

## Frenet'sche Formeln und Christoffelsymbole

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird üblicherweise gelehrt, dass eine partielle Ableitung eines Vektors *nur dann* einen Tensor ergibt, wenn man diese Ableitungen in kartesischen Koordinaten durchführt, nicht aber in krummlinigen Koordinaten, wie sie in Einsteins gekrümmten Raum nun einmal zu verwenden sind. Erst wenn man sogenannte Christoffelsymbole hinzufügt, bekommt man wieder Tensoren.

Das hat mir keine Ruhe gelassen, da wir es in der Theoretischen Meteorologie auch mit krummlinigen Koordinaten zu tun haben, ein abgeleiteter Vektor hier aber *trotzdem* ein Tensor ist! Wenn wir z.B. Lagrange'sche Hydrodynamik betreiben, arbeiten wir mit so genannten natürlichen Koordinaten, die sich an die gekrümmten Trajektorien der Fluidteilchen anschmiegen. Somit sind die Basisvektoren ortsabhängig. Bei der räumlichen Ableitung eines Vektors muss das natürlich berücksichtigt werden: es müssen nicht nur die Komponenten bezüglich der Basis abgeleitet werden, sondern auch die Basisvektoren selbst! *Diese Ableitungen werden von den Frenet'schen Formeln geliefert.*

Beim Vergleich der "Indexgymnastik" der ART mit dem von mir fast 30 Jahre lang gelehrt (und in meinem Buch sehr ausführlich dargestellten) Tensorkalkül in der Theoretischen Meteorologie kam mir die Idee, dass man entsprechend verallgemeinerte Frenet'sche Formeln auch in der vierdimensionalen und schiefwinkligen Welt der Allgemeinen Relativitätstheorie anwenden können sollte, und dass sich so ganz zwanglos die Christoffelsymbole ergeben sollten. Dann ist die Ableitung eines Vektors *eben doch* ein Tensor, wenn man eben die *ganze* Vektorinformation ableitet, nicht nur die Vektorkomponenten, sondern auch die veränderlichen Basisvektoren, relativ zu denen die Vektorkomponenten ja erst gelten!

Das Ergebnis meiner Überlegung ist, dass die von verallgemeinerten Frenet'schen Formeln gelieferten Komponenten der Änderung der Basisvektoren in der „alten“ Basis gerade die Christoffelsymbole sind! Das ist mir inzwischen so auch von zwei Physik-Dozenten unabhängig voneinander bestätigt worden. Es ist aber offen geblieben, ob meine Idee längst praktiziert wird, wenn auch unter anderen Fachbegriffen. Ich halte das für äußerst wahrscheinlich. Sollten Sie, lieber Besucher meiner Webseite, vom Fach sein oder auch sonst einen Kommentar abgeben wollen, wäre ich für eine Antwort auf [met\\_lange@yahoo.de](mailto:met_lange@yahoo.de) auch weiterhin sehr dankbar.

In der Theoretischen Meteorologie wird an Raumkurven  $\mathbf{r}(s)$ ,  $s$  = Bogenlänge, gerne ein „natürliches“ (krummliniges) Koordinatensystem angeheftet. Beispiele für solche Raumkurven sind Stromlinien, Trajektorien, aber auch z.B. Schnittlinien von isobaren mit isothermen Flächen, usw. - *Ein* Basisvektor des gesuchten natürlichen orthonormalen Dreibeins ist der *Tangentialvektor* an die Raumkurve:

$$\mathbf{t} = dr/ds$$

$\mathbf{t}$  ist ein Einheitsvektor wegen  $|dr| = ds$ . - Hierzu orthogonal ist  $d\mathbf{t}/ds$ , denn

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1 \leadsto d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})/ds = 0 = d\mathbf{t}/ds \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot d\mathbf{t}/ds \leadsto \mathbf{t} \perp d\mathbf{t}/ds$$

(anschaulich: da  $\mathbf{t}$  nicht „länger“ werden kann, kann er sich nur „senkrecht wegdrehen“). Der Vektor  $d\mathbf{t}/ds$  dient nach seiner Normierung auf die Einheitslänge als *zweiter* orthonormierter Basisvektor  $\mathbf{n}$  des natürlichen Dreibeins:

$$\mathbf{n} = (d\mathbf{t}/ds) / \kappa_s \text{ oder}$$

Der Normierungsfaktor  $1/\kappa_s$  ist der Krümmungsradius.  $\kappa_s = d\mathbf{t}/ds \cdot \mathbf{n}$  heißt „erste Krümmung“ oder „Flexion“ (anschaulich: die Drehung  $d\mathbf{t}/ds$  des Tangentialvektors beim Fortschieben auf der Raumkurve ist umso größer, je stärker die Kurve gekrümmt ist).  $\mathbf{n}$  heißt

*Hauptnormalvektor*. Aus  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0$  (Orthogonalität) folgt nach Differentiation nach  $s$ :  
 $d\mathbf{t}/ds \cdot \mathbf{b} + d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{n} = 0$  oder  $\kappa_s = d\mathbf{t}/ds \cdot \mathbf{n} = -d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{t}$ .

Das Dreibein, die „natürliche orthogonale Basis“, wird komplettiert durch dem *Binormalvektor*

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

Dieser bringt neben der „ersten“ Krümmung  $\kappa_s = d\mathbf{t}/ds \cdot \mathbf{n} = -d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{t}$  noch eine „zweite“ Krümmung (Torsion) ins Spiel:  $\tau_s = d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{b} = -d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{n}$ . Die *Frenet'schen Formeln* beschreiben die Änderungen *aller drei* Basisvektoren beim Fortschreiten auf Trajektorien, Stromlinie usw., also auf Raumkurven  $\mathbf{r}(s)$ , d.h. auf den Tangenten - Vektorlinien („s-Linien“):

$$\begin{aligned} d\mathbf{t}/ds &= \kappa_s \mathbf{n} \\ d\mathbf{n}/ds &= -\kappa_s \mathbf{t} + \tau_s \mathbf{b} \\ d\mathbf{b}/ds &= -\tau_s \mathbf{n} \end{aligned}$$

M.a.W.: Beim Fortschreiten auf der gekrümmten Raumkurve ergeben sich vektorielle Änderungen der Basisvektoren des natürlichen Koordinatensystems. Die Frenet'schen Formeln sind einfach *die Darstellung dieser Änderungsvektoren in der Ausgangsbasis*, sie liefern also die *Komponenten* dieser Änderungsvektoren bei ihrer Zerlegung in der Ausgangsbasis. - Für eine feldmäßige Beschreibung, also für die Bildung von Gradienten von  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{t} &= \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} ds + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{b}} d\mathbf{b} \\ \nabla \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} ds + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{b}} d\mathbf{b} \\ \nabla \mathbf{b} &= \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} ds + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{b}} d\mathbf{b} \end{aligned}$$

benötigt man zusätzlich zu den (nun partiellen) Änderungen mit  $s$  noch die unterstrichene Terme, also entsprechende Änderungen von  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  auf den Vektorlinien der Haupt- und Binormalvektoren (den „n- und b-Linien“). Diese zusätzlichen 6 Frenet'schen Formeln sind relativ kompliziert. Ich kenne sie eigentlich *nur* aus einer von mir selbst ausgearbeiteten und 1967 gedruckten Vorlesungsmitschrift meines akademischen Lehrers Prof. Fortak. Allerdings habe ich für den Spezialfall einer rein *sphärischen* Krümmung die *kompletten* Formeln auch in meinem Buch angegeben. Außerdem habe ich dort den für die Meteorologie wichtigen 2D - Spezialfall eines *konstanten* Binormalvektors  $\mathbf{b}$  (d.h. für  $\tau_s=0$ ) angegeben, diesmal jedoch für *beliebige* Krümmungen der Kurve in der *Ebene*.  $\mathbf{b}$  ist hier identisch mit dem konstanten Einheitsvektor in vertikaler Richtung relativ zu der als Tangentialebene gedachten Erdoberfläche. In dieser Ebene müssen nur noch die Gradienten

$$\nabla \mathbf{t} = \partial \mathbf{t} / \partial s \, ds + \partial \mathbf{t} / \partial n \, dn \quad \text{und} \quad \nabla \mathbf{n} = \partial \mathbf{n} / \partial s \, ds + \partial \mathbf{n} / \partial n \, dn$$

gebildet werden. Die hierzu benötigten Frenet'schen Formeln der s-Linien *und* der n-Linien lauten:

$$\partial \mathbf{t} / \partial s = \kappa_s \mathbf{n} \quad ; \quad \partial \mathbf{n} / \partial s = -\kappa_s \mathbf{t}$$

$$\partial \mathbf{t} / \partial n = \kappa_n \mathbf{n} \quad ; \quad \partial \mathbf{n} / \partial n = -\kappa_n \mathbf{t}$$

Natürlich sind die Krümmungen der s- und n-Linien ortsabhängig (im Gegensatz zur Krümmung der sphärischen Fläche im 3D Raum). - Allgemein:

In *allen* Fällen werden Frenet'sche Formeln *benötigt*, wenn man einen beliebigen Vektor  $\mathbf{a}$  in natürlichen (also krummlinigen) Koordinaten ableiten will. Im allgemeinen 3D-Fall (Koordinaten  $s, n, b$ ) ist ja

$$\nabla = \mathbf{t} (\partial / \partial s) + \mathbf{n} (\partial / \partial n) + \mathbf{b} (\partial / \partial b) \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = a_t \mathbf{t} + a_n \mathbf{n} + a_b \mathbf{b},$$

so dass zur Bildung des Gradienten  $\nabla \mathbf{a}$  die Komponenten und die Basisvektoren abzuleiten sind:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{a} &= \mathbf{t} (\partial / \partial s) (a_t \mathbf{t}) + \mathbf{n} (\partial / \partial n) (a_t \mathbf{t}) + \mathbf{b} (\partial / \partial b) (a_t \mathbf{t}) \\ &\quad + \mathbf{t} (\partial / \partial s) (a_n \mathbf{n}) + \mathbf{n} (\partial / \partial n) (a_n \mathbf{n}) + \mathbf{b} (\partial / \partial b) (a_n \mathbf{n}) \\ &\quad + \mathbf{t} (\partial / \partial s) (a_b \mathbf{b}) + \mathbf{n} (\partial / \partial n) (a_b \mathbf{b}) + \mathbf{b} (\partial / \partial b) (a_b \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{t} [\mathbf{t} (\partial / \partial s) a_t + a_t (\partial / \partial s) \mathbf{t}] + \mathbf{n} [\mathbf{t} (\partial / \partial n) a_t + a_t (\partial / \partial n) \mathbf{t}] + \mathbf{b} [\mathbf{t} (\partial / \partial b) a_t + a_t (\partial / \partial b) \mathbf{t}] \\ &\quad + \mathbf{t} [\mathbf{n} (\partial / \partial s) a_n + a_n (\partial / \partial s) \mathbf{n}] + \dots \end{aligned}$$

Es kommt also 9 Mal zur Anwendung der Produktregel und dadurch auch zur Anwendung der Frenet'schen Formeln, die ja *Komponentendarstellungen der vektoriellen Änderungen*  $\partial \mathbf{t} / \partial s$ ,  $\partial \mathbf{t} / \partial n$ , ...,  $\partial \mathbf{n} / \partial s$ , ... *in der ursprüngliche Basis*  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  sind. - Mit

$$s, n, b = x_i, \quad \partial / \partial x_i = \partial_i, \quad a_t, a_n, a_b = a_i \quad \text{und} \quad \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{e}_i$$

vereinfacht sich die obige Schreibearbeit sehr:

$$\nabla = \mathbf{e}_i \partial_i \quad ; \quad \mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i \quad ; \quad \nabla \mathbf{a} = (\mathbf{e}_i \partial_i)(a_k \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i [(\partial_i a_k) \mathbf{e}_k + a_k \partial_i \mathbf{e}_k]$$

In der obigen *oberen* Zeile stehen Vektoren, *obwohl* der Index  $i$  gebunden ist. Zwar gilt  $a_i b_i$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \text{Skalar}$ ,  $a_i$   $\mathbf{a} = \text{Vektor}$ ,  $a_i b_j$   $\mathbf{a} \mathbf{b} = \text{Tensor}$  (als dyadisches Produkt zwischen Vektoren). Aber die Regel, wonach die Zahl der *freien* Indizes die Stufe des Tensors angibt, gilt nur, wenn man ausschließlich *Zahlen* mit Indizes versieht. In der oberen Zeile jedoch bezeichnet  $\mathbf{e}_i$  drei verschiedene Vektoren, und  $a_i \mathbf{e}_i$  ist nicht etwa ein Skalarprodukt wie  $a_i b_i$ , sondern einfach die Entwicklung des Vektors  $\mathbf{a}$  in der Basis  $\mathbf{e}_i$ . Entsprechend kann man einen Tensor  $\mathbf{T}$  in einer Tensorbasis entwickeln, welche aus neun Basistensoren  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$  besteht, also aus allen möglichen dyadischen Produkten der Vektorbasis  $\mathbf{e}_i$ . Diese Entwicklung lautet  $\mathbf{T} = T_{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$ .

Auch  $\nabla \mathbf{a}$  ist als dyadisches Produkt ein Tensor, *auch er muss in der Tensorbasis*  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$  *darstellbar sein!* Wie man allerdings an der obigen *unteren* Formelzeile sieht, gilt nicht die zu  $\mathbf{T} = T_{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$  *analoge Darstellung* „ $\nabla \mathbf{a} = \partial_i a_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$ “. Diese Analogie wäre nur dann gegeben, wenn man in der dortigen eckigen Klammer die aus der Produktregel folgenden zweiten Terme vernachlässigt hätte, d.h. wenn man die Ableitungen  $\partial_i \mathbf{e}_k$  ignoriert hätte. Hier kommen die Frenet'sche Formeln zum Zuge, und nur wenn  $\partial_i \mathbf{e}_k = 0$  wäre, wenn also die s-, n- und b-Linien *nicht* gekrümmt wären, (Kartesische Koordinaten), wäre  $\nabla \mathbf{a} = \partial_i a_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$  korrekt.

Bei gekrümmten Koordinatenlinien müssen die dann *nicht* verschwindenden Vektoren  $\partial_i \mathbf{e}_k$  in der Basis  $\mathbf{e}_m$  zerlegt werden. Jedem der 9 Vektoren  $\partial_i \mathbf{e}_k$  müssen also 3 Komponenten zugeordnet werden. Da die Vektoren selbst schon 2 Indizes haben, benötigen die Komponenten dieser Zerlegung 3 Indizes. Zwei von ihnen (i,k) kennzeichnen den Vektor, der zerlegt wird, und der dritte Index (m) kennzeichnet die Komponenten dieses Vektors in der Basis. Die hier zuständigen Frenet'schen Formeln haben also die Form:

$$\partial_i \mathbf{e}_k = K_{ikm} \mathbf{e}_m$$

Wiederum ist  $K_{ikm} \mathbf{e}_m$  nicht etwa ein Tensor zweiter Stufe wegen der beiden „freien Indizes“, sondern es ist die Entwicklung eines Vektors, der seinerseits zwei Indizes besitzt! Einsetzen dieser Frenet'schen Formeln in die obige eckige Klammer ergibt

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{e}_i [(\partial_i a_k) \mathbf{e}_k + a_k \partial_i \mathbf{e}_k] = \mathbf{e}_i [(\partial_i a_k) \mathbf{e}_k + a_k K_{ikm} \mathbf{e}_m]$$

oder nach Indextausch  $m \leftrightarrow k$  im letzten Term

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{e}_i [(\partial_i a_k) \mathbf{e}_k + a_m K_{imk} \mathbf{e}_k] = [\partial_i a_k + a_m K_{imk}] \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$$

Wie ich nun gelernt habe, wird es im *Riemannschen Raum* komplizierter, weil die Koordinaten nicht nur krummlinig, sondern die Basissysteme auch schiefwinklig sind, und weil nun  $D=4$  ist. Die geniale "Erfindung" von ko- und kontravarianten Basissystemen ( $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$ ) und Koordinaten ( $a_i, a^i$ ) ermöglicht es aber offenbar, fast ebenso fortzufahren wie bisher (ich verzichte hier auf die sonst üblichen griechische Indizes):

$$\nabla = \mathbf{g}^i \partial_i \quad ; \quad \mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i \quad \curvearrowright$$

$$\nabla \mathbf{a} = (\mathbf{g}^i \partial_i)(a^k \mathbf{g}_k) = \mathbf{g}^i [(\partial_i a^k) \mathbf{g}_k + a^k \partial_i \mathbf{g}_k]$$

Nun wären für  $\partial_i \mathbf{g}_k$   $4 \times 4 = 16$  „Frenet'sche Formeln“ zu verwenden. Meine Vermutung ist nun, dass die von den Frenet'schen Formeln gelieferten Komponenten (bei der Entwicklung der Vektoren  $\partial_i \mathbf{g}_k$  in der Basis  $\mathbf{g}_k$ ) gerade die Christoffelsymbole sind, also:

$$\partial_i \mathbf{g}_k = \Gamma_{ik}^m \mathbf{g}_m \quad \curvearrowright$$

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{g}^i [(\partial_i a^k) \mathbf{g}_k + a^k \partial_i \mathbf{g}_k] = \mathbf{g}^i [(\partial_i a^k) \mathbf{g}_k + a^k \Gamma_{ik}^m \mathbf{g}_m] \quad \text{oder nach Indextausch } m \leftrightarrow k$$

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{g}^i [(\partial_i a^k) \mathbf{g}_k + a^m \Gamma_{im}^k \mathbf{g}_k] = [\partial_i a^k + a^m \Gamma_{im}^k] \mathbf{g}^i \mathbf{g}_k \quad \text{oder in der Symbolik } \partial_i a^k =: a^k_{;i}$$

$$\nabla \mathbf{a} = [a^k_{;i} + a^m \Gamma_{im}^k] \mathbf{g}^i \mathbf{g}_k =: a^k_{;i} \mathbf{g}^i \mathbf{g}_k$$

Die Berücksichtigung der Produktregel und der Frenet'schen Formeln im jeweils zweiten Faktor dieser Produktregel macht also aus der partiellen Ableitung  $a^k_{;i}$  „automatisch“ die kovariante Ableitung:

$$a^k_{;i} = \partial_i a^k + a^m \Gamma_{im}^k$$

Meine Vermutung wird entscheidend unterstützt von H. K. Iben in seinem Taschenbuch „Tensorrechnung“, Teubner (1995), wo allerdings kein Bezug zu den Frenet'schen Formeln erwähnt wird und auch keinen Kontext zur ART aufgebaut wird. Aber Iben bildet auf Seite 118 die Divergenz eines Vektors in beliebigen ortsabhängigen Koordinaten und kommt dabei zu dem Schluss: „Die Christoffel-Symbole zerlegen die Ableitung der kovarianten Basisvektoren nach den Koordinaten in Richtung der kontravarianten Basisvektoren“. Genau das habe ich im obigen  $\partial_i \mathbf{g}_k = \Gamma_{ik}^m \mathbf{g}_m$  auch behauptet.

### Zusammenfassung:

Entscheidend scheint mir zu sein, dass im Gegensatz zur entwickelten symbolischen Form die Komponentenform (also die Indexform) den Nachteil hat, auf die „Nennung“ der Basisvektoren, auf welche sich die Komponenten beziehen, zu verzichten. Das kann aber nur so lange gut gehen, wie man sich darauf verlassen kann, dass die Vektorbasis *immer die gleiche* bleibt. Das ist jedoch nur in kartesischen Koordinaten, also höchstens im Euklidischen Raum der Fall. Schon im „natürlichen“ Koordinatensystem der Hydrodynamik, erst recht aber im Riemann'schen Raum, gilt das nicht. Zwar bleiben auch hier offenbar alle algebraischen Operationen mit Vektoren und Tensoren in Indexschreibweise korrekt, wohl deshalb, weil sich algebraische Operationen auf feste Zeiten und Orte beziehen. Wenn man aber Vektoren oder Tensoren *ableiten* muss, sind auch die Basisvektoren betroffen, und da diese in der Indexschreibweise gar nicht genannt werden, *muss* etwas „schief gehen“. Beharrt man trotzdem auf der Indexschreibweise, so muss man im Nachhinein „tricksen“, d.h. Zusatzterme (Christoffelsymbole) einführen, welche das Ergebnis der Ableitung wieder zu einem Gebilde machen, welches die zu fordernde Transformationseigenschaft für Tensoren hat.

In den mir bekannten ART- Büchern wird fast ausschließlich die Indexschreibweise verwendet und dabei gezeigt, dass sich  $a^k{}_i$  nicht wie ein Tensor transformiert, dass man das aber "korrigieren" kann durch additive Terme, welche Christoffelsymbole enthalten. Diese werden oft erst *nachträglich* geometrisch interpretiert durch Konzepte wie Parallelverschiebung, affine Konnexion o.ä.

Ich finde das etwas willkürlich, denn ich meine ja, dass die Christoffelsymbole ganz automatisch entstehen bei der Ableitung des Tensors in der entwickelten symbolischen Form, also des *ganzen* Tensors aus ortsabhängigen Komponenten *und* ortsabhängigen Basisvektoren. Die dann wegen der Produktregel *automatisch* entstehenden additiven Terme produzieren die Christoffelsymbole nach Anwendung der Frenet'schen Formeln ganz zwanglos und natürlich. Sie brauchen nicht mehr geometrisch gedeutet zu werden, denn Frenet'sche Formeln berücksichtigen ja die Geometrie *von vornherein*, es sind schon *differentialgeometrische Formeln!*