3.4 Die Newton'sche Bewegungsgleichung als Gleichungssystem

Worum geht es?

Wir hatten in Kapitel 2.1 die Newtonsche Bewegungsgleichung verbal vorgestellt und dort behauptet, es würde sich erweisen, dass dies eine Differentialgleichung zweiter Ordnung sei. Inzwischen haben wir (im vorigen Kapitel) die allgemeine 'Aufklärung' über Differentialgleichungen erlebt - aber weder etwas von der Bewegungsgleichung noch von ***Differentialgleichungen zweiter Ordnung*** *gehört. Hier solle nun die entsprechenden Einordnungen erfolgen.*

Wir hatten auf den Seiten 43 und 77 festgestellt, dass sich hinter der Formulierung

Masse mal Beschleunigung = Kraft

der ***Newtonschen Bewegungsgleichung*** die Aussage verbirgt, dass Kraft eine Veränderung der mit der Masse multiplizierten Geschwindigkeit bewirkt:

Masse mal Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit = Kraft

Da aber die Geschwindigkeit *auch* eine Veränderung beschreibt, eine Veränderung des Ortes nämlich, landen wir bei der schrecklichen Formulierung 'Veränderung der Veränderung des Ortes'. Ich hatte auf Seite 43 auch angekündigt, dass sich dieses Sprach-Ungetüm vermeiden lässt, wenn man sich vor der Sprache 'Mathematik' nicht fürchtet. Und, liebe Leserin, lieber Leser, wahrscheinlich vermuten Sie bereits - zu Recht - dass die angekündigte Differentialgleichung zweiter Ordnung mit diesem Sprachungetüm zusammenhängt.

So wie wir auf Seite 244 die zeitliche Änderung der Temperatur T mit dem Differentialkoeffizienten $\mathrm{dT/dt}$ beschrieben haben, so beschreiben wir nun die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}$ mit dem Differentialkoeffizienten $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{dt}$. Mit den Symbolen m, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{F}$ für die Masse und die Vektoren der Beschleunigung und der Kraft (engl. Force) können wir die beiden obigen Text-Formeln so zusammenfassen:

$$\mathrm{m}\mathbf{b} = \mathrm{m}\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{dt} = \mathbf{F}$$ *oder, nach Division durch* m:

$$\mathbf{b} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{dt} = \mathbf{F}/\mathrm{m}$$

Mit dem Ableitungssymbol $\mathrm{d}(\ldots)/\mathrm{dt} \equiv (\ldots)'$ (Ableitung und Differentiation sind Synonyme) kann man Veränderungen *irgendwelcher* Freiheitsgrade (...) beschreiben. Die Geschwindigkeit der Temperaturänderung können wir durch $\mathrm{dT/dt}$ abkürzen - oder auch durch T'-und die Geschwindigkeit der $\mathbf{v}$-Änderung eben durch $d\mathbf{v}/dt$. Auch hier wäre die Symbolik $\mathbf{v}'$ möglich, wenn auch unüblich. Und wenn man 'nur' von ***Geschwindigkeit*** spricht - ohne dazu zu sagen, *was* sich verändert - dann ist immer die Veränderung des Ortes gemeint, also die 'Schnelligkeit' einer Bewegung im Raum, sei es die Geschwindigkeit eines Autos, eines Flugzeugs, eines Moleküls (oder eines abstrakten Zustandspunktes im Phasenraum, → Kapitel 5). Das, *was* sich dabei ändert, ist immer der ***Ortsvektor*** $\mathbf{r}$, der immer dorthin zeigt, wo sich das Auto, das Molekül usw. gerade befindet.

Mit anderen Worten, immer wenn sich der Ort verändert, muss man nicht dazusagen, *was* sich mit der bezeichneten Geschwindigkeit ändert. Man könnte sagen, der Differentialquotient $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ sei eine ***Geschwindigkeit im engeren Sinne*** oder eine ***spezielle Geschwindigkeit***. Aber schon die Beschleunigung $d\mathbf{v}/dt$ oder auch dT/dt sind ***Geschwindigkeiten***, bei denen man dazu sagen muss, *was sich* verändert - was im Falle der Änderung der Geschwindigkeit durch den Begriff Beschleunigung abgekürzt werden kann. Das sind alles Besonderheiten, die man durchaus ernst nehmen sollte. Noch einmal, zum Genießen: Beschleunigung (Symbol $\mathbf{b}$) ist eine Geschwindigkeit im weiteren Sinne, und die Veränderungsgröße, die dabei anzugeben ist, die Geschwindigkeit im engeren Sinne (Symbol $\mathbf{v}$):

$$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{b} \quad (\textit{\textbf{Beschleunigungsvektor}})$$
$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v} \quad (\textit{\textbf{Geschwindigkeitsvektor}})$$

Setzt man das $\mathbf{v}$ aus der unteren Gleichung in das $\mathbf{v}$ der oberen Gleichung ein, so erhält man

$$d\mathbf{v}/dt = d(d\mathbf{r}/dt)/dt \equiv d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{b}$$

Das Symbol $d^2\mathbf{r}/dt^2$ beschreibt eine 'Ableitung zweiter Ordnung' - oder einfach eine 'zweite Ableitung' des Ortsvektors. Das Identitätszeichen '≡' im obigen Zwischenschritt $d(d\mathbf{r}/dt)/dt \equiv d^2\mathbf{r}/dt^2$ soll also andeuten, dass $d^2\mathbf{r}/dt^2$ keine *Umformung* des etwas schwerfälligen symbolischen Ausdrucks $d(d\mathbf{r}/dt)/dt$ ist, sondern nur eine andere Schreibweise. Damit können wir unsere obige Gleichungskette $\mathbf{b} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}/m$ noch einmal verlängern:

$$\mathbf{b} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}/m$$

Und nun haben wir es: Differentialgleichungen, welche zweite Ableitungen enthalten, nennt man ***Differentialgleichungen zweiter Ordnung***. Und es ist auch die Newtonsche Bewegungsgleichung, sie zeigt sozusagen *drei Möglichkeiten* ihrer Formulierung, drei Aussagen darüber, was die Kraft $\mathbf{F}$ - hier die massenspezifische Kraft $\mathbf{F}/m$

- physikalisch bewirkt: eine Beschleunigung $\mathbf{b}$, eine Änderung erster Ordnung der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, eine Änderung zweiter Ordnung des Ortes $\mathbf{r}$.

Die beiden ersten Gleichheitszeichen der obigen Gleichungskette bedeuten also etwas anderes als das dritte Gleichheitszeichen: $\mathbf{b} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{dt}$ und $\mathbf{b} = \mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{dt}^2$ sind ***Definitionsgleichungen*** der Beschleunigung, während $\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{dt}^2 = \mathbf{F}/\mathrm{m}$ eine Fassung des Newtonschen Grundgesetzes ist, seines zweiten Axioms mit der revolutionären Veränderung der Physik des Aristoteles: Die spezifisch Kraft ist nicht etwa die Ursache für die Geschwindigkeit aller bewegten Objekte, dessen man sich 2000 Jahre lang 'sicher' war. Gestatten Sie mir bitte noch eine - vielleicht erhellende - Spielerei: In der neuen Symbolik könnte man die alte, falsifizierte, aber zwei Jahrtausende 'gültige' aristotelische Theorie sehr prägnant so formulieren, wie es auch Aristoteles selbst getan hätte, wenn es damals schon die Differentialrechnung gegeben hätte: $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{dt} = \mathbf{F}/\mathrm{m}$ (← falsifizierte aristotelische Formel!)

Aber leider ist unser (richtiges) Ergebnis $\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{dt}^2 = \mathbf{F}/\mathrm{m}$, in Komponenten also

$$\mathrm{d}^2\mathrm{x}_1/\mathrm{dt}^2 = \mathrm{b}_1\,(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$$

$$\mathrm{d}^2\mathrm{x}_2/\mathrm{dt}^2 = \mathrm{b}_2\,(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$$

$$\mathrm{d}^2\mathrm{x}_3/\mathrm{dt}^2 = \mathrm{b}_3\,(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$$

nicht geeignet, wenn wir die Absicht verfolgen, sie als Spezialisierung des allgemeinen Gleichungssystems von Seite 241 zu erkennen: dieses sieht nur Differentialgleichungen erster Ordnung vor, also Differentialgleichungen der Art $\mathrm{dx}_1/\mathrm{dt} = \ldots$ usw. Somit käme nur die Form $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{dt} = \mathbf{b}$ als Teil dieses Gleichungssystems in Frage. Dann aber hätten wir das Problem, dass wir keine Differentialgleichung für den Ortsvektor $\mathbf{r}$ hätten, der ganz sicher auch ein Freiheitsgrad ist, wie wir z.B. aus der Beschreibung der ortsveränderlichen Lagrange-Luftpäckchen in Kap. 2.2 wissen.

Was wir also brauchen, ist noch eine Differentialgleichung erster Ordnung für den Freiheitsgrad $\mathbf{r}$. *Aber die haben wir schon!* Wir haben nur den Wald vor lauter Bäumen nicht gesehen! Haben wir nicht gerade in den beiden 'Definitionsgleichungen'

$\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{dt} = \mathbf{b}$ (***Beschleunigungsvektor***),

$\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{dt} = \mathbf{v}$ (***Geschwindigkeitsvektor***)

die erste dadurch zu einer Differentialgleichung 'erhoben', dass wir im Beschleunigungsvektor $\mathbf{b}$ die von Newton gefundene Einflussfunktion auf $\mathbf{v}$ gesehen haben? Ebenso ist natürlich auch die zweite der beiden 'Definitionsgleichungen' eine Differentialgleichung, in der $\mathbf{v}$ die Einflussfunktion auf $\mathbf{r}$ ist. Es ist eine vektorielle

Einflussfunktion, die *nicht* erst von Newton gefunden werden musste, denn dass Geschwindigkeiten Ortsveränderungen bedingen, war schon immer evident.

Um endgültig zu klären, ob unser obiges vektorielles System $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{b}$, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ dem *allgemeinen Gleichungssystem* von Seite 241, hier also den 6 skalaren Gleichungen

$$
\begin{aligned}
dx_1/dt &= f_1\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\\
dx_2/dt &= f_2\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\\
dx_3/dt &= f_3\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\\
dx_4/dt &= f_4\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\\
dx_5/dt &= f_5\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\\
dx_6/dt &= f_6\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)
\end{aligned}
$$

voll entspricht, wandeln wir das *Newtonsche System* $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{b}$, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ erst einmal in skalare Form um, d.h. wir verwenden die Komponenten (b_x, b_y, b_z) des Vektors $\mathbf{b}$ und die Komponenten (v_x, v_y, v_z) des Vektors $\mathbf{v}$. Die 6 skalaren Gleichungen des *Newtonschen Systems* lauten dann:

$$
\begin{aligned}
dvy/dt &= by\\
dvx/dt &= bx\\
dvz/dt &= bz\\
drx/dt &= vx\\
dry/dt &= vy\\
drz/dt &= vz
\end{aligned}
$$

Unser Gleichungssystem hat 6 **skalare Freiheitsgrade.** Den 6 mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ *allgemein* bezeichneten Größen entsprechen im *Newtonschen System* die 6 konkreten Freiheitsgrade $v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z$. Es ist ein 6-dimensionales System, die 6 ***Einflussfunktionen*** $f_1,...,f_6$ sind durch $b_x, b_y, b_z, v_x, v_y, v_z$ gegeben. Es kommt also zum direkten Vergleich zwischen dem obigen *allgemeinen System* und dem in Komponenten geschriebenen *Newtonschen System*.

Wenn dieser Vergleich schwer zu verstehen ist, dann liegt das wohl daran, dass das Newtonsche System geradezu abwegig einfach ist, so *unerwartet* einfach, dass man *glaubt*, es nicht verstanden zu haben. Das gilt vor allem für die drei untersten Gleichungen. - Vielleicht vermissen Sie in den rechten Gleichungen aber auch die Funktionssymbole $f_1, f_2, ..., f_6$, wie sie im allgemeinen System auftreten. Dessen sechste Gleichung $dx_6/dt = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ macht 'Sinn', denn sie gibt ja wieder, dass der Freiheitsgrad x_6 im allgemeinsten Fall mit *allen* Freiheitsgraden vernetzt ist: alle Freiheitsgrade $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ *können* in der Argumentenliste der Funktion f_6 vorkommen. Aber der direkte Vergleich mit der entsprechenden Gleichung des Newtonschen Systems, $dr_z/dt = v_z$, ergibt wegen der Entsprechungen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \triangleq v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z$$

die Konkretisierung $f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_3$. Das ist zwar ein denkbar einfaches Beispiel für mögliche Einflussfunktionen f_6 - eine lineare Funktion, nur in x_3, und mit dem 'einfachsten' Proportionalitätsfaktor 1 - aber es *ist* ein Beispiel! Ebenso ergeben sich die Entsprechungen $f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_2$ und $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1$. In den drei unteren Gleichungen des Newtonschen Systems sind also die drei Einflussfunktionen f_4, f_5, f_6 nicht durch allgemeine Funktions-Symbole angegeben, sondern die Einflussfunktionen sind 'direkt' - man sagt auch explizit - benannt, und sie zeigen 'schon' eine Vernetzung, mit immerhin jeweils *einem* anderen Freiheitsgrad. Einschränkend müssen wir aber sagen, dass alle drei Funktionen f_4, f_5, f_6 *lineare Funktionen* sind, und wenn es sich mit den drei Einflussfunktionen f_1, f_2, f_3 ebenso verhalten sollte, wäre unsere Komplexitätsbedingung vernetzt *und* nichtlinear zu sein nicht erfüllt.

Hier jedoch zeigen uns die Gegenüberstellungen $f_1 = b_x$, $f_2 = b_y$, $f_3 = b_z$, dass die Beschleunigungen b_x, b_y, b_z gar nicht in der Liste $v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z$ der speziellen 'Newton-Freiheitsgrade' enthalten sind! Hier können also die rechten Seiten keine expliziten Angaben der Einflussfunktionen sein, sondern es sind hier eben doch allgemeine Funktionssymbole. Damit behaupten wir, dass sich die drei obersten Gleichungen des obigen 6-dimensionalen Gleichungssystems folgendermaßen entsprechen:

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \triangleq dv_x/dt = b_x(v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z)$$

$$dx_2/dt = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \triangleq dv_y/dt = b_y(v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z)$$

$$dx_1/dt = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \triangleq dv_z/dt = b_z(v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z)$$

So wie die drei linken allgemeinen Gleichungen nicht 'verraten', wie die drei Einflussfunktionen f_1, f_2, f_3 explizit aussehen, so sind auch die Einflussfunktionen b_x, b_y, b_z nicht explizit angegeben. Sie symbolisieren aber die drei Komponenten der spezifischen Kraftvektoren, wie man an dem Ausschnitt $\mathbf{b} = \mathbf{F}/m$ der Gleichungskette von Seite 288 sieht. Und dass die Kräfte einen Einfluss auf die Änderungen der Geschwindigkeiten haben, *ist* ja gerade die Aussage des ***zweiten Newtonschen Axioms***!

Mit anderen Worten, die Symbole b_x, b_y, b_z sind keine Newton'schen Freiheitsgrade - diese sind ja durch $v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z$ gegeben - sondern sie entsprechen den allgemeinen Funktionssymbolen f_1, f_2, f_3 im allgemeinen System von Seite 290. Hinter den Funktionssymbolen f_4, f_5, f_6 verbargen sich dermaßen einfache Funktionen, dass ihr *explizites* Hinschreiben einfach durch das Hinschreiben des einzigen linearen Argumentes 'erledigt' war: $f_4 = v_x$, $f_5 = v_y$, $f_6 = v_z$! Das ist bei den Einflussfunktionen f_1, f_2, f_3 auf die Freiheitsgrade v_x, v_y, v_z nicht ganz so einfach. Zwar stimmen auch hier die entsprechenden Gleichungen $f_4 = b_x$, $f_5 = b_y$, $f_6 = b_z$ formal ebenfalls, aber sie machen keine unverschlüsselte, keine explizite Aussage mehr über die Art der jeweiligen Beeinflussungen von v_x, v_y bzw. v_z durch jeweils alle Freiheitsgrade. Es ist hier 'nur' eine Umbenennung der Einflussfunktion erfolgt - entsprechend den schon früher angedeuteten beiden Möglichkeiten $T = f(t)$ oder $T = T(t)$, die Temperatur als Funktion der Zeit zu formulieren. Die Freiheitsgrade sind mit $f_4 = b_x$ usw. noch gar nicht genannt, sie müssen erst in Klammern (...) hinter f_4 usw. *oder* hinter b_x usw. aufgeführt werden.

Aber welche Freiheitsgrade sind das? *Dass* die spezifischen Kräfte b_x, b_y, b_z die Geschwindigkeiten verändern, haben wir ja wohl verstanden, das war ja gerade die Kernaussage von Newton, sein ***zweites Axiom***, die Korrektur von Aristoteles. Aber *wie* das passiert, welche Freiheitsgrade hier mitmischen, und *wie* sie mitmischen, haben wir bisher kaum erörtert. Wir wissen kaum mehr, als dass die Konkretisierungen der Funktionen f_1, f_2, f_3 vernetzt und nichtlinear sein sollten, wo es die Funktionen f_4, f_5, f_6 schon nicht sind. Andernfalls betrachten wir kein komplexes System.

Aber welches System betrachten wir *überhaupt*? Was ist das für ein physikalisches System, für das $dv_x/dt = b_x$ bis $dr_z/dt = v_z$ die 6 Modellgleichungen werden sollen? Liebe Leserin, lieber Leser, sie werden enttäuscht sein: Es ist nur ein einziger Massenpunkt! Oder, um ein wenig konkreter zu sein, es ist die reine mechanische Bewegung eines einzigen der in Kapitel 2.1 vorgestellten 10^{44} Luftmoleküle, die die Atmosphäre hat. Ob dieses eine Molekül solare Energie absorbieren kann oder nicht, ob es zum Feuchteanteil oder zu einem anderen Aerosol-Anteil der Luft gehört, ob es zu einem festen, flüssigen oder dampfförmigen Luftanteil gehört, ob es chemische Verbindungen mit anderen Molekülen eingehen kann oder nicht, all das und vieles mehr kann mit diesem 6-dimensionalen Gleichungssystem noch nicht berechnet werden. Mit anderen Worten, wenn es uns gelingen sollte, die Vorhersagbarkeit der mechanischen Bewegung eines Luftmoleküls zu bestätigen, dann ist es noch ein gleichsam unendlich weiter Weg bis zu einer potentiellen Bestätigung der Vorhersagbarkeit des Klimas. Nun gut, wir sind also bescheiden geworden und wollen vorerst nur die konkrete - explizite - Form der drei Einflussfunktionen b_x, b_x und b_z wissen.

Wenn man die Natur experimentell befragt, dann findet man, dass die Kraft oft nur vom Ort abhängt. Ein fallender Stein z.B. wird von der Gravitationskraft der Erde angezogen, und diese Anziehungskraft hängt (wenn auch in Erdnähe nur schwach, aber durchaus nichtlinear) vom Abstand des Steines von der Erde ab, *also vom vektoriell anzugebenen Ort* $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$. Man muss alle drei Komponenten in die Argumentenlisten der Funktionen f_1, f_2, f_3 (die wir hier ja auch b_x, b_y, b_z nennen) eintragen, weil es ungünstig wäre, eine Koordinatenrichtung ausgerechnet parallel zur Linie Stein-Erdmittelpunkt zu legen. Betrachtet man ein elektrisch geladenes atmosphärisches Teilchen, etwa ein bei Gewittern entstehendes Ion in einem Magnetfeld, dann hängt die Kraft (auch) von der Geschwindigkeit ab. Also können wir die drei obersten Gleichungen des Newtonschen Systems noch einmal, nun aber ausführlicher, wiederholen:

$$dv_x/dt = b_x(v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z)$$
$$dv_y/dt = b_y(v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z)$$
$$dv_z/dt = b_z(v_x, v_y, v_z, r_x, r_y, r_z)$$

Somit ist das gesamte Newtonsche System als Spezialfall eines allgemeinen 6-dimensionalen Gleichungssystems identifiziert. Aber schon bei der Behandlung von zwei bzw. drei Massenpunkten ist das System natürlich 12- bzw. 18-dimensional, usw. Bleiben wir noch einen Augenblick beim 6-dimensionalen Gleichungssystem für *ein* Molekül. Auf Seite 131 hatten wir gesagt, dass ***ideales Gas*** im Wesentlichen dadurch gekennzeichnet ist, dass auf seine Moleküle nur dann Kräfte wirken, wenn sie untereinander oder mit Wänden kollidieren. Was dann passiert, bekommt man auch ohne Bewegungsgleichung heraus, das folgt bereits durch rechnerische Anwendung der Erhaltungssätze von Energie und Impuls. Da man Klimavorhersagen niemals durch Vorhersagen aller molekularen Bewegungen durchführt, können wir uns die Details dieser Stoßgesetze hier ersparen.

Um noch einmal auf die Grenze zwischen Vorhersagbarkeit und Nicht-Vorhersagbarkeit zu sprechen zu kommen, hier nur ein Hinweis: Im sogenannten ***realen Gas*** kommen zu diesen Stoßkräften noch Kräfte zwischen den Molekülen hinzu, wozu neben den schon erwähnten Kräften auf ionisierte Moleküle noch die Schwerkräfte und vor allem die sogenannten Van-der-Waals-Kräfte kommen. Das zeigt schon, dass die drei Gleichungen $dv_x/dt = \ldots$, $dv_y/dt = \ldots$, $dv_z/dt = \ldots$ extrem komplex werden. Die Listen der Argumente enthalten dann auch noch die Geschwindigkeiten und Orte *aller weiteren Moleküle eines viele-Teilchen Systems*. Damit liegt die Nicht-Vorhersagbarkeit 'realer' Klimamodelle, deren Fluid u.a. nicht mehr das ideale Gas ist - eigentlich erst Thema in Kapitel 4 - bereits hier auf der Hand.

Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

In diesem Kapitel haben wir die vektorielle Newtonsche Grundgleichung, geschrieben als Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Ortsänderung, in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für die Orts- *und* die Geschwindigkeitsänderung umgeschrieben, und sie so mit der Struktur des in Kapitel 3.2 hergeleiteten allgemeinen n-dimensionalen Gleichungssystems versöhnt, welches Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht kennt. In Komponentenform wurden so aus drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung sechs Differentialgleichungen erster Ordnung. Wenn wir an Lagrange'sche Luftpäckchen denken, so geht das rein mechanische Newtonsche System allerdings in ein hydro-thermodynamisches Gleichungssystem über. Dabei treten zwei gravierende Änderungen ein:

1) Aus den Freiheitsgraden werden ***Feld-Freiheitsgrade***, von denen jeder einzelne ebenso viele der *bisher* besprochenen ***Einzel-Freiheitsgrade*** umfasst, wie ein Gittermodell Gitterpunkte aufweist bzw. wie ein Spektralmodell Wellenfunktionen aufsummiert (→ Seite 65).

2) Zu den je drei Komponenten der Orte und der Geschwindigkeiten - nun der hydrodynamischen Luftpäckchen statt der einzelnen Moleküle - kommen noch thermodynamische Freiheitsgrade hinzu (→ Kapitel 2.2).

Dieses hydro-thermodynamische Gleichungssystem werden wir im weiteren Verlauf noch 'etwas' näher in einem für Laien zumutbaren Ausmaß beschreiben. Bisher haben wir ja neben der Newtonschen mechanischen Gleichung praktisch nur über thermodynamische Gleichungen gesprochen. Bei der 'Synthese' zum hydro-thermodynamischen Gleichungssystem - unter Beachtung der obigen Punkte 1) und 2) - wird es sich zeigen, das z.B. die Kompression des Gases, die in Kap. 2.6 noch von Experimentatoren vorgenommen wurden, nun die (konvergente) Strömung selbst 'erledigt'. Ein hydro-thermodynamischer Modell-Prototyp wird die Ideal-Atmosphäre sein, welches - wie der Namen vermuten lässt - aus idealem Gas besteht. Und hier habe ich, sozusagen als Unterstützung für eine 'Durchhalteparole' für Laien, noch eine gute Nachricht im Ärmel:

Das Modell der Ideal-Atmosphäre kennt keine irreversiblen Prozesse, (eine drastische Approximation) und nur quasistatische Prozesse (eine 'fast erlaubte' Approximation). Das bedeutet, dass die 'knifflige' Entropie immer konstant ist und daher im Gleichungssystem der Ideal-Atmosphäre gar nicht auftritt! Dieses Modell hat sogar einen gewissen prognostischen Wert, wenn auch nur für die Größenskala der langen planetaren atmosphärischen Wellen und auch nur für eine Zeitskala von ein bis 2 Tagen.