerade die Vernetzung in höherdimensionalen Modellen. In dreidimensionalen Modellen kann z.B. die x- Änderung von z abhängigen, die z- Änderung von y, und die y- Änderung wieder von x. Das ergibt eine Rückkopplungsschleife, die nun schon drei Freiheitsgrade umfasst. Spätestens jetzt sehen wir auch, dass Nichtlinearität und Vernetzung unabhängige Eigenschaften sind, denn die Frage, von wie vielen Freiheitsgraden die Einflussfunktionen abhängen, ist ja völlig unabhängig von der Frage, ob diese Funktionen linear oder nichtlinear sind.

Wir suchen nach einem Beispiel für ein atmosphärisches zweidimensionales Modell. Wir bleiben bei der Klima-Temperatur x als einem der beiden Freiheitsgrade. Der zweite Freiheitsgrad soll die globale Wolkenbedeckung y sein. Zwar sind auch Wolken-Obergrenzen sehr hell und reflektieren die Solarstrahlung, sie tragen also wie reflektierende Schneeflächen zur Abkühlung bei. Aber Wolken schmelzen ja nicht ab, wenn es wärmer wird, sondern sie vermehren sich dann eher. Ein zweiter großer Unterschied ist der, dass Wolken das Klima nicht nur abkühlen, sei es durch die soeben erwähnte Albedo an der Wolken- Obergrenze, oder sei es durch das zuvor erwähnten Auswaschen von CO_2. Wolken können das Klima auch erwärmen, weil Wasserdampf selbst ein starkes Treibhausgas ist. Es ist sogar das stärkste Treibhausgas.

Wie schon geschildert, überwiegt auf der erdgeschichtlichen Zeitskala der CO_2 - Auswascheffekt als Teil des Carbonat - Silikat- Zyklus. Welcher der beiden verbleibenden Effekte auf kürzeren Zeitskalen größer ist, der erwärmende Treibhauseffekt durch 70 Wasserdampf oder der abkühlende Albedoeffekt an der Wolkenobergrenze, hängt von weiteren Freiheitsgraden ab, z.B. von der Luftfeuchtigkeit, von der Beschaffenheit der sogenannten Kondensationskeime, vom Wind, von der Höhe der Wolken, von der Tropfengröße in den Wolken, ja sogar von der spektralen Verteilung dieser Tropfengröße, und von vielem mehr. Jeder dieser Freiheitsgrade hängt seinerseits von weiteren Freiheitsgraden ab. Das sind alles Beispiele für die Vernetzung!

Da aber auch das Schmelzen von Eis und Schnee bei weitem nicht so einfach ist, wie wir vorhin beim Eis-Albedo Modell getan haben, setzen wir uns auch hier über alle Bedenken hinweg und tun so, als könnten wir die Klimatemperatur und die Wolkenbedeckung als einzige Freiheitsgrade eines zweidimensionalen Klimamodells ansehen. Wir wollen ja nur

das Prinzip erkennen, wie sich *überhaupt* das Erklärungspotential für die Vorhersagbarkeit verändert, wenn man weitere Freiheitsgrade hinzunimmt, egal wie viel. Das ist eine typische systemtheoretische Vorgehensweise. Und aus dem gleichen Grund dürfen wir die expliziten Formen der nichtlinearen Funktionen f_1 und f_2 willkürlich treffen, sozusagen aus dem Stegreif, so dass wir wenigstens angenehm rechnen können.
Die nichtlinearen zweidimensionalen Stegreif- Gleichungen mögen lauten

$$dx/dt = x^2 + 2y - 4 \quad , \quad dy/dt = x - y^2 - 1$$

Der Phasenraum ist nun keine Zahlengerade mehr, sondern eine kartesische Ebene mit x und y als Koordinaten, wie bereits besprochen. Auch hier berechnen wir zuerst die Fixpunkte. Um sie zu gewinnen, muss man wieder die zeitlichen Änderungen Null setzen

$$0 = x^2 + 2y - 4 \quad , \quad 0 = x - y^2 - 1$$

Dabei macht man wieder aus Differentialgleichungen algebraische Gleichungen, und das sind gerade die Fixpunktgleichungen. Um sie zu lösen, kann man z.B. die zweite Gleichung nach x umstellen und dieses x in die erste Gleichung einsetzen:

$$x = y^2 + 1 \qquad 0 = (y^2+1)^2 + 2y - 4$$

Wie man sieht, müssen wir dabei einen quadratischen Ausdruck in y noch einmal quadrieren. Dabei erhalten wir eine nichtlineare Gleichung vierten Grades. Diese hat bis zu 4 Lösungen, aus denen man am Ende der Prozedur auch bis zu 4 Fixpunkte gewinnt. Wir sagen „bis zu“ 4 Fixpunkte“, weil auch mehrere Lösungen zusammenfallen können. Falls wir dreidimensionale Modellgleichungen verwenden, erhalten wir bis zu 8 Fixpunkte. Wir müssen dann nämlich den vierfach- nichtlinearen Ausdruck aus dem 2D- Modell noch einmal einsetzen und dabei noch einmal quadrieren, denn die dritte Fixpunktgleichung ist ja auch quadratisch nichtlinear. Das ergibt eine achtfach nichtlineare Gleichung, und die hat bis zu 8 Lösungen.

Und so führt tatsächlich jeder einzelne zusätzliche Freiheitsgrad zu einer glatten Verdoppelung der Zahl der möglichen Fixpunkte! Nichtlineare vierdimensionale Systeme haben bis zu 16, fünfdimensionale Systeme bis zu 32 verschiedene Fixpunkte, usw. Bei 10 Freiheitsgraden kann die Verdopplung pro Freiheitsgrad schon bis zu 1024 Fixpunkte ergeben, nämlich 2^{10} nach zehnmaliger Verdopplung. Bei 20 Freiheitsgraden haben wir schon bis zu 2^{20} Fixpunkte, das ist mehr als eine Million.

12. Zusammenspiel von Nichtlinearität und Vernetzung

Aber auch 20 vernetzte Differentialgleichungen haben nur einen einzigen Fixpunkt, statt einer Million, wenn die Gleichungen linear sind! Lineare Gleichungen haben nun mal nur eine Lösung. Die Vernetzung allein macht es also nicht. Erst das Zusammenspiel von Nichtlinearität und Vernetzung liefert die vielen Fixpunkte. Ganz zu Anfang haben wir aber behauptet, dass dieses Zusammenspiel die Ursache für die Nichtvorhersagbarkeit komplexer Systeme sei! Offenbar haben die vielen Fixpunkte etwas mit der Nichtvorhersagbarkeit des Wetters zu tun. Aber was genau? Bisher haben wir ja nur von einer Nichtvorhersagbarkeit der Stabilität des Systems gesprochen, das ist die von der Nichtlinearität allein, also auch ohne Vernetzung produzierte Metastabilität des Attraktors.

Nun hoffe ich, alles vorbereitet zu haben für das vielleicht wichtigste Aha - Erlebnis dieses Vortrages: Wenn Nichtlinearität und Vernetzung zusammenspielen, wenn also im Phasenraum viele Fixpunkte vorhanden sind, dann haben wir viele Repelloren und Attraktoren, denn das sind ja die Fixpunkte. Die Repelloren interessieren uns nicht so sehr, denn die sind ja instabil, und man sieht so gut wie nie. Und warum nun sind die vielen Attraktoren so wichtig?

Attraktoren können die Reise eines instabil gewordenen Zustandspunktes auch wieder beenden! Der Zustandspunkt, der nach der Instabilität eines metastabilen Attraktors ziellos durch den Phasenraum reist, kann ja von einem der anderen Attraktoren wieder eingefangen werden! Statt einer Instabilität das Systems haben wir dann einen Attraktorwechsel!
Die Wahrscheinlichkeit dafür steigt natürlich mit der Anzahl der auffangbereiten Attraktoren an, also mit dem Vernetzungsgrad. Die Gefahr einer Instabilität wird also bei zunehmender Vernetzung immer geringer! Die Nichtvorhersagbarkeit wird immer weniger eine Nichtvorhersagbarkeit der Stabilität, und immer mehr eine Nichtvorhersagbarkeit des Attraktors, der gerade das Regime übernommen hat.

Und die bloße Anzahl der möglichen Attraktorzustände, (ich erinnere an die Verdopplung der möglichen Fixpunkte pro Freiheitsgrad), erhöht zudem die Reichhaltigkeit möglicher Systemzustände überhaupt! Der nach dem Attraktorwechsel eingefangene Zustand des Modells kann z.B. auch einen höheren Ordnungsgrad haben als der metastabile Attraktor, der vorher instabil geworden war. Dann haben wir Ordnung durch Zufall bekommen! Das erinnert an die zufälligen Mutationen der Evolutionstheorie, und das bedeutet nichts Geringeres, als dass nichtlineare und vernetzte Physik, also komplexe Physik, auch das Prinzip der Evolution verständlicher machen kann. Hier beginnt das weite Feld der Strukturbildungstheorien, der Synergetik und der Evolutionstheorien.

13. Beteiligung von Nichtlinearität und Vernetzung an der Komplexität

● Lineares unvernetztes Modell:

Es zeigt entweder unveränderliches instabiles Wachstum der Entfernung vom Repellor, dem einzigen Fixpunkt ("Club of Rome" -Typ), oder unveränderliches Pendeln um den Attraktor herum, wiederum dem einzigen Fixpunkt ("Schwingungstyp"). Es ist keinerlei „Systementwicklung" möglich.

● Lineares, aber vernetztes Modell:

Trotz der Vernetzung bleibt es bei einem Fixpunkt. Auch hier ist keine „Systementwicklung" möglich. Auch bei größter Vernetzung erfolgt das Verlassen des einzigen Repellors bzw. das Pendeln um den einzigen Attraktor herum lediglich in höherdimensionalen Phasenräumen.

● Nichtlineares, aber unvernetztes Modell (logistisches Modell als Beispiel):

Es besteht eine einzige Entwicklungsmöglichkeit, nämlich ein zufallsbedingter Übergang vom quasiperiodischen Systemverhalten (um den metastabilen Attraktor herum) zu einem monotonen exponentiellen Systemverhalten.

● Komplexes (nichtlineares und vernetztes) Modell:

Die zufallsbedingte Systeminstabilität wird von zufallsbe-dingten Attraktorwechseln *ergänzt*. Je größer der Vernetzungsgrad ist, desto unwahrscheinlicher wird allerdings die Instabilität, denn es stehen ja immer mehr Attraktoren für neue Stabilisierungen bereit. Jedoch ist keine Stabilisierung endgültig, es kann immer nur eine neue Metastabilität erreicht werden.

14. Hochdimensionale Phasenräume

Der obige letzte, vierte Punkt ist gewissermaßen das Ergebnis dieses Vortrags zum Thema Physik komplexer Systeme, und er soll noch etwas vertieft werden. Das gilt auch für die systemtheoretische Methode, mit der wir dieses Ergebnis erhalten haben. Wir haben die Nichtvorhersagbarkeit des Wetters und des Klimas letztlich auf störungsbedingte, also zufallsbedingte Attraktorwechsel im hochdimensionalen Phasenraum zurückgeführt, wobei die Dimensionszahl des Phasenraumes der Zahl der berücksichtigten Freiheitsgrade entspricht.

Man kann den Phasenraum mit den ungeheuer vielen Attraktor- und Repellor- Fixpunkten veranschaulichen durch Vergleich mit einem sehr großen Golfplatz, der viele Täler und Höhen hat. Die Täler sind die Attraktor-Fixpunkte, die Höhen sind die Repellor-Fixpunkte, und der Golfball ist der Zustandspunkt. Dieser bewegt sich einerseits dynamisch bestimmt, nämlich durch die Schwerkraft im unebenen Gelände. Aus den dynamischen Modellgleichungen im Phasenraum wird bei diesem Vergleich also eine ganz normale Bewegungsgleichung für den Golfball. Andererseits erfolgen auch zufallsbestimmte Ortswechsel des Golfballes von einem Tal zum anderen, die von Golfschlägen, Windböen, Eichhörnchen und anderen schwerkraftsunabhängigen Einflüssen herrühren. Bei jeder Zunahme des Vernetzungsgrades um einen Freiheitsgrad kann sich die Anzahl der Hügel und Täler verdoppeln. Die Launen des Wetters und Klimas spiegeln sich nun wieder in der großen Zahl möglicher Bewegungsformen des Golfballes im Anziehungsbereich irgendeines der vielen beliebig geformten Täler, sowie in der großen Zahl der störungsbedingten Ortswechsel von einem Tal zum anderen.

Der Ort des Golfballes auf dem Platz sollte den Systemzustand charakterisieren, wie das der Ort des Zustandspunktes im „richtigen“ Phasenraum ja auch tut. Aber leider hat der Golfball nur 3 Projektionswerte auf die normalen Raumachsen. Der richtige Zustandspunkt eines modernen Atmosphärenmodells hat hingegen viele Millionen Projektionswerte auf die Achsen des richtigen Phasenraumes.

Trotz dieses Versuches einer Veranschaulichung bleibt also der Phasenraum abstrakt und unanschaulich. Er hat sehr viele Dimensionen, aber er beinhaltet nur einen einzigen Punkt. Der Ortsraum ist konkret und anschaulich, er hat nur die 3 vertrauten Dimensionen, aber er beinhaltet die gesamte reale Atmosphäre in all ihrer Vielfalt. Die ganze Komplexität der Atmosphäre im dreidimensionalen Raum wurde ja auf die hohe Dimensionszahl des Phasenraumes übertragen, in dem *dann* nur noch die Trajektorie eines einzigen Punktes betrachtet werden muss.

Das schafft Übersicht. Das schafft aber auch Vollständigkeit der Beschreibung: Der Bewegung eines einzigen Zustandspunktes im Phasenraum entspricht praktisch alles, was im Ortsraum passiert: Das Wandern der Gletscher vom Land zum Meer, der Golfstrom als Bestandteil einer Zirkulation von Grönland bis Indien, die die Meeres -Strömungen überhaupt, die auch Umverteiler der Nahrungsquellen für die klimabeeinflussenden Meerestiere sind, seien es die schon erwähnten CO_2 - sedimentierenden Schalentiere, sei es das noch nicht erwähnte Phytoplankton, was das Auswaschen von CO_2 unterstützt, weil seine Stoffwechselprodukte Kondensationskeime für Wolken sind. Dann der Wind! Denken wir nur daran, dass er auch Umverteiler der Strahlungsabsorber ist, die ihrerseits das Temperaturfeld verändern, das Temperaturfeld wiederum verändert das Druckfeld, und das ist ja das Antriebsfeld für eben diesen Wind! Wieder lauter Vermischungen von Ursache und Wirkung! Der eine Zustandspunkt beschreibt die Kohlenstoffassimilation durch grüne Pflanzen, Verdunstung, Regen, Gewitter, Tornados, Erdbeben, Zonamis, Wolkenformen, und was sonst noch alles.

Und all das und viel mehr ist in der Trajektorie eines einzigen Zustandspunktes im hochdimensionalen Phasenraum verschlüsselt! Die Systemtheorie *kann* gar keine Aussagen machen, die nur wenige Freiheitsgrade herauspicken, etwa: "Das Klima ist instabil wegen des Eis-Albedo - Effektes und des anthropogenen Treibhausgases", - oder: "Das Klima ist stabil wegen des „Wolken-Albedo - Effektes und des Auswaschens von Treibhausgasen“. Die Systemtheorie kann immer nur alle Freiheitsgrade gleichzeitig betrachten, weil erst alle zusammen den Ort eines Zustandspunktes überhaupt definieren. Die Freiheitsgrade sind ja die Komponenten dieses Zustandspunktes, und wenn man auch nur einen einzigen Freiheitsgrad weglässt und in der Diskussion nicht berücksichtigt, ist sein Ort gar nicht definiert!

Aber können unsere größten modernen atmosphärischen Modelle diese Vollständigkeit der Beschreibung auch ausnutzen? Sie können es nicht. Zwar diskretisieren diese Modelle die atmosphärischen Felder in etwa 30 Höhen und an etwa halbzahligen Längen- und Breitenkreisen. Das ergibt rein rechnerisch immerhin etwa 70 Millionen Freiheitsgrade, aber das Rechengitter hat noch immer vertikale Abstände von etwa 1/2 km, und horizontale Abstände von etwa 50 km. Nur an diesen Punkten schaut sich das Modell die Atmosphäre überhaupt erst an!

Da fallen kohlenstoffsedimentierende Schalentiere glatt durchs Rechengitter hindurch, und sogar Wolken. Und wie wir gelernt haben, melden sich alle nicht simulierten Freiheitsgrade wieder zurück, nämlich als zufällige Störungen. - Apropos Wolken: Der eine Zustandspunkt im Phasenraum beschreibt z.B. auch diese Wolken bei Cuxhaven, die ich vor 5 Jahren fotografiert habe:

Auch die Wolken auf dem nächsten Bild sind durch den gleichen Zustandspunkt verschlüsselt, nur zu einem anderen Zeitpunkt. Diese Wolken entsprechen also nur einem anderen Ort des gleichen Zustandspunktes im Phasenraum:

Aber nicht vergessen: Dieser eine Punkt verschlüsselt nicht nur diese Wolken bei Cuxhaven, sondern auch alle Wolken in jedem anderen Winkel der Atmosphäre, und nicht nur Wolken, sondern alle anderen erwähnten Merkmale der Atmosphäre ja auch, !

Praktisch ausnutzen kann man diese Vollständigkeit der Beschreibung aber nicht, wie schon anhand der Modellansätze diskutiert wurde. Welchen Nutzen hat dann das systemtheoretische Phasenraumkonzept überhaupt? Der Nutzen liegt wohl in der ganzheitlichen Sicht, die die Komplexität der Atmosphäre verdeutlicht und präzisiert, und die die Gründe für ihre Nichtvorhersagbarkeit vielleicht überhaupt erst erkennen lässt.

Natürlich sind diese Wolkenbilder viel beeindruckender und auch schöner anzusehen als ein Punkt im Phasenraum. Aber: Wie wollte man denn ohne den Phasenraum erkennen, dass die Nichtvorhersagbarkeit *auch dieser Wolken* darauf beruht, dass die Atmosphäre durch eine unermessliche Zahl von metastabilen Zuständen geprägt ist, und dass ihre aktuellen Zustände zwischen ihnen fortwährend hin und her gestoßen werden? Die Systemtheorie schult auch die Bescheidenheit und schützt vor unbescheidenen Aussagen wie: „Neueste Modellrechnungen haben gezeigt, dass in den nächsten 50 Jahren folgendes passieren wird ... “. Damit will ich nicht behaupten, dass es kein Klimaproblem gibt, sondern nur, dass man es mit Modellen nicht lösen kann.

25. Bemerkungen zur Chaostheorie

Wir haben die Nichtvorhersagbarkeit des Wetters und des Klimas auf zufallsbedingte Attraktorwechsel zurückgeführt, auf stochastische Attraktorwechsel, wie man auch sagen kann, oder wenn man es so nennen will, auf stochastisches Chaos.
Und nun kommt die Sensation: 1963 schrieb der Meteorologe Edward Lorenz eine Arbeit, in der er bewies, dass Nichtvorhersagbarkeit auch ohne stochastisches Chaos vorliegen

kann, also auch ohne all dem, was ich Ihnen heute erzählt habe. Folgerichtig nannte er seine Theorie *Deterministisches Chaos*.

Hiernach kann eine Nichtvorhersagbarkeit auch dann bestehen, wenn der Zustandspunkt ständig im Anziehungsbereich eines einzigen Attraktors verbleibt, rein dynamisch gesteuert und ohne jede Störung.
Und dennoch ist die Bewegung unvorhersagbar, denn man kann die Determiniertheit nur dann ausnutzen, wenn man buchstäblich unendlich genaue Anfangsbedingungen angibt! Hätte man, wie durch ein Wunder, eine solche Anfangsbedingung, dann machte sie ein einziger zusätzlicher Schmetterling schon wieder unbrauchbar.

Jedoch: Wenn man schon heute aus dem Weltraum heraus Autonummern erkennen kann, kann man dann nicht auch bald alle Schmetterlinge der Atmosphäre messtechnisch erfassen und im Modell berücksichtigen? Vielleicht Ja! Das Problem ist nur, dass das auch nicht reicht, denn Berry hat ja inzwischen den Schmetterlingseffekt zum Gravitationseffekt eines Elektrons verschärft, und die genauen Anfangsbedingungen dieses Elektrons verhindert die Quantentheorie mit ihrer Unschärferelation – grundsätzlich!

Es lässt sich also sagen, dass die Launen des Wetters,Klimas und anderer komplexer Systeme zwei Ursachen haben: Erstens werden wir das heute hauptsächlich besprochene stochastische Chaos erst dann los, wenn wir alle zufälligen Störungen in berechenbare Änderungen umwandeln, wenn wir also alle überhaupt existierenden Freiheitsgrade im Modell berücksichtigen. Erst wenn wir das ganze Universum simulieren, haben wir, sozusagen als Bonus, auch das Wetter simuliert, und auch den Billardtisch. Aber nach der Chaostheorie gilt selbst das nicht, denn:

Zweitens können wir die Determiniertheit des deterministischen Chaos erst dann ausnutzen, wenn wir die Anfangsbedingungen unendlich genau angeben. Die Beherrschung des deterministischen Chaos ist sogar prinzipiell nie möglich, falls die Quantentheorie in ihrer aktuellen Interpretation gültig ist. Dann sollten wir aber nicht unglücklich sein, denn immerhin sind ja dann Determinismus und so etwas wie Willensfreiheit keine Gegensätze mehr. Die Unschärferelation macht's möglich! Und was die Launen des Wetters und Klimas betrifft - wir werden sie einfach hinnehmen müssen! Sie spiegeln sozusagen die Willensfreiheit der Natur wieder.