

3.5 Deterministisches Chaos im Strahlungsbilanz-Klimamodell?

Worum geht es?

Zum Thema deterministisches Chaos gab es bis etwa 2005 eine wahre Flut von Veröffentlichungen. Seitdem ist es um dieses Thema etwas stiller geworden, ob zu Recht oder Unrecht, müssen wir hier nicht entscheiden. Fest steht aber, dass es in der Klimadiskussion eine wichtige Rolle spielt, weshalb es auch in diesem Buch zur Sprache kommen soll.

Die allermeisten Darstellungen demonstrieren das Entstehen von deterministischem Chaos entweder anhand der logistischen Gleichung oder an dem stark vereinfachten Konvektionsmodell, an dem Lorenz 1963 [Lor63] das deterministische Chaos selbst entdeckt hatte. Ich habe für unsere Darstellung das sogenannte Budyko-Sellers-Klimamodell herausgesucht, [Bud69], [Sell69], das ich allerdings erst 'zweckentfremden' musste, (einen Modell-Parameter stark modifizieren musste), um deterministisches Chaos zu erhalten. Man sieht auch hier wieder, dass ein bestimmtes 'chaosfähiges' Modell nicht bei allen Parameterwerten deterministisch chaotisch ist!

Bevor wir allerdings in die Beschreibung des hier simulierten deterministischen Chaos eintreten, sollten wir erst einmal das dazu verwendete Budyko-Sellers-Klimamodell gründlich kennenlernen. Es vermittelt nämlich nicht nur einen Zugang zu deterministischem Chaos, sondern auch zu sehr wichtige Eigenschaften eines Klimasystems, die wir bisher noch nicht erwähnt haben.

Seit der Veröffentlichung des Meteorologen Edward N. Lorenz im Jahre 1963 [Lor63] - eigentlich jedoch erst seit Mitte der siebziger Jahre, als Physiker eher zufällig die sensationelle Bedeutung dieser von damaligen Meteorologen wenig beachteten Arbeit erkannt hatten - hat das Wort Chaos zwei Bedeutungen: Das schon sehr lange bekannte Chaos in der Bedeutung eines zufälligen, nicht berechenbaren Verhaltens - in der Fachsprache Zufalls-Chaos oder stochastisches Chaos genannt - muss seit den siebziger Jahren unterschieden werden vom sogenannten deterministischen Chaos.

Der Zufalls-Eindruck entsteht bei letzterem daraus, dass die errechneten Werte wie zufällige aussehen. Wenn man z.B. die Rechnung einmal mit der Genauigkeit 20 Stellen, und einmal mit der Genauigkeit 21 Stellen nach dem Komma durchführt, sind die Rechenergebnisse grundverschieden voneinander. Man spricht von einer **sen-**

siblen Abhängigkeit der Rechenergebnisse von der Anfangsbedingung. Diese zusätzliche 21-te Stelle nach dem Komma *scheint* ebenso klein und ebenso unbedeutend zu sein wie der Einfluss des Flügelschlags eines Schmetterlings auf die Windverhältnisse in der gesamten Atmosphäre, und natürlich auch auf die mit dem veränderten Windfeld vernetzen sonstigen Freiheitsgraden der Atmosphäre. Dieser - von Lorenz vorgebrachte - Vergleich ist so populär geworden, dass das deterministische Chaos in der breiten Öffentlichkeit heute als **Schmetterlingseffekt** bekannt geworden ist.

Wenn man z.B. in den '*chaotischen Bereichen*' (→ Seite 257) der logistischen Differentialgleichung unbedingt die 'richtigen' Lösungen ausrechnen möchte - mit welcher Genauigkeit muss man das tun? Die Antwort: Man benötigt bei jedem Rechenschritt buchstäblich *unendlich viele* Stellen nach dem Komma! Mit anderen Worten: Systeme, deren Differentialgleichungen deterministisch chaotisches Verhalten aufweisen, sind (in den Parameterbereichen, in denen deterministisches Chaos auftritt) *nicht* vorhersagbar. 'Schuld' daran ist die Nichtlinearität, nicht die Vernetzung. *Daher* können schon eindimensionale Gleichungen, nach unserer Definition also schon nichtkomplexe Systeme, deterministisch-chaotische Eigenschaften aufweisen. In meinem Beitrag zum Thema 'mögliche Anwendungen der Chaostheorie auf das Wetter- und Klimasystem' im Springer-Buch 'Tatort Erde', 2. Auflage [Lan92] hatte ich mich noch nicht an diese Definition der Komplexität gehalten, als ich schrieb: "Einfache Gleichungen können komplexes Verhalten beschreiben. Komplexe Gleichungen, wie z.B. die Gleichungen des Klimasystems ... können ebenfalls komplexes Verhalten erzeugen". Auf die Möglichkeit einer alternativen Definition von Komplexität, die auch das deterministische Chaos umfasst, hatte ich *hier* auf Seite 284 hingewiesen.

Ob es allerdings sinnvoll war, zwischen komplexen Gleichungen und komplexem Verhalten zu *unterscheiden*, muss ich aus heutiger Sicht bezweifeln. Aber die dort vor 25 Jahren getätigten Aussagen *als solche* sind nicht in Frage zu stellen, und die wichtigsten dieser Aussagen fließen auch - teilweise in popularisierter Form - in den hier für Laien bestimmten Text mit ein, ebenso wie einige der Abbildungen, die ich mit der Heim-Computertechnik von damals hergestellt hatte.

Wie gesagt, sieht deterministisches Chaos nur zufällig aus, *ist es aber nicht*, weil man es ja *berechnen* kann. Also sollten wir auch hier etwas ausrechnen und dann nachschauen, ob das Rechenergebnis 'wie Zufall' aussieht. Wenn ja, sind wir auf deterministisches Chaos gestoßen. Genau so hat das Lorenz 1963 auch getan, und zwar mit einem stark vereinfachten Rechenmodell für die atmosphärische Konvektion. Es war ein dreidimensionales System von Differentialgleichungen, dessen

Chaosfähigkeit er allerdings zufällig entdeckt hat! Es lohnt sich, diese in mehrfacher Hinsicht lehrreiche Geschichte kurz zu erzählen.

Die Computer der damaligen Zeit hatten gerade das Röhrenzeitalter überwunden und arbeiteten schon mit Transistoren, aber eine ständige Aufsicht war dennoch sehr zweckmäßig. Nach einem Arbeitstag war der Rechner noch nicht fertig geworden mit der numerischen Lösung des dreidimensionalen Gleichungssystems. Daher notierte Lorenz die Zwischenergebnisse, um sie am nächsten Morgen als 'Anfangsbedingungen' für den Fortgang der Prognose einzutippen. Aber er notierte nicht nur die allerletzten Ergebnisse, sondern auch diejenigen, die eine gewisse Zeitspanne vorher vorlagen, und genau *diese* dienten am nächsten Tag zur Fortsetzung. Damit war eine gewisse Zeitspanne geschaffen worden, anhand der man die Rechnungen 'gestern und heute' miteinander vergleichen konnte, um sicher zu sein, dass man keine Übertragungsfehler gemacht hat. Sehr lehrreich!

Aber noch lehrreicher war sein Verhalten am nächsten Tag, als die erhoffte Übereinstimmung *ganz und garnicht* stattfand! Statt zu sagen, man müsse bei solchen Handnotizen eben *noch* besser aufpassen, stellte er die Frage, was es wohl bedeuten würde, wenn die handschriftliche Datenübertragung *fehlerlos* war! Der einzige vernünftige dann noch übrig bleibende Grund für das Auseinanderlaufen der beiden Prognosen gestern und heute konnte eigentlich nur sein, dass das Ergebnis-Display weniger Stellen nach dem Komma anzeigte, als der Rechner zum internen Rechnen benutzte!

Und genau so war es. Die vielleicht nur *eine* fehlende Stelle nach dem Komma beim Neustart des Rechners war der kleine Unterschied zwischen der heutigen und der gestrigen Berechnung des Systemverhaltens während des Kontrollzeitraumes. Aber die Wirkung war enorm: Der 'Schmetterlingseffekt' war entdeckt worden!

Es war übrigens auch Lorenz selbst, der die *noch* einfachere, (weil *eindimensionale*) **logistische Gleichung** als eine Art Metapher für mögliches Klimaverhalten angesehen hat. Ich habe für unsere Versuchs-Rechnungen das sogenannte **Budyko-Sellers-Klimamodell** herausgesucht, [Bud69], [Sell69], denn dieses hat den Vorteil, dass wir mit ihm nicht nur deterministisches Chaos demonstrieren können, sondern auch weitere wichtige Facetten des Klimasystems kennenlernen können. Es berechnet die globale Temperaturänderung, die eintreten würde, wenn außer der Absorption von solarer Strahlung und der Emission von irdischer - **terrestrischer** - Strahlung keine weiteren Freiheitsgrade am Klimasystem mitwirken würden. Das Modell reagiert also auf ein **Netto- Strahlungsangebot**, d.h. auf eine Differenz zwischen der absorbierten solaren Einstrahlung und der emittierten terrestrischen Ausstrahlung:

'Temperaturänderung' = absorbierte Strahlung - emittierte Strahlung

Die rechte Seite dieser verbalen Gleichung, kurz 'Einstrahlung minus Ausstrahlung', nennt man auch **Strahlungsbilanz**. Quantenmechanisch gesehen besteht das Strahlungsfeld aus Photonen. Klassisch gesehen kann es aber auch als elektromagnetisches Wellenfeld angesehen werden. Die 'Übersetzung' erfolgt durch die Formel für die **Energie** eines einzelnen Photons, $E=h\nu$, wobei h das **Planck'sche Wirkungs-Quantum** ist, und ν die mit dem Wellenfeld korrespondierende **Frequenz**.

Da die Dimension der Wirkung 'Energie mal Zeit' ist, und da die Frequenz die Dimension einer *reziproken* Zeit hat, steht das Symbol E in der Formel $E=h\nu$ *tatsächlich* für Energie. Was absorbiert und emittiert wird, ist also **Strahlungsenergie**. Aber in *welchem Zeitraum* wollen wir den Energiezuwachs durch Absorption und den Energieverlust durch Emission bilanzieren? Sinnvoll wäre es doch, Energieänderungen *pro Zeit* zu betrachten! Strahlungsenergien pro Zeit nennt man auch **Energieflüsse**. Physikalisch gesehen handelt es sich bei einem Energiefluss (Energie mal Zeit) um eine **Leistung**, und deren Maßeinheit ist ein Watt, abgekürzt 'W'.

Das kennen wir schon von den Glühlampen her: Eine 100-Watt-Lampe z.B. *'leistet'* viermal so viel wie eine 25-Watt-Glühlampe. Was wir aber als Stromrechnung zu bezahlen haben, ist nicht die Leistung dieser Lampe, sondern die *über einen Zeitraum* erbrachte Leistung. Und da sind wir wieder bei der Energie = Leistung mal Zeit! Z.B. kostet die Energie 'eine Kilowattstunde' (Abkürzung kWh) etwa 20 Cent. Für dieses Geld kann man also eine 100 Watt - Lampe 10 Stunden lang eingeschaltet lassen. Eine andere Maßeinheit für die Leistung ist übrigens das PS, die Pferdestärke, und zwar entspricht ein PS etwa 750 Watt oder einem dreiviertel Kilowatt. Allerdings ist es heute nicht mehr erlaubt, die Leistung eines Automotors allein in PS anzugeben, höchstens *zusätzlich* zur Kilowatt-Angabe.

Obwohl Kilowattstunden eine häufige verwendete Energieeinheit ist, ist sie nicht die Grundeinheit des Internationale Einheitensystems, oft auch SI-System (von französisch *Système International*) genannt. Hier misst man die Energie in Joule, kurz J, wobei $1\text{J} = 1\text{Ws}$ (eine 'Wattsekunde') ist. Das ist die Energie, die die *sehr* schwache 1-Watt-Lampe in einer Sekunde verbraucht. (Übungsaufgabe: wieviel Ws - also wieviel J - hat eine kWh? 😊)

Sinnvoll wäre es auch, die absorbierte Strahlungsenergie nicht nur auf die Zeit zu beziehen, also die Energie nicht nur pro Sekunde zu betrachten, sondern die dabei entstandene **Strahlungsleistung** (den **Strahlungs-Energiefluss**) auch noch auf einen Quadratmeter zu beziehen, also auf die Größe der Fläche, durch welche die zu

absorbierende solare Strahlungsleistung ins Erdsystem eintritt bzw. aus welcher die emittierte terrestrische Strahlungsleistung nach außen entschwindet. Solche *flächenbezogenen* Strahlungsleistungen (Energieflüsse) nennt man **Strahlungs-Energieflussdichten**, und man misst sie natürlich in Watt pro Quadratmeter, abgekürzt in $W/m^2 \equiv Wm^{-2}$, was wiederum das gleiche ist wie $Js^{-1}m^{-2}$.

Langer Rede kurzer Sinn: In der obigen verbal ausgedrückten Klimagleichung sollte die Bilanzierung der absorbierten und emittierten, in W/m^2 gemessenen Energieflussdichten zum Ausdruck kommen. Also muss das Ergebnis auf der linken Seite der Gleichung ebenfalls eine Energieänderung pro Zeit und Fläche sein. Es ist natürlich plausibel, dass die Temperatur der Atmosphäre *zunimmt*, falls die absorbierte Energieflussdichte größer ist als die emittierte, aber eine *Temperaturänderung* hat ja *nicht* die entsprechende Maßeinheit W/m^2 , sondern man misst sie in $K/s \equiv Ks^{-1}$ (für Grad Kelvin pro Sekunde). Wegen dieser Unstimmigkeit habe ich in der obigen Verbalform der Gleichung die Temperaturänderung in 'Hochkommata' eingeschlossen.

Aus dieser Textformel beseitigen wir nun diese Unstimmigkeit, und wir verwandeln sie in eine physikalisch-mathematische Formel. Das mathematische Symbol dT/dt für eine zeitliche Temperatur-Änderung kennen wir schon (\rightarrow Seite 244). Sie hat ersichtlich die Dimension Ks^{-1} . Wir benötigen aber die Dimension Wm^{-2} . Was ist also zu tun? Ganz einfach, wir multiplizieren die T-Ableitung mit einem Faktor C, der die Dimension $Wsm^{-2}K^{-1}$ hat. Dann hat nämlich der Gesamtterm $C \cdot dT/dt$ auf der linken Seite der Gleichung die erforderliche Dimension, denn innerhalb von $Wsm^{-2}K^{-1} \cdot Ks^{-1}$ kürzen sich die Terme $K^{-1}K = 1/K \cdot K = 1$ sowie $ss^{-1} = s \cdot 1/s = 1$ heraus, und übrig bleibt genau die richtige Dimension Wm^{-2} . Die 'korrigierte' - und auf der linken Seite in die mathematische Symbolsprache übersetzte - Strahlungsbilanzgleichung lautet nun

$$C \, dT/dt = \text{absorbierte Strahlung} - \text{emittierte Strahlung}$$

Aus der Dimension $Wsm^{-2}K^{-1} = Jm^{-2}K^{-1}$ von C können wir auch die physikalische Bedeutung dieses Faktors erschließen: C gibt an, wieviel Energie, gemessen in Joule, pro m^2 Fläche und pro Grad Temperatur-Erhöhung ins Innere fließen muss. Mit anderen Worten, C gibt an, wieviel Energie, gemessen in Joule, pro m^2 Fläche nach innen fließen muss, um dort die Temperatur um 1K zu erhöhen. Dahinter verbirgt sich eine - im beschriebenen Sinne spezifische - **Wärmekapazität**: Die Atmosphäre reagiert auf einen bestimmten (von der rechten Seite der Gleichung vorgegebenen) Netto-Energiegewinn mit einer *umso kleineren* Temperaturerhöhung $dT/dt > 0$, je größer diese Wärmekapazität C ist! Entsprechend gilt für einen etwaigen Netto-

Energieverlust eine C-abhängige Temperaturabnahme, die natürlich *auch* bei einer größeren Wärmekapazität geringer ausfällt als bei einer kleineren Wärmekapazität.

Und wenn die Strahlungsbilanz ausgeglichen ist - und das *ist* sie, weil ein sogenanntes **Strahlungs-Gleichgewicht** stabil ist - kann es zu keiner temperaturbezogenen Klimaänderung kommen! Das ist eines der Argumente der AGW-Kritiker. Ob es stichhaltig ist oder nicht, können wir erst diskutieren, wenn wir auch die rechte Seite der obigen Gleichung in die mathematische Symbolsprache übersetzt haben. Kümmern wir uns also um die absorbierte solare Strahlung, manchmal auch kurz **Einstrahlung** genannt, und um die emittierte terrestrische Strahlung, kurz **Austrahlung** genannt.

Für die Modellierung der Einstrahlung könnte man im allereinfachsten Fall eine konstante Größe S verwenden, die sogenannte **Solarkonstante**. Sie benennt die **Energieflussdichte**, also die Strahlungsenergie pro s und pro m², also die Strahlungsleistung pro m² am oberen Rand der Atmosphäre. (Die vielen Wiederholungen sollen Sie möglichst wenig nerven, sondern eher das Gedächtnis für diese vielfältigen Begriffe unterstützen). Ihr Wert ist etwa $S = 1,37 \text{ kW/m}^2$. Das ist die Energie, die jeder Quadratmeter der Querschnittsfläche der Erde - der Sichtfläche der Erde von der Sonne aus gesehen - 'abbekommt'. Aber nur eine Hälfte der *kugelförmigen* Oberfläche der sich drehenden Erde kann zu einem Zeitpunkt der Sonne zugewandt sein, und nur im Mittelpunkt dieser kreisförmigen Querschnittsfläche steht die Erdoberfläche *senkrecht* zur einfallenden Strahlung, verschwindet also der Winkel zwischen der Flächennormalen und der Richtung der ankommenden Strahlung. Dieser Winkel (Symbol δ) heißt **Zenithdistanzwinkel**, und er wird natürlich umso größer, je weiter man sich dem Rand der kreisförmigen Sichtfläche nähert. Je größer aber δ wird, desto kleiner ist die Sichtfläche eines jeden absorbierenden Quadratmeters, und der dadurch gegebene Verringerungsfaktor μ der Energiegewinnung pro m² ist gegeben durch den Kosinus von δ : $\mu = \cos \delta$.

Wenn man das alles in Rechnung stellt, so steht im Mittel jedem m² der kugelförmigen Erdoberfläche im Mittel nur der vierte Teil der in der Solarkonstanten genannten *Energieflussdichte* zur Verfügung, also etwa $0,34 \text{ kW/m}^2 = 340 \text{ W/m}^2$. Diesen Wert nennt man auch **extraterrestrische solare Strahlungsflussdichte**. (oder Energieflussdichte), also die Strahlungsleistung pro m². Dieser Wert gilt also oberhalb des Oberrandes der Atmosphäre. (Ich ätte natürlich auch einfach darauf hinweisen könne, dass diese 'Viertel' von S daher resultiert, dass das Verhältnis der Querschnittsfläche zur Oberfläche einer Kugel stets $\frac{1}{4}$ beträgt. Aber dann hätten Sie weniger gelernt). Können wir nun die - so oder so hergeleitete - **extraterrestrische solare Strahlungsflussdichte**

$$S/4 = 340 \text{ W/m}^2$$

Als ersten Term der rechten Seite der Klimagleichung verwenden? Sind wir mit der Gleichung

$$C \, dT/dt = S/4 - \text{Ausstrahlung}$$

auf dem richtigen Weg? Vorschlag: Erledigen wir erst einmal die weniger komplizierte Übersetzung der **Ausstrahlung** in die Formelsprache und stellen wir uns dann diese Frage noch einmal. Die Ausstrahlung ist umso stärker, je höher die Temperatur T der emittierenden Teile des Erdsystems ist. Auch ein Zimmerofen heizt ja umso besser - emittiert ja umso mehr Strahlung - je höher seine Temperatur ist. Allerdings gibt es hier keinen linearen - sprich zu T proportionalen - Zusammenhang, sondern die Ausstrahlung ist höchst nichtlinear, sie ist proportional zu *vierten Potenz* der Temperatur! Der Proportionalitätsfaktor σ heißt **Stephan-Boltzmann Konstante**. Sie sollte nicht verwechselt werden mit der **Boltzmann Konstanten** k , welche in der Formel $S = k \ln W$ zur Berechnung der Entropie S aus einer bestimmten Wahrscheinlichkeit W auftaucht. (Wir werden *diese* Formel in Kapitel 3.7 besprechen; man kann sie aber auch auf Boltzmanns Grabstein in Wien nachlesen, dort allerdings ohne weitere physikalische Erläuterungen, insbesondere nicht über die hier zum Zuge kommende Wahrscheinlichkeit W). - Der neue Zwischenstand der formelmäßigen Übersetzung von 'Temperaturänderung' = Einstrahlung - Ausstrahlung lautet also

$$C \, dT/dt = S/4 - \sigma T^4$$

σ wird natürlich in den Einheiten $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ gemessen, damit σT^4 die erforderliche Einheit Wm^{-2} erhält. - Die denkbar offensichtlichste Antwort auf die obige Frage, ob die hier vorgenommenen Vereinfachungen sinnvoll sind oder nicht, lautet: Dieses Modell lässt tatsächlich keine Klimaänderungen zu! Eine Abweichung von $C \, dT/dt = 0$ könnte nämlich nur von einer **Störung** herrühren, (Konstanz der globalen Wärmekapazität C vorausgesetzt). *Wenn* eine solche Zufallsstörung auftritt, sorgt die der Gleichung innewohnende Dynamik dafür, dass die Störung sofort wieder beseitigt wird. Man sagt, das Strahlungsgleichgewicht $S/4 - \sigma T^4 = 0$ sei stabil.

Probieren wir es aus: Eine störungsbedingte *Erhöhung* von T bewirkt zunächst ein Überwiegen der Ausstrahlung $-\sigma T^4$ gegenüber der konstanten Einstrahlung von stets $S/4 = 340 \text{ W/m}^2$. Da dann die Temperatur T abnehmen wird, wie man ja an der Gleichung $C \, dT/dt = S/4 - \sigma T^4 < 0$ auch direkt erkennt, kann sich die erhöhte Temperatur nicht lange halten. Und wenn die Gleichgewichts-Temperatur wieder erreicht ist, ist auch wieder $C \, dT/dt = 0$.

Wenn wir unser Klimamodell überschätzen würden, seine Ergebnisse deuten würden als aus der Theorie abgeleitete 'Klimafakten', kämen wir in Widerspruch zur empirischen Erkenntnis, dass sich das Erdklima über Jahrmilliarden stets geändert hat. Aber wir sind uns ja dessen bewusst, dass ein Modell stets anders ist - eben einfacher - als die Wirklichkeit.

Auch das **Budyko-Sellers-Klimamodell**, auf das wir ja zusteuern wollen, enthält Vereinfachungen, aber nicht *so viele* wie die obige Gleichung. Die Verbesserung gegenüber der Modellgleichung $C dT/dt = S/4 - \sigma T^4$ besteht darin, dass der Energiegewinn $S/4$ nicht mehr konstant, sondern ebenfalls temperaturabhängig ist. Das erreichen wir in zwei Schritten:

Als wir von der Albedo gesprochen haben, (\rightarrow Seiten 262 und 266), war ja schon klar, dass ein Teil der angebotenen *Strahlungsflussdichte* von $S/4 = 340 \text{ Wm}^{-2}$ *nicht* absorbiert wird, sondern zurück ins All reflektiert wird. Davon sind etwa 100 Wm^{-2} pro m^2 betroffen, und zwar werden etwa 80 Wm^{-2} von den Obergrenzen der Wolken und etwa 20 Wm^{-2} vom Erdboden reflektiert. Statt $S/4 = 340 \text{ Wm}^{-2}$ steht also nur ein um den Faktor $100/340 \approx 0,3 \equiv \alpha$, der **Albedo**, reduzierter Anteil von $S/4$ zur Verfügung, d.h. im ersten Schritt verändern wir $C dT/dt = S/4 - \sigma T^4$ zur Modellgleichung

$$C dT/dt = (1-\alpha) S/4 - \sigma T^4 \quad \text{mit} \quad \alpha = 0,3$$

Aber auch hier ist der Energie-Einstrahlungsterm noch nicht temperaturabhängig. Wir hatten schon auf Seite 262 auf die **Eis-Albedo Rückkopplung** hingewiesen und dabei argumentiert, dass diese eine positive, eine verstärkende Rückkopplung darstellt, denn wenn es wärmer wird, schmelzen die reflektierenden Schee- und Eisflächen, die Albedo wird kleiner, es kann *mehr* Energie absorbiert statt reflektiert werden, und es wird *noch* wärmer. Dass α mit T kleiner wird, wurde im Budyko-Sellers-Modell mit zwei empirischen Konstanten m und n durch den Ansatz

$$\alpha = m - nT$$

parametrisiert, d.h. im zweiten Schritt wird die Modellgleichung verändert zu

$$C dT/dt = (1-m) S/4 + nT S/4 - \sigma T^4$$

Diese Gleichung kann formal (nicht inhaltlich) stark vereinfacht werden, wenn man die hier vorkommenden Kombinationen von Konstanten zusammenfasst zu neuen Konstanten:

$$dT/dt = a + bT - cT^4 \quad \text{mit} \quad a = (1-m) S/4C, \quad b = n S/4C, \quad c = \sigma/C$$

Wie schon diskutiert, war unser erster Modellansatz $C dT/dt = S/4 - \sigma T^4$ deswegen stabil, weil er nur eine negative (also stabilisierende) Rückkopplung enthielt, die alle

zufälligen Abweichungen (Störungen) der Temperatur gesetzmäßig verkleinerte und auslöschte. Ob die Klimatemperatur auch in dem nun hergeleiteten Modellansatz $dT/dt = a + bT - cT^4$ nach Budyko und Sellers stabil ist oder nicht, hängt davon ab, ob die stabilisierende Rückkopplung im Ausstrahlungsterm (letzter Term) oder die ent-stabilisierende Rückkopplung im Einstrahlungsterm (zweiter Term der rechten Seite) überwiegt. Näheres erfahren wir sogleich in den numerischen Lösungen dieser Modellgleichung. Zwar ist das das **Budyko-Sellers-Klimamodell** 'besser' ('etwas' realitätsnäher) als der 'erste' Ansatz, aber er bleibt noch immer extrem weit von der Realität entfernt. Z.B. werden wir auch in den numerischen Lösungen dieses Modells keinen Treibhauseffekt erkennen können. Manche AGW-Kritiker behaupten, es gäbe ihn gar nicht. Diese dürfen sich aber keinesfalls durch dieses Simulations-Ergebnis bestärkt fühlen.

Da dies eines der zentralen Themen dieses Buches ist, verschieben wir die numerisch Lösung der Budyko-Sellers-Klimagleichung noch ein wenig, um an ein paar Beispielen klar zu machen, wo die noch immer vorhandenen Vereinfachungen liegen, und insbesondere, wo der Treibhauseffekt dabei verloren gegangen ist. Unter dem Begriff **Erdsystem** verstehen wir immer das gemeinsame System Erdkörper *und* Atmosphäre (mit all ihren Bestandteilen wie Wolken, Staub, Feuchte, Strömungen usw.), sowie alle 'Sphären' im Übergangsbereich zwischen diesen beiden Hauptkomponenten, d.h. den Ozeanen (allgemeiner der **Hydrosphäre** sämtlicher Gewässer), den Schnee- und Eisflächen (der **Kryosphäre**), dem festen Erdoberflächenanteil (der **Geosphäre**), welche ihrerseits in Erdboden (**Pedosphäre**) und Gesteinshülle (**Lithosphäre**) unterteilt wird, sowie dem Einflussbereich von Pflanzen und Tieren (der **Biosphäre**) und Menschen (der **Anthroposphäre**, als Bestandteil der Biosphäre).

Wenn nun die nach Abzug der reflektierten Anteile verbleibenden 240 Wm^{-2} solarer Strahlungsenergie in das Erdsystem eingedrungen ist, ist sie noch kein Bestandteil irgendwelcher Komponenten des Erdsystems. Letztere müssen ja diese Energie erst absorbieren. Etwa 170 Wm^{-2} werden vom Erdboden und etwa 70 Wm^{-2} von der Atmosphäre absorbiert. (Diese Zahlen schwanken von Autor zu Autor, ich gebe hier gerundete Mittelwerte an): Hier muss aber auf eine **Inkonsistenz** in der Terminologie hingewiesen werden: Die Einheit Wm^{-2} steht in der elektromagnetischen Strahlungstheorie für die Größe

$$\text{Energieflussdichte} = \text{Energiefluss/Fläche} = (\text{Energie/Zeit})/\text{Fläche} = \text{Leistung/Fläche}$$

In der Hydro-Thermodynamik wird diese Größe jedoch *nicht* **Energieflussdichte** genannt, sondern **Energiefluss**. Einen Energiefluss/Fläche gibt es dort nicht, der Ener-

giefluss *ist* dort bereits auf die Fläche bezogen, und es macht offenbar keinen Sinn, eine Größe *zweimal* auf die Fläche zu beziehen.

Die solare Strahlungsenergie kann vom Erdsystem natürlich nur *absorbiert* werden, denn *emittiert* wird sie ja an der Sonnenoberfläche (bei etwa 5500 Grad K). Das ist bei der terrestrische Strahlung anders - es ist komplexer - denn sie wird nicht nur von den Komponenten des Erdsystems emittiert, (bei Durchschnittstemperaturen von etwa 255 Grad K), sondern sie wird von den irdischen Komponenten auch re-absorbiert, insbesondere von den Treibhausgasen, dann wieder emittiert, dann wieder absorbiert usw. Hier wird aber bei jedem Schritt *weniger* Energie reabsorbiert als zuvor emittiert wurde, denn ein Teil der jedes Mal emittierten Energie entweicht auch in den Weltraum. Dennoch *verzögert* eine solche 'stotternde' Emission (→ auch Seite 189) die *endgültige* Abkühlung bis zur vollständigen Kompensation der ursprünglichen solaren Erwärmung. Da schon *während* dieser 'Stotterphase' der Emission *weitere* Absorptionen der Solarstrahlung stattfinden, läuft die die Verzögerung der Emission auf eine Teil-Erwärmung hinaus, die **Treibhauseffekt** genannt wird - vielleicht in dieser Wortwahl nicht ganz glücklich.

Diese Temperaturerhöhung durch 'Stotteremission' ist oft auf 33 Grad abgeschätzt worden. Dazu betrachtet man ein 'Erdsystem' *ohne* Atmosphäre, also auch ohne ihre Komplexität, (also auch ohne Treibhauseffekt), und ermittelt rechnerisch die stabile Endtemperatur zu -18 Grad Celsius, (→ [www.hajolange.de/Kap.07 Strahlung und atmosphärische Energetik.pdf](http://www.hajolange.de/Kap.07%20Strahlung%20und%20atmosphärische%20Energetik.pdf), p. 390ff).

Eine verlässliche rechnerische Ermittlung der Temperatur unter *Berücksichtigung* der ganzen Treibhaus-Komplexität ist nicht möglich. Um das zu beweisen, schreibe ich gerade dieses Buch. Zu dieser Komplexität gehören ja nicht nur die soeben beschriebenen 'Stotteremissionen', sondern auch alle Wechselwirkungen dieser 'Stotteremissionen' mit dem gesamten **Komplex** - (ein sehr gutes Wort!) - *aller* sonstigen Freiheitsgrade der Atmosphäre. Aber man kann ja versuchen, die globale Durchschnittstemperatur zu *messen*, und so kommt man auf eine gegenwärtige globale 'Klimatemperatur' von +15 Grad Celsius. Damit hat man also die treibhausbedingte Temperaturerhöhung auf 33 Grad beziffert. Auch wenn eine solche Messung aus vielen Gründen ziemlich ungenau sein muss, kann man wohl kaum die gesamten 33 Grad als Messfehler deuten!

Dass auch das Budyko-Sellers Modell (kurz **BS-Modell**) diese Treibhaus-Komplexität nicht simuliert, bedarf nicht der obigen Allgemeinheit der Diskussion. Das folgt schon daraus, dass das BS-Modell gegenüber dem 'ersten Modellansatz' $CdT/dt = S/4 - \sigma T^4$ nur die Rolle der Einstrahlung modifiziert hat. Die 'Stotteremissionen' betreffen aber die im BS-Modell noch unveränderten Ausstrahlungen $-\sigma T^4$.

Statt von Ein- und Ausstrahlung spricht man in der Meteorologie und Klimatologie auch gern von kurz- und langwelliger Strahlung. Wie kommt man auf diese Namensgebung, die wir hier ja auch schon verwendet haben? Es ist wohl plausibel, dass solare Photonen, die bei der Temperatur 5500 Grad K emittiert werden, eine höhere Energie haben als die terrestrischen Photonen, die bei der Temperatur 255 Grad K emittiert werden. Die Photonenenergie ist durch die Formel $E=h\nu$ gegeben, so dass die Frequenz ν der Solarstrahlung sehr viel höher sein muss als die die Frequenz der terrestrischen Strahlung. Eine hohe Frequenz ν bedeutet aber eine kleine Wellenlänge λ , und umgekehrt. Die Umrechnungsformel lautet $\lambda = c/\nu$ oder $\nu = c/\lambda$ - nach Multiplikation mit ν/λ - und c ist die konstante Lichtgeschwindigkeit. Daher kann man die Photonenenergie $E=h\nu$ auch durch die Formel $E=hc/\lambda$ ausdrücken. Da auch das Wirkungsquantum h konstant ist, kann der hohen Energie bei der solaren Emission bei 5500K nur durch eine sehr kleine Wellenlänge λ Rechnung getragen werden, nach der Regel 'kleiner Nenner, großer Bruch'. (Eine genauere Begründung, allerdings für 'Nicht-Laien', gibt das Wien'sche Verschiebungsgesetz, was in [Lan02], Seite 367 resp. www.hajolange.de / Kap.07 Strahlung und atmosphärische Energetik.pdf nachgelesen werden kann).

Aus der bei der Strahlungsemission herrschenden Temperatur ergibt sich allerdings keine *punktgenaue* Wellenlänge der emittierten Photonen, sondern nur die Wellenlänge, bei der innerhalb eines ausgedehnten Wellenlängen-Bereiches - **Spektralbereiches** - die *meisten* Photonen ausgesendet werden. Diese Wellenlänge beträgt bei der Solarstrahlung etwa 0,6 Mikrometer (μ). Das liegt im sichtbaren (gelben) Lichtbereich, und daher *ist* ja die Sonne auch 'hellgelb'. Der terrestrische Strahlung sendet bei etwa 17μ die meisten Photonen aus. Das liegt im mittleren, nicht mehr sichtbaren Infrarot-Bereich. Rechts und links von diesen Höchstwerten werden immer weniger Photonen ausgesendet, und bei der Wellenlänge 4.5μ werden nur noch sehr wenige der längsten solaren und nur noch sehr wenige der kürzesten terrestrischen Photonen ausgesendet. M.a.W., es gibt einen nur sehr geringen Überlappungsbereich des solaren (kurzwelligen) mit dem terrestrischen (langwelligen) Spektral-Bereich, so dass die Bezeichnung '*kurzwellige Strahlung*' für die vom Erdsystem absorbierte solare Strahlung berechtigt ist, ebenso wie die Bezeichnung '*langwellige Strahlung*' für die vom Erdsystem emittierte *und* teilweise reabsorbierte terrestrische Strahlung.

Sie können sich die beiden **Kurven** der kurz- und langwelligen Strahlungsintensitäten qualitativ als ähnlich zu den beiden auf Seite 80 gezeichneten Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungen für zwei Temperaturen T_1 und T_2 vorstellen. Allerdings müssten diese dort weiter auseinander liegen: Sie dürften sich kaum überlappen. Die dortige ν -Achse würde dann zur μ -Achse, und der energetisch relevante Spektralbe-

reich der kurzwelligeren - also solaren - Strahlung läge zwischen $0,2 \mu$ (das ist fernes Ultraviolett) und den schon besprochenen $4,5 \mu$ (das liegt nahe dem mittleren Infrarot). Dieses kurzwellige Spektrum umfasst natürlich auch das *sichtbare* Lichtspektrum violett-blau-grün-gelb-orange-rot (mit Wellenlängen zwischen $0,38$ und $0,78 \mu$). Der langwellige - also terrestrische - Spektralbereich hingegen läge zwischen diesen $4,5 \mu$ und etwa 100μ (das ist fernes Infrarot). Da die Maxima dieser Kurven bei $0,6 \mu$ bzw. 17μ liegen, muss - in Analogie zur dortigen Hand-Skizze der Maxwell-Verteilungen - der mit μ einher gehende Anstieg zum jeweiligen Maximum steiler sein als der Abstieg *nach* dem jeweiligen Höhepunkt.

Die hier vorgenommene Erweiterung der Terminologie (statt solarer bzw. terrestrischer Strahlung darf man nun auch kurz- bzw. langwellige Strahlung sagen) nötigt mich, noch einmal an Kapitel 2.8 zu erinnern und an die dortige Aussage, dass die vom Erdsystem durch Absorption kurzwelliger Strahlung gewonnene Energie natürlich nur dann von der Emission langwelliger Strahlung kompensiert werden kann, wenn *mehr* Photonen emittiert werden als absorbiert, weil (nach der Regel 'großer Nenner, kleiner Bruch') jedes *einzelne* langwellige Photon (großes λ) weniger Energie $E=hc/\lambda$ hat als jedes einzelne kurzwellige Photon (kleines λ).

Wegen der Veranschaulichung der Entropie durch den niedrigen Ordnungszustand der *zahlreichen* Teilchen konnten wir den ausgeglichenen Energiehaushalt in Verbindung bringen mit einem Netto-Export von Entropie (\rightarrow Seite 186), ein Export, der die in der Atmosphäre ablaufenden irreversiblen (entropieerzeugenden) Prozesse erst ermöglicht! Außerdem konnten wir mit dem Bild der Photonen-Vervielfachung ('Photonenspaltung') eine Parallelität zwischen der Absorption hochenergetischer Photonen und der Aufnahme hochenergetischer Nahrung der Lebewesen aufzeigen, die ja ebenfalls (durch Enzyme) gespalten wird (\rightarrow Seite 192), was die Voraussetzung für alle Lebensvorgänge ist.

Das BS-Modell kann solche Details natürlich nicht simulieren. Dass es auch den auf 'Stotteremissionen' beruhenden Treibhauseffekt nicht simulieren kann, hatten wir auch schon erwähnt. Aber dennoch ist es gut geeignet, auf grundsätzliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede hinzuweisen zwischen den durch Strahlung ausgelösten Prozessen in atmosphärischer Luft und den *ganz anderen* Maßnahmen, die wir in Kapitel 2.7 ergriffen haben, um Prozesse in einem in der Luftpumpe eingeschlossenen Luftpäckchen auszulösen. Im letzteren Fall haben wir ebenfalls Temperatur-Änderungen bewirkt, einmal durch **Arbeit** $-pdV$, zum andern durch **Wärme** TdS , genauer gesagt, durch die Anwendung einer *materiellen* Wärmeleitung statt eines elektromagnetischen Strahlungs-Wärmestromes. Arbeit und Wärme bewirken den

Energieaustausch und Entropieaustausch zwischen dem eingesperrten Gas und der Umgebung, ganz ähnlich wie das die Strahlungsprozesse zwischen dem Erdsystem und dem Umgebungssystem 'Weltraum' tun: Arbeit *am* Systeminneren, Entropie-*Import* und Überwiegen von *Absorption* erhöhen die Energie und damit die Temperatur im jeweiligen 'Inneren' des Systems, Arbeit *des* Systeminneren, Entropie-*Export* und Überwiegen der *Emission* erniedrigen sie. Die durch Arbeit und Wärme mechanisch bzw. thermodynamisch - *aber eben nicht elektrodynamisch* - bewirkten Energieflüsse kann man ebenfalls auf die Zeit und auf die Durchflussfläche beziehen, und so ebenfalls in den Einheiten $\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2} = \text{Wm}^{-2}$ messen.

Nicht zuletzt können wir mithilfe des BS-Modells das Verfahren der numerischen Lösung einer Differenzialgleichung demonstrieren und einen Schritt in das **deterministische Chaos** wagen. Dazu schreiben wir die Differentialgleichung

$$dT/dt = a + bT - cT^4 \quad \text{mit den Konstanten } a, b \text{ und } c$$

entsprechend dem auf Seite 246 beschriebenen Verfahren zur Gewinnung numerischer Lösungen um, d.h. wir kehren vom Differentialquotient dT/dt zurück zum Differenzen-Quotienten: $\Delta T/\Delta t = a + bT - cT^4$ oder $\Delta T = \Delta t \cdot (a + bT - cT^4)$. Zuerst wird hier die Anfangsbedingung T_0 eingesetzt, so dass man eine erste Prognose gemäß

$$T_1 = T_0 + \Delta T = T_0 + \Delta t \cdot (a + bT_0 - cT_0^4).$$

berechnen kann. Danach dient jedes Ergebnis eines Prognoseschrittes als 'Anfangsbedingung' für den nächsten Prognoseschritt:

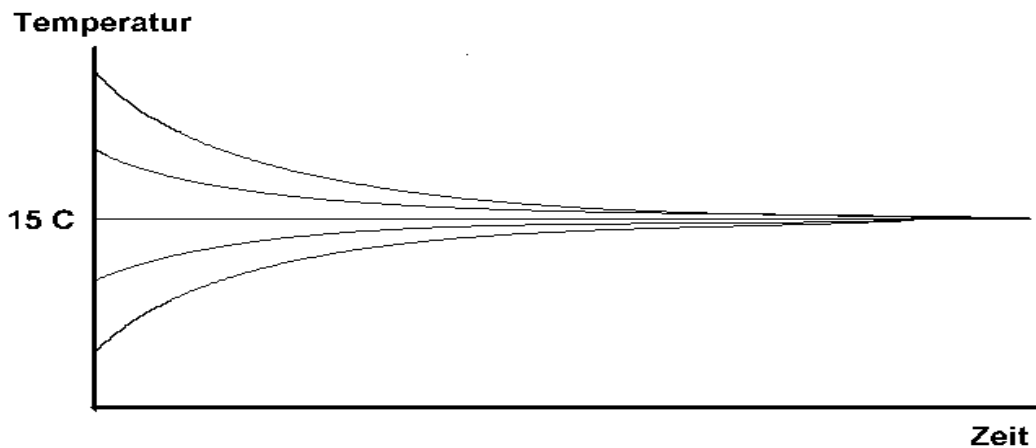
$$T_2 = T_1 + \Delta t \cdot (a + bT_1 - cT_1^4)$$

$$T_3 = T_2 + \Delta t \cdot (a + bT_2 - cT_2^4)$$

$$T_4 = T_3 + \Delta t \cdot (a + bT_3 - cT_3^4)$$

usw.

Man nennt dieses Verfahren **Iteration** oder auch **numerische Integration**. Darüber, wie groß der Zeitschritt Δt gewählt werden kann, gibt es Erfahrungswerte in der Literatur (Für Details → [Lan02], Seite 475 resp. [www.hajolange.de / Kap.09 Der Einfluss der Chaostheorie.pdf](http://www.hajolange.de/Kap.09%20Der%20Einfluss%20der%20Chaostheorie.pdf)). Man erhält so einen zeitlichen Temperaturverlauf in Zeitabständen der Größe Δt . Das nächste Bild - welches ich wie auch die folgenden Bilder zu Zeiten hergestellt hatte, als im Computer-Heimbereich die CGA-Graphik (640x200 Pixel) modern war - zeigt die Integrationsergebnisse für 5 verschiedene Anfangsbedingungen in einem Temperaturbereich von 15 C:



Machen wir uns noch einmal bewusst, dass diese Skizze die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$dT/dt = a + bT - cT^4 \quad \text{mit} \quad a = (1-m) S/4C, \quad b = n S/4C, \quad c = \sigma/C, \quad \alpha = m-nT$$

wiedergibt. Wir verstehen dann die Skizze augenblicklich: Wir sagten auf Seite 304, dass man die Klimatemperatur auf 15C einstuft. Also 'darf' die Differenzialgleichung keine Temperatur-Änderungen prognostizieren, wenn man diese 15C als Anfangsbedingung verwendet (mittlere, rein horizontale 'Kurve'). Die Konstanten a , b und c sind also so gewählt worden - d.h. ihre *Bausteine* m , n , S und C sind so gewählt worden - dass die beiden Terme $a+b \cdot 15$ (kurzweilig) und $c \cdot 15^4$ (langweilig) gleich groß sind, so dass sich die positive und die negative Rückkopplung bei $T=15C$ gerade kompensieren.

Übrigens würde der 'erste Modellansatz' $CdT/dt = S/4 - \sigma T^4$ mit der Anfangsbedingung $T=15C$ das gleiche Resultat ergeben. Hier ist ja der Einstrahlungsterm sowieso konstant, und der einzige T -abhängige Term ist der stabilisierende Rückkopplungsterm. Wählt man 16K oder noch höhere Temperaturen als Anfangsbedingung, dann wird die stabilisierende Rückkopplung $-\sigma T^4$ nur noch stärker. Wählt man 14C oder noch niedrigere Temperaturen, dann ist die negative - die Temperatur 15C restaurierende - Rückkopplung zwar schwächer, aber sie hätte ja keinen positiven Rückkopplungsterm als Konkurrenten. Man könnte also denken, dass das letzte Bild, welches *auch* zwei höhere und zwei niedrigere Anfangsbedingungen als 15C darstellt, die perfekte Darstellung des Lösungsverhaltens des 'ersten' Modellansatzes sei.

Die Skizze zeigt aber das Lösungsverhaltens des BS-Modells! Wie kann man diese Ähnlichkeit begründen? Immerhin enthält ja des BS-Modell als Neuerung eine Parametrisierung der langweiligen Strahlung, die nicht mehr das konstante $S/4$ verwendet, sondern eine Temperaturabhängigkeit im Sinne einer positiven, einer destabili-

sierenden Rückkopplung: Wenn die Anfangs-Temperatur 16K oder höher ist, dann wird ja im Mittel mehr Schnee und Eis schmelzen als bei der Temperatur 15C. Das Reflexionsvermögen der aufgetauten Flächen wird geringer und das Absorptionsvermögen nimmt zu. Also müsste es *noch* wärmer werden. Warum sieht man das nicht in der Skizze? Antwort: weil die Destabilisierung im hier verwendeten **Parametrisierungs-Ansatz** nur *linear* mit der Temperatur zunimmt, die Stabilisierung durch $-\sigma T^4$ (nach dem **Stephan-Boltzmann-Gesetz**) aber mit der 'Temperatur hoch vier' zunimmt, also wesentlich stärker ist als die parametrisierte Destabilisierung.

So langsam müssen wir uns fragen, wieso wir zur Erzeugung von deterministischem Chaos den 'ersten' Modellansatz zum BS-Modell erweitert haben. Es ändert sich ja fast nichts! Alles bleibt stabil! Auch von unterschiedlichen Anfangstemperaturen ausgehend, wird immer die gleiche Endtemperatur 15C angesteuert. Man nennt eine solche von allen Seiten her angesteuerte Größe einen **Attraktor**. Das ist ein sehr wichtiger Begriff, den wir insbesondere in Kapitel 5 dringend benötigen werden.

Die 'neue' destabilisierende Rückkopplung ist zwar da, sie ist aber relativ zur stabilisierende Rückkopplung offenbar zu schwach, um irgendetwas aufregendes zu bewirken. Aber vielleicht passiert ja doch noch etwas aufregendes, wenn wir uns auf einen Planeten begeben, der ebenfalls eine Atmosphäre hat, der aber der Sonne viel näher ist als die Erde. Oder wir bleiben auf der Erde, tauschen aber unsere Sonne gegen eine andere, viel stärkere Sonne aus. - Keine Angst, wir wollen das 'nicht wirklich' machen, sondern nur in unserem BS-Modell. Das geht etwas einfacher als in der Realität: Wir müssen ja nur die **Solarkonstante** erhöhen und dann schauen was passiert.

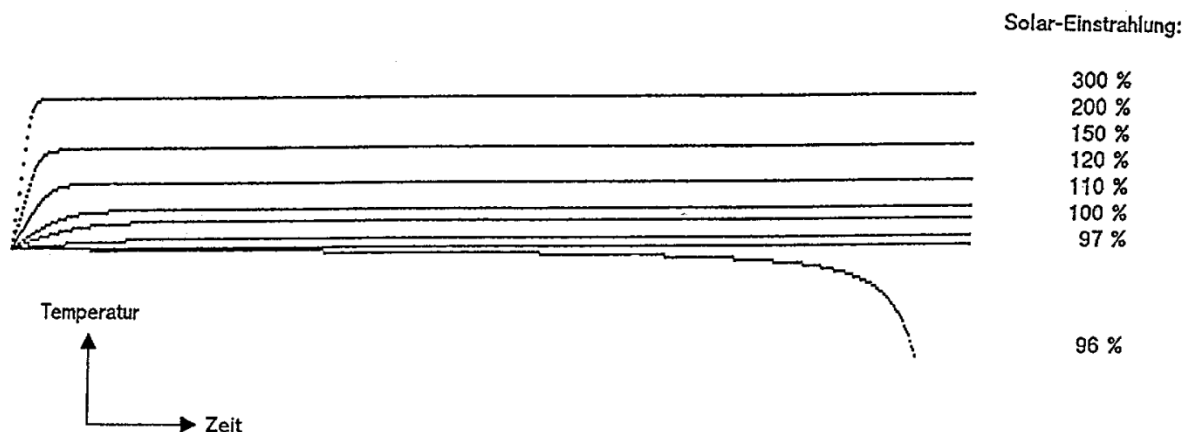
Die volle Realität hatten wir ja sowieso nicht durch die Parametrisierung der Albedo erreichen können. Wie schon oft betont, kann das nie voll klappen. Auch die Albedo α ist ja ein Freiheitsgrad, der mit unzähligen anderen Freiheitsgraden in Wechselwirkung steht, was man schwerlich getreu auf den hier verwendeten linearen Zusammenhang mit der Temperatur abbilden kann. Das ist natürlich keine Kritik an Budyko und Sellers, denn sie wollten von vornherein ein **konzeptionelles Modell** anbieten, d.h. ein Modell, mit dem man grundsätzliche Zusammenhänge besser verstehen lernen kann, indem man die Wirkungen gewisser Leitideen überprüft, aber kein Modell, mit dem man ernsthaft das Klima *vorhersagen* kann.

Z.B. stand die Parametrisierung unter der Leitidee, dass die Albedo α immer dann *fällt* bzw. *steigt*, wenn die Temperatur T *steigt* bzw. *fällt*, weil dann wegen abnehmender bzw. zunehmender Vereisung die Reflexionsflächen größer bzw. kleiner werden. (Nochmal lesen?) Das kann ja wohl nicht falsch sein! Aber man sollte auch nicht alles auf einmal machen, denn sonst versteht man manchmal 'gar nichts mehr'.

Und so haben wir bewusst unterschlagen, dass *nur* Schnee- und Eisflächen kleiner bzw. größer werden bei steigender bzw. fallender Temperatur. Für Wolkenobergrenzen gilt das nicht! Zwar reflektieren auch sie Solarstrahlung, aber diese Reflexionsflächen werden eher größer statt kleiner, wenn die Temperatur steigt, was eine stabilisierende Rückkopplung vermittelt.

Natürlich sind auch hier die Details wahnsinnig komplex, aber wenn man es aus irgendwelchen Gründen 'benötigte', etwa um vorzugeben, man könne aus der Vergangenheit die Gegenwart korrekt vorhersagen, (und 'folglich' auch die Zukunft aus der Gegenwart), dann könnte man nötigenfalls mühelos eine Parametrisierung finden, bei der *beide* Terme einer Strahlungsbilanzgleichung (also *auch* der Einstrahlungsteil) stabilisierend rückkoppeln.

Auch wir verfolgen nun eine Konzeption, (lt. Duden eine 'Leitidee'), mit einem **konzeptionellen Modell**, in dem die **Solarkonstante** - die solare Einstrahlung - nicht mehr der *irdischen* im *gegebenen Sonnenabstand* entspricht. Das nächste Bild zeigt, was dann passiert:



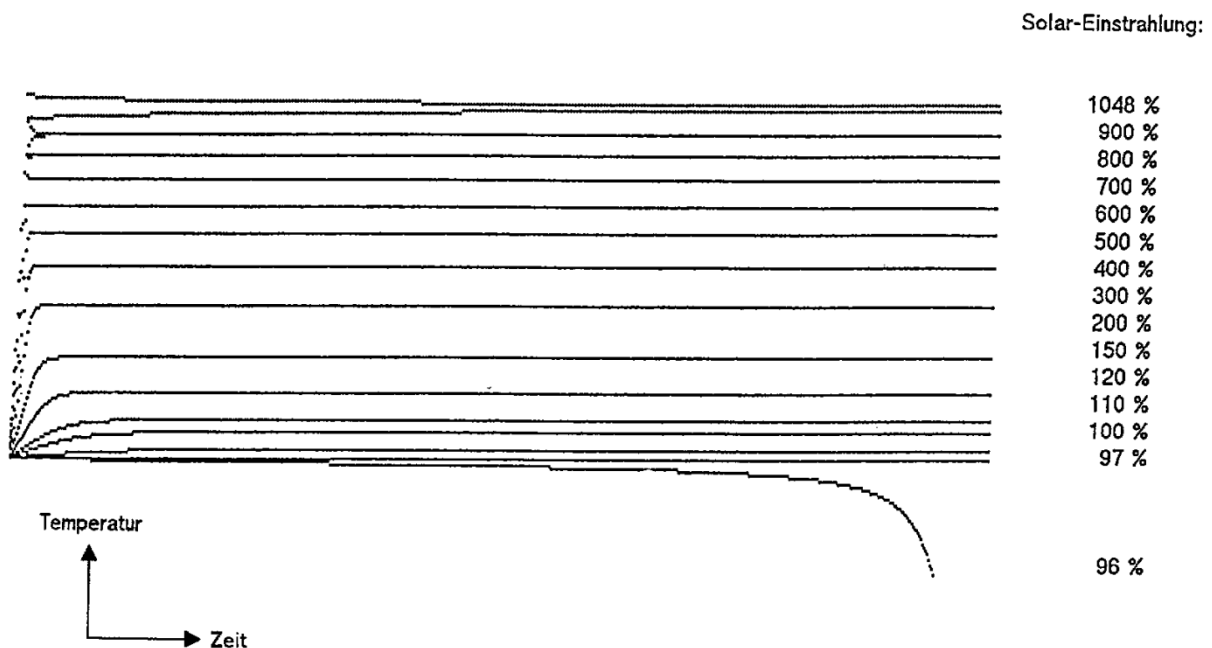
Wir sehen hier das Zeitverhalten der Temperatur in 8 verschiedenen Modell-Experimenten. Diese unterscheiden sich dadurch voneinander, dass die Solarkonstante die jeweils angegebenen unterschiedlichen Werte (in % der irdischen Solarkonstante) hat. Die Zeit- und Temperaturachsen sind nicht beschriftet, da uns nur der qualitative Temperaturverlauf interessieren soll. Alle Prognosen starten aber bei 0 C! Beim dritten Experiment von unten hat die Solarkonstante den normalen Wert von 100 %. Die Temperatur steigt hier von 0 C auf einen **Attraktorwert** von etwa 15 C an. Das könnte einer der unteren Temperaturkurven der *vorangegangenen* Skizze entsprechen.

Attraktoren erhält man auch bei erhöhten Solarkonstanten, wobei es uns natürlich nicht wundert, dass es wärmer wird, wenn die Sonne stärker scheint. Auch bei einer Abnahme der Einstrahlung von 3% ergibt sich noch eine Attraktor-Temperatur, die

natürlich niedriger liegt. Schon bei 4% Abnahme aber wird das Klima instabil, die Temperatur fällt ins Bodenlose, bzw. bis zu einer sogenannten "Blitz-Eiszeit", deren Temperatur dann wieder stationär wird, weil ja die Reflexion nicht noch weiter zunehmen kann, wenn der ganze Planet einmal zu einer **Scheeball-Erde** geworden ist. (Dieser zweite Attraktor der Temperatur ist hier nicht eingezeichnet).

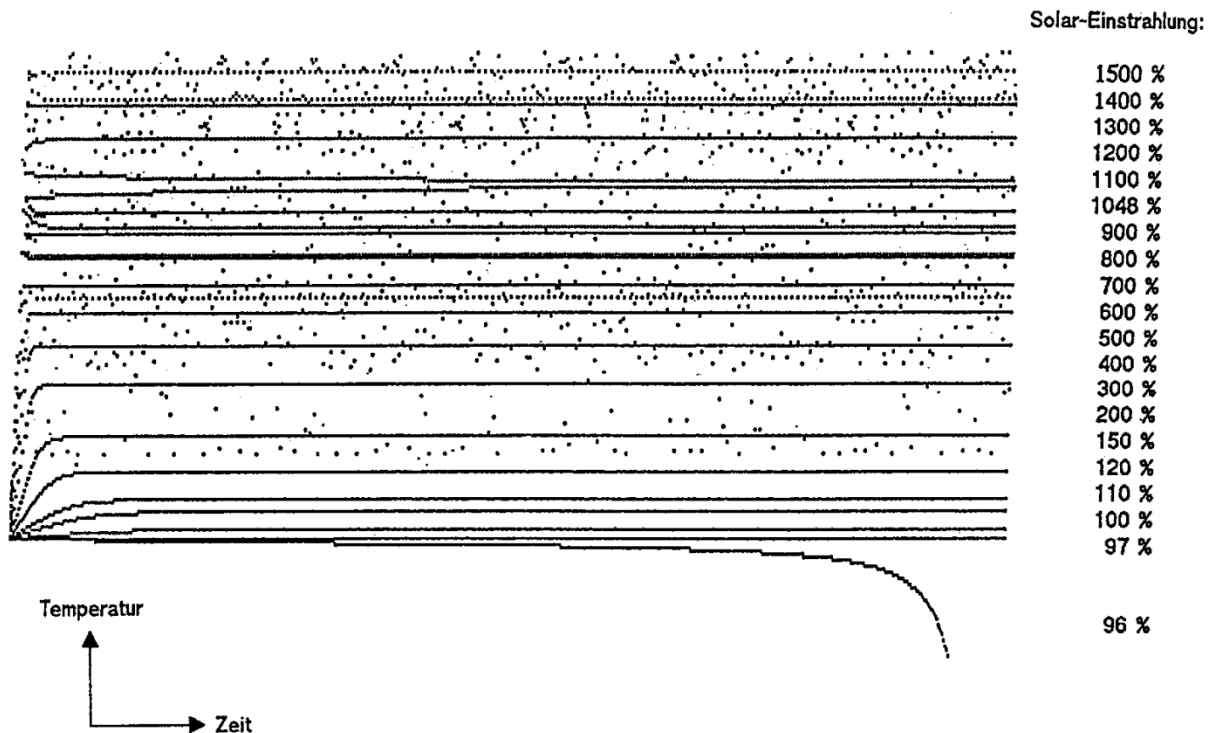
Wir stellen also fest, dass sich in einem weiten Temperaturbereich die stabilisierende Rückkopplung der Ausstrahlung durchsetzt, so dass man einen Attraktorwert der Temperatur erhält. Jedoch dürfen wir die Sonneneinstrahlung nicht *zu* niedrig wählen. Das lässt sich auch verstehen: Die stabilisierende Rückkopplung geht bei Temperaturerniedrigung mit der 4. Potenz von T zurück, die destabilisierende Rückkopplung aber nur linear! Irgendwann muss also die Destabilisierung dominieren!

Das nächste Bild zeigt das gleich noch einmal, setzt aber die Zunahme der Solar- konstanten bedenkenlos fort. Natürlich steigt dabei auch der jeweilige Attraktor weiter an:



Bei 900 % passiert etwas neues: Die Attraktor-Temperatur wird zwar auch erreicht, jedoch nicht wie bisher auf direktem Wege von 'unten' her. Sie 'schießt' sozusagen erst über ihr Ziel hinaus und erreicht den Attraktor erst nach einem Einpendeln von beiden Seiten her. Das Einpendeln dauert bei noch höheren Strahlungswerten immer länger, bis es schließlich, genauer gesagt bei 1048 %, unendlich lang dauert! Es ist zu einer sogenannten **Perioden-Verdopplung** gekommen: Der *Endzustand* ist jetzt gekennzeichnet durch *zwei* Temperaturen, die alternierend angenommen werden. Der Attraktor besteht jetzt aus einem **zweifachen Zyklus**.

Wie es weitergeht, sehen wir im nächsten Bild. Leider kommt nun doch die hier verwendete CGA-Graphik aus den frühem 90er Jahren an ihre Grenzen:



Auch die Zuordnung der Prozentangaben der Albedo zu den horizontalen Temperaturkurven wird schwieriger. Die laut vorigem Bild bei 1048% liegende Periodenverdopplung ist nun fälschlicherweise mit 1100% beschriftet. Natürlich liegt *dieser* Fehler, wie auch die 'leichte Schiefe' dieser Bilder, nicht an der CGA-Graphik, sondern am 'Künstler' selbst (also in meiner Person). Aber wahrscheinlich vermittelt Ihnen das Bild trotz allem, dass es zu weiteren Periodenverdopplungen kommt:

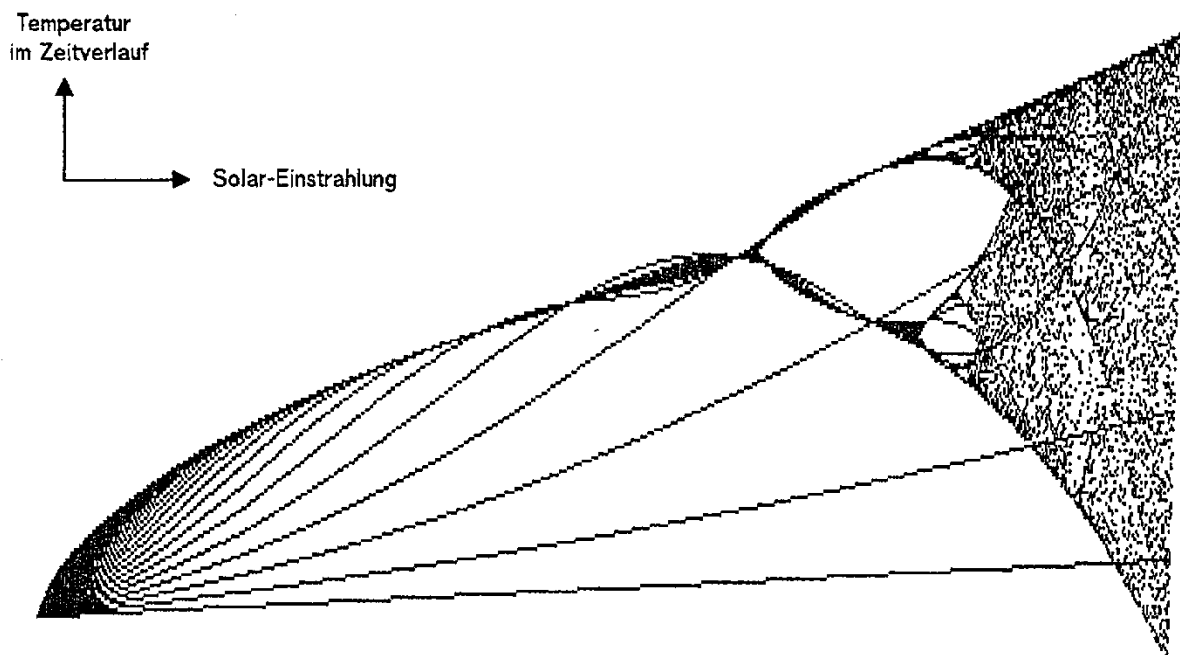
Der Attraktor ist bald ein Vierer-Zyklus! Es werden nun immer 4 jeweils gleiche Temperaturen alternierend angenommen. Daher geht auch die horizontale Drängung der Punkte auf ein Viertel zurück, so dass der Eindruck der *durchgezogenen* horizontalen Linien zugunsten von punktierten horizontalen Linien ersetzt wird. Von den vier punktierten Linien sind in der Graphik drei sehr deutlich zu sehen (zwei am oberen Bildrand, eine etwa in der Bildmitte). Die vierte wird von der 'durchgezogenen' 800% - Linie verdeckt.

Bei weiterer T-Erhöhung folgt ein Achter-Zyklus, d.h. jede Periode besteht in der Wiederholung eine immer gleiche Kette von 8 Zuständen. Danach folgen Sechzehner-Zyklus usw., die aber im Bild *alle* nicht mehr zu sehen sind, weil die entsprechenden Periodenverdopplungen 'immer schneller' erfolgen - nach *immer kleineren Zuwächsen* der Solarkonstanten: die Achterperiode entsteht bei etwa 1110% Solarstrahlung, die Sechzehnerperiode sogar schon bei etwa 1112 %, die Zweiunddreißi-

ger bei 1112,4 %, die Vierundsechziger bei 1112,48 % usw. Genauer gesagt: Das Parameterintervall, das zu einer bestimmten Periodenverdopplung führt, ist jedes Mal 4.669... Mal kleiner als das Parameterintervall, das zur vorigen Periodenverdopplung geführt hat. Dieser Quotient wird heute **Feigenbaumkonstante** genannt, [Fei78], obwohl Großmann und Thomae [GT77] den gleichen Sachverhalt bereits ein Jahr vorher veröffentlicht hatten.

Aus der Existenz dieser Konstanten folgt, dass es eine Obergrenze gibt, oberhalb derer *keine* Periodenverdopplungen mehr stattfinden. Das ist an der obigen Folge 1110 - 1112 - 1112,4 - 1112,48 Prozent ja fast schon direkt abzulesen: Selbst unendlich viele Additionen von immer kleineren Intervallen kommen in der Summe nicht über eine Grenze hinaus. Unendlich viele Summanden ergeben *nicht immer* eine unendlich große Summe! Buchstäblich 'alle' Periodenverdopplungen finden vor dieser Parameter-Obergrenze (hier einer Obergrenze der Solareinstrahlung) statt. Nichtsdestoweniger kann eine Gleichung aber größere Parameterwerte *enthalten*. Wir erhalten dann aperiodisches Zeitverhalten, in unserem Bild charakterisiert durch die vielen scheinbar regellos-chaotisch umherstreuenden Punkte. Die Gleichung zur Berechnung dieser Punkte ist aber nach wie vor deterministisch! Daher nennt man diesen Effekt **Deterministisches Chaos**: Nach *unendlich* vielen Verdoppelungen der periodisch zu wiederholenden Mitglieder eines Zyklus wird die 'Kettenlänge' eines Zyklus schon unendlich, er kann also nie wiederholt werden, man kommt nie zum 'nächsten' Zyklus, bei dem ja erst periodische Wiederholungen stattfänden.

Das nächste Bild sieht vollkommen anders aus als das vorige, und dennoch zeigt es genau den gleichen Sachverhalt wie die soeben besprochene Darstellung:



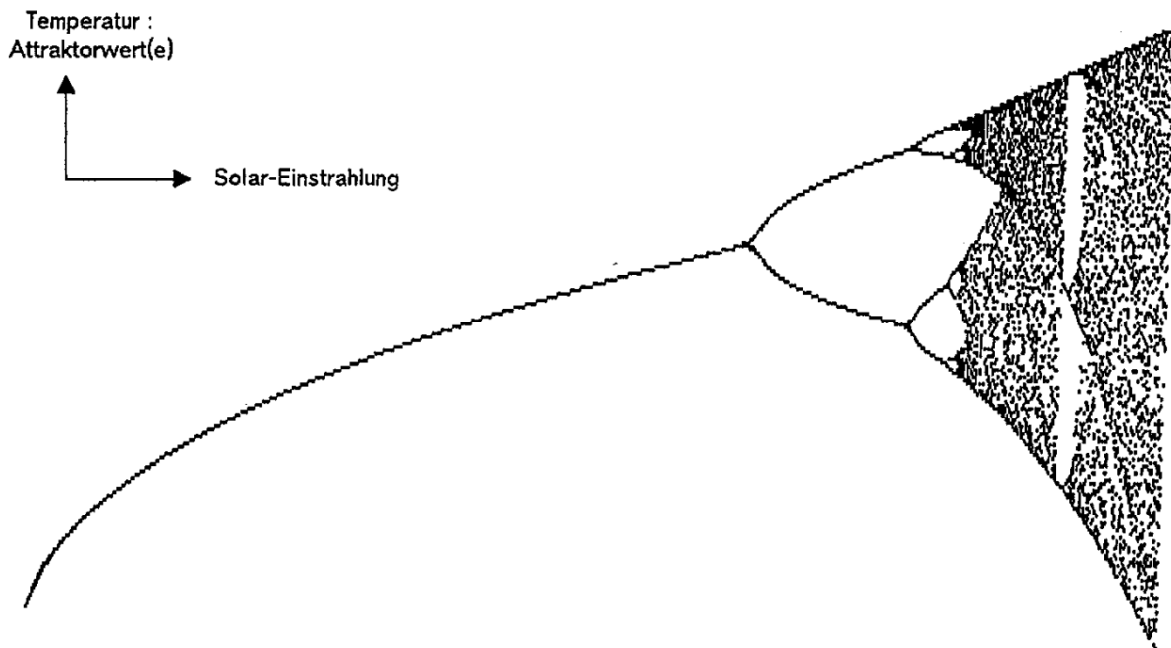
An der horizontalen Achse ist nun nicht mehr die Zeit aufgetragen, sondern die Solarstrahlung selbst (von 100% bis etwa 1500%). Der Zeitverlauf der Temperaturwerte bei jeder Solarstrahlung wird in vertikaler Richtung angetragen: *Jede senkrechte Säule von Punkten entspricht also einem selbstständigen Iterationsexperiment bei einer bestimmten Solareinstrahlung.* Sobald der der jeweilige Attraktor erreicht ist, werden die Iterations-Punkte aufeinander gezeichnet,

Ab Solarstrahlung 900% (also knapp 2/3 des Weges auf der Horizontalachse) ist das Einpendeln auf die Attraktor-Temperatur von beiden Seiten her wohl deutlicher zu sehen als in der vorigen Graphik. Danach erfolgt bei 1048% die überaus markante erste Periodenverdopplung. Die zweite Periodenverdopplung erfolgt 4.669... Mal so schnell, sie ist auch noch deutlich zu erkennen, die nächste allerdings kaum noch. Bei etwa 1200 % haben alle Periodenverdopplungen stattgefunden. Danach setzt deterministisches Chaos ein, dadurch zu erkennen, dass die errechneten Temperatur-Werte nun ganze Flächen ausfüllen. Dass aus deterministischen Gleichungen aperiodisches, also nicht extrapolierbares Verhalten entstehen kann, sollte prognostizierende Meteorologen und Klimatologen natürlich stark interessieren.

Natürlich kannte man auch schon vor Lorenz unperiodisches Verhalten. Allerdings wurde es dann immer mit instabilem Verhalten identifiziert. Paradebeispiel: Ein auf der Spitze stehender Bleistift vollführt auch keine periodische Bewegung, aber er ist instabil, er fällt einfach um. Dass aperiodisches Verhalten und Stabilität zugleich auftreten können, ist das eigentlich Neue an diesem neu entdeckten Verhalten: Obwohl der Zustandspunkt sich aperiodisch bewegt, bleibt er global stabil, er bleibt offenbar in einem Temperaturbereich gefangen. Der ganze Teilbereich ist ein Attraktor, und da man sich aperiodisches, jedoch stabiles Verhalten kaum vorstellen konnte, nannte man diesen Teilbereich einen **seltsamen Attraktor**.

Wenn man die Solarstrahlung allerdings *noch* mehr erhöht, geht diese globale Stabilität allerdings verloren, die vertikale Beschränkung der Punktwolke geht dann verloren, und dann existiert auch in unserem Modell kein seltsamer Attraktor mehr.

Periodenverdopplungen sind Beispiele für Lösungsverzweigungen, die auch **Bifurkationen** genannt werden. Ein **Bifurkationsdiagramm** erhält man aus diesem Bild, wenn man auf die Darstellung der Zustandspunkte vor dem Erreichen der Attraktor-Zustände verzichtet, wenn man also nur die Attraktoren in Abhängigkeit des Parameters aufträgt:



Das Einschwingen auf den Attraktor von beiden Seiten her, kurz vor den Periodenverdopplungen, kann hier natürlich nicht mehr gezeigt werden. Dafür treten aber die Bifurkationen, die Periodenverdopplungen, deutlicher hervor. Sogar die Achterperioden nach der dritten Lösungsverzweigung sind noch deutlich zu erkennen - zumindest sechs von ihnen.

Wenn Ihnen das ganze Bild 'irgendwie bekannt' vorkommt, dann liegt das daran, dass Feigenbaum [Fei78] bereits 1978 eine Iterationslösung der logistischen Gleichung betrachtet hat, was zu fast dem gleichen Bifurkationsdiagramm führt wie meine Lösung des BS-Modells etwa 14 Jahre später [Lan92]. Hinzu kommt, dass diese Diagramme an ein Bäumchen erinnern, welches vom Wind stark gebeugt wird. Das hat dem logistischen Bifurkationsdiagramm den populären Namen '*Feigenbaum*' beschert. In den späten 70er begann ein regelrechter Publikationsboom zur neuen Chaostheorie, und nicht selten war dieser 'Feigenbaum von Feigenbaum' auf Titelfeldern zu sehen.

Lorenz selbst hat, natürlich in einer späteren Arbeit als [Lor63] bei seiner Entdeckung des deterministische Chaos überhaupt - nach der Feigenbaum'schen Fortführung der Chaostheorie - die logistische Iterationsgleichung als "Metapher" für mögliches Wetter- und Klimaverhalten verwendet. Dem widerspricht unsere hier dargestellte *direkte* Verwendung eines einfachen Klimamodells natürlich keineswegs. Auch wir werden hier - im nächsten Unterkapitel - diesen Faden erneut aufnehmen.

Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

Wegen der Verwendung des Budyko - Sellar Modells kann man dieses Unterkapitel ebenso gut als Abschluss oder als Verlängerung von Kapitel 3.3 ansehen, wie auch als Einstieg in das vierte Hauptkapitel. Das Modell von stellt den Versuch dar, einige der der in Kap. 3.3 beschriebenen Freiheitsgrade in einem eindimensionalen Modell zu parametrisieren, in Erweiterung der logistischen Gleichung, die ja auch schon exponentielles Wachstum und Ressourcen-Knappheit eindimensional parametrisiert hatte.

Um die numerischen Lösungen für verschieden Anfangsbedingungen erhalten zu können, mussten wir die Differenzialgleichung in eine Differenzengleichung überführen. Das gilt für jedwedes Wetter- und Klimamodell, welches von einfachste Trivialmodellen abweicht. Dabei muss man eine zeitlich kontinuierliche Verfolgung der Systemzustände aufgeben, man muss sich mit endlichen statt mit infinitesimalen Zeitsprüngen begnügen, d.h. mit iterativen Lösungen (Lösungen als 'Schritt für Schritt'-Angaben über jeweilige zukünftigen Zustände des Systems) statt sogenannte 'geschlossene Lösungen' zu erhalten (d.h. Lösungsfunktion, die das *gesamte* Lösungsverhalten in einer einzigen Funktion der Zeit wiedergeben). Letztere heißen auch analytische Lösungen, aber - wie bereits angedeutet - erhält man diese nur in den allerseltensten Fällen.

Die logistische Gleichung *ist* so ein Fall. Man kann sie sowohl numerisch (iterativ) als auch geschlossen lösen, und im nächsten Unterkapitel 3.6 werden wir das auch tun. Das eröffnet natürlich eine Methode, die Güte einer Iterationslösung mit der exakten analytischen Lösung zu vergleichen. Das Ergebnis ist niederschmetternd: Die iterative Lösung und die analytische Lösung unterscheiden sich ganz fundamental! Die iterative logistischen Gleichung führt zum deterministische Chaos - aber allein die *Existenz* einer analytischen Lösung der logistischen Differenzialgleichung zeigt, dass die *kein* deterministisches Chaos kennt. Soviel als Vorschau auf das nächste Kapitel.

Im soeben beendeten Kapitel sind wir bei der Iteration des Budyko-Sellers Modells auf deterministisches Chaos gestoßen - aber erst mit solaren Einstrahlungswerten, die viel höher sind als die unserer Erde. Haben wir damit bewiesen, dass es im Geschehen *unserer* Atmosphäre *kein* deterministische Chaos gibt? Auf keinen Fall, das wäre nur dann so, wenn das Modell die wahre Atmosphäre beschreiben würde. Wieder einmal ging es nicht darum, Fakten zu schaffen, sondern 'nur' konzeptionelle Fortschritte zu machen. - Quantitative Details der Energiebilanz des Erdsystems wurden dazu nicht benötigt. Sie sind aber Gegenstand von Kapitel 4. Wer schon früher darüber informiert werden möchte, dem sein z.B. des allgemeinverständliche Buch 'Meteorologie' von H. Fortak [For82] empfohlen.

3.6 Logistische Gleichung - Iteration und chaosfreie analytische Lösung

3.7 Entropie S , Wahrscheinlichkeit W und die Gleichung $S = k \ln W$

4 Atmosphäre und Klima im Anschauungsraum

**5 Atmosphäre und Klima im Zustandsraum
(Phasenraum)**