3.3 Einfache und komplexe Modellsysteme - Prinzipien, Beispiele

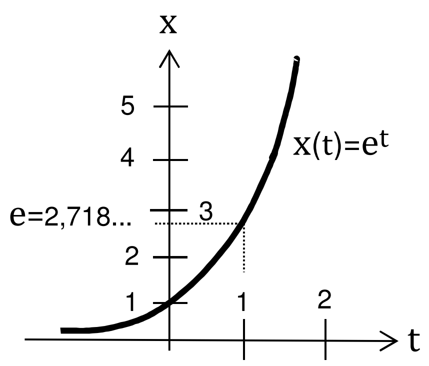
Worum geht es?

> In diesem Kapitel befassen wir uns mit Differentialgleichungen *nicht nur* aus atmosphärischen Bereichen. Der Sinn dabei ist es, durch viele einfache Beispiele ein Verständnis dafür zu entwickeln, wie 'überhaupt' einige Freiheitsgrade andere Freiheitsgrade beeinflussen können, und wie es dabei 'überhaupt' zu Vernetzungen kommt. Dabei könnte sich ein Verständnis dafür entwickeln, wie schwierig es werden dürfte, solche ***einfachen Modelle*** in Richtung höherer Komplexitätsgrade auszubauen. Solche Modelle werden ja in der Klimaforschung verwendet, wenn auch fast nie in *öffentlichen* Diskussionen über das Klima. *Wenn* sie erwähnt werden, charakterisier man sie oft als ***'realitätsnahe' Modelle***. Dass auch das eine höchst optimistische Einschätzung ist, kann in diesem Kapitel vorerst nur angedeutet werden.

Wir beginnen dieses Kapitel mit eindimensionalen Modellgleichungen. Sie haben nur einen einzigen Freiheitsgrad. Diesen nennen wir wieder x. Eine Modellierung mittels der logistischen Gleichung $dx/dt = ax\text{-}ax^2$ (→ Seite 48) ist ein Beispiel dafür, aber auch die einfachere Gleichung $dx/dt = ax$ oder sogar $dx/dt = x$. Sie haben alle die Form $dx/dt = f(x)$, und allen fehlt das Merkmal 'Vernetzung zwischen *verschiedenen* Freiheitsgraden', also das Merkmal, welches neben 'Nichtlinearität' zur Definition der Komplexität (→ Seite 48) gehört. Ob zusätzlich die Bedingung 'Nichtlinearität' fehlt, hängt davon ab, ob $f(x)$ eine nichtlineare Funktion ist oder nicht. Offenbar ist hier nur die logistische Einflussfunktion $f(x) = ax - ax^2$ nichtlinear, die beiden anderen sind linear: Bei $f(x) = ax$ wurde der nichtlinearen Teil der logistischen Gleichung einfach weggelassen, und bei $f(x) = x$ wurde zudem der Parameter a gleich 1 gesetzt. In der entsprechenden Differentialgleichung $dx/dt=x$ ist also die Einflussfunkton identisch mit der Lösungsfunktion.

Wenn man über eine Gleichung spricht, möchte man natürlich auch die *Lösung* der Gleichung wissen. Wie schon gesagt, werden algebraische Gleichungen von Zahlen gelöst, (z.B. die Gleichung $x+7=10$ von der Zahl $x=3$), und Differentialgleichungen werden von Funktionen gelöst. Also muss auch die Lösung von $dx/dt = x$ eine Funktion $x=f(t)$ sein, eine Funktion der Zeit. *Diese* Differentialgleichung verlangt einfach nur, dass sich die Funktion $x(t)$ genauso mit der Zeit verändert wie auch ihre Ableitung dx/dt. Wenn Sie noch Schul-Erinnerungen an die Differentialrechnung haben, können Sie sich wahrscheinlich daran erinnern, dass die Exponentialfunktion $x(t) = e^t$ eine solche Funktion ist. ($e = 2{,}718\ldots$ ist die sogenannte Eulersche Zahl). Wenn keine

Schul-Erinnerungen (mehr) bestehen, könnte Ihnen auch eine Hand-Skizze des Funktionsverlaufes, des sogenannten ***Graphen*** von $x(t) = e^t$ in der (x,t)-Ebene plausibel machen, dass e^t die Lösung der Differentialgleichung $dx/dt=x$ ist:



Offenbar hat die Funktion $x(t)=e^t$ an der Stelle $t=0$ den Wert $x=1$. Die dünne punktierte Linie bestätigt, dass $x(1) = e^1 = e = 2{,}718...$ ist. $x(2) = e^2$ hat den Wert 7.387..., was sich nach gedanklicher Extrapolation der x-Achse und des Kurvenverlaufs nach 'oben' im Rahmen der Genauigkeit einer Handskizze ebenfalls bestätigt. Je größer t auf der Horizontalachse ist, desto größer sind offensichtlich die zu jeweils *gleichen* Zeitintervallen Δt gehörenden Vergrößerungen Δx, desto größer sind also die ***Differenzenquotienten*** $\Delta x/\Delta t$ und auch die Differentialquotienten dx/dt, die Grenzfälle 'sehr' kleiner Intervalle, die man man auch ***Ableitungen*** der Funktion $x(t)$ nennt (→ auch Seite 244). Sie kennzeichnet nichts anderes als die ***Steigungen*** des Graphen. Aber auch x *selbst* wird mit t immer größer, und daher veranschaulicht die Skizze, dass bei der Funktion $x(t) = e^t$ tatsächlich bei jedem t die Steigung von x und der Wert von x gleich sind, und genau das fordert ja gerade die Differentialgleichung $dx/dt = x$! Mit anderen Worten, $x(t) = e^t$ *ist* eine *Lösung* dieser Differentialgleichung. Eine etwas allgemeinere Aussage als

$x(t)=e^t$ *löst die Differentialgleichung* $dx/dt = x$ *ist die Aussage*

$x(t)=e^{at}$ *löst die Differentialgleichung* $dx/dt = ax \quad (a=\text{const})$

Ist z.B. der ***Parameter*** a der Einflussfunktion gleich 2, so ist die Steigung zu jeder Zeit t doppelt so stark wie in der Skizze gezeichnet. Wenn $a<1$ ist, wächst die Steigung der Lösungsfunktion relativ zur skizzierten Lösungsfunktion *langsamer* an. Das ist ja eine *direkte* Aussage der Differentialgleichung $dx/dt = ax$!

Das alles erfordert jedoch, auf eine Frage einzugehen, die wir bisher vermieden haben: Wieso gibt es überhaupt so eine Funktion e^t, deren Wert man für *kontinuierliche* t-Argumente sogar zeichnen kann, wie oben geschehen. Dass man z.B. für $e \cdot e \cdot e$ auch e^3 schreibt, dass $e^2 = e \cdot e$ ist und 'meinetwegen' auch $e^1 = e$, kann man ja noch verstehen. Wenn aber das Argument t der Funktion e^t beispielsweise den Wert $t=1{,}5$ hat, muss man dann die Zahl e 'anderthalb Mal' mit sich selbst multiplizieren? Da das eine absurde Vorstellung ist, fragt man sich, wie die Funktion e^t überhaupt definiert ist! Außerdem, warum redet man immer nur von *einer* Lösung der Differentialgleichung, und nicht von *der* Lösung? Gibt es etwa *mehrere* Lösungen (wo doch schon die *eine* so schrecklich ist)? Um hier aufzuklären, schauen wir uns noch einmal an, wie wir auf Seite 219 - wenn auch nur andeutungsweise - veranschaulicht haben, dass Exponenten ('Hochzahlen') tatsächlich auch einen Sinn haben, wenn sie keine ganze positive (also *natürliche*) Zahlen sind, sondern negative oder gebrochene Zahlen. So etwas hatten wir ja dort auch schon benötigt, weil der Exponent κ in der 'reversiblen Adiabatengleichung' $p\upsilon^{\kappa} = \mathrm{const}$ *auch* schon keine natürliche Zahl war. Wieso kann man auch 'Zwischenwerte' von t zwischen den Werten 3,2,1 verwenden, wenn doch die mathematischen Beziehungen $e^3=e\cdot e\cdot e$, $e^2=e\cdot e$, $e^1=e$ solche Zwischenwerte nicht bereitstellen? Und wie kommt man zu negativen t-Werten, (links von der x-Achse), die ja in der Skizze ebenfalls benötigt werden?

Die t-Achse (und auch die x-Achse) sind ja kontinuierliche Zahlengeraden, also Mengen aus *reellen Zahlen*. Reelle Zahlen umfassen *rationale* und *irrationale Zahlen*. Rationale Zahlen, also eine Teilmenge der reellen Zahlen, sind diejenigen, die man als 'Brüche' darstellen kann. Eine Teilmenge der rationalen Zahlen hat den Nenner 1. Das sind die *ganzen Zahlen*. Und die natürlichen Zahlen, die einzigen, die man - ohne Zusatzbemerkungen - als Exponenten in Ausdrücken wie $e^3= e\cdot e\cdot e$ verwenden würde, sind wiederum eine Teilmenge der ganzen Zahlen. Auch wenn wir nun noch einmal die Argumente von Seite 219 aufgreifen und etwas vertiefen, können wir allenfalls verstehen, dass man in e^t auch rationale Zahlen verwenden darf. Dass auch irrationale Zahlen - die wiederum aus den Teilmengen algebraische und transzendente Zahlen bestehen - funktionieren, nehmen wir einfach hin, in der Hoffnung, dass das den Erwerb eines Verständnisses für das Klimasystem nur wenig beeinflusst.

Betrachten wir zuerst den Wert $t=0$ in e^{at}. Der Funktionswert $e^0=1$ - wie er sich aus dem Graphen von e^{at} an der Stelle $t=0$ ergibt (→ Seite 249) - ist natürlich *nicht* das Ergebnis der paradoxen Rechnung 'nehme die Zahl e Null Mal als Multiplikationsfaktor', sondern ein Ergebnis der von Seite 219 entlehnten *mathematisch widerspruchsfreien* Symbolkette, in der jede Division durch e mathematisch dadurch wiedergegeben wird, dass der Exponent um eins erniedrigt wird:

$$e^3/e = e^2,\ \ e^2/e = e = e^1,\ \ e/e = 1 = e^0,\ \ e^0/e =,\ \ e^{-1}/e = e^{-2},\ \ldots$$

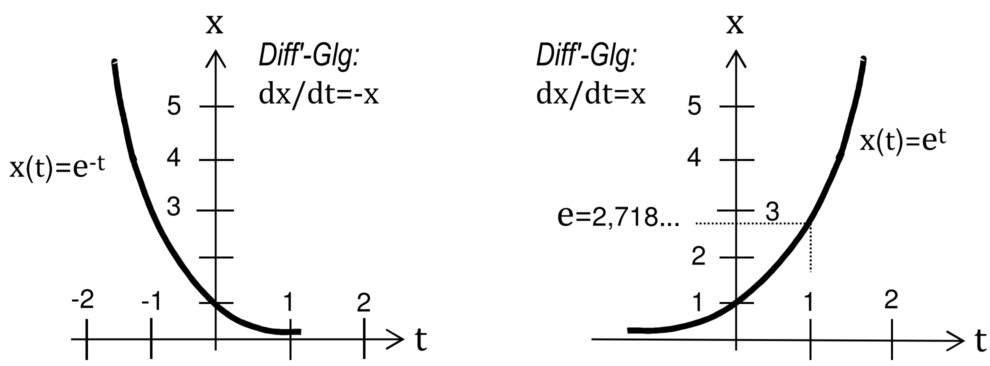
so dass der Exponent nicht nur Null wird, sondern sogar *negative* Werte haben kann. Wer sich unbedingt noch eine 'Rest-Veranschaulichung' zum Verständnis von $1/e=e^{-1}$ bewahren möcht, kann ja eine Division als 'negative Multiplikation' auffassen. Wenn also bei jeder Multiplikation mit e der Exponent um eins erhöht werden muss, *muss* er ja bei jeder Division durch e um eins erniedrigt werden! - *Gebrochene* Zahlen wie 0,5 kommen hier aber nicht vor. Betrachten wir daher noch eine andere, wieder von Seite 219 entlehnte Folge von e-Potenzen

$$e^8,\ e^4,\ e^2,\ e^1,\ e^{1/2},\ e^{1/4},\ e^{1/8}$$

So wie wir in der *vorigen* Folge, $(e^3, e^2, e^1, e^0, e^{-1}, e^{-2})$, bei jedem Schritt von rechts nach links den rechten Wert mit e multipliziert haben - also den Exponenten um eins erhöht haben - so multiplizieren wir in der *neuen* Folge bei jedem Schritt nach links den rechten Wert mit sich selbst, verdoppeln wir also den jeweiligen rechten Exponenten. Und auch das ist mathematisch in Ordnung, z.B. ist ja $e^4 \cdot e^4 = (e^4)^2 = e^8$. Auf dem umgekehrten Weg von links nach rechts mussten wir in der *vorigen* Folge bei jedem Schritt den linken Wert durch e dividieren - also den Exponenten um eins erniedrigen. In der neuen Folge hingegen müssen wir bei jedem Schritt nach rechts die Quadatwurzel ziehen, den Exponenten also halbieren, denn natürlich ist $\sqrt{e^8} = e^4$, $\sqrt{e^4} = e^2$ und $\sqrt{e^2} = e^1 = e$. Aber wieder einmal ist hier 'eigentlich Schluss'. Wenn man auch hier die Vorgehensweise verallgemeinern will, dass bei e^1 eben *nicht* Schluss ist, dann muss man auch hier entsprechend weitermachen, also von Schritt zu Schritt den Exponenten halbieren, und schon hat man gebrochene Exponenten, ½, ¼ usw., wie in der obigen Folge angegeben.

Vielleicht sind Ihnen die Differentialgleichungen $dx/dt = x$ mit der Lösung $x(t)=e^t$ und $dx/dt = ax$ mit der Lösung $x(t)=e^{at}$ nun etwas vertrauter geworden. Die erste Gleichung ist natürlich identisch mit der zweite für den Fall a=1. Und wenn man a=0 setzt? Dann erhält man $dx/dt = 0$ mit der Lösung $x(t) = c = \text{const.}$ als die denkbar einfachste Differentialgleichung. Man kann hier einen beliebigen Zeitwert t in $x(t)$ einsetzen und erhält stets als Funktionswert das gleiche c, sagen wir $c=1$. Sollte also $dx/dt = 0$ die Modellgleichung zur Berechnung meines Vermögens sein, (→ Seite 244), dann haben wir hier den seltsamen Fall, dass ich weder Geld ausgebe noch verdiene, noch verschenke, noch gewinne usw. Allerdings muss mir jemand etwas zum Essen kaufen und meine Wohnungsmiete bezahlen - paradiesisch, aber leider eine unrealistische Modellierung meiner realen Umwelt: Wenn ich zu Beginn meiner Vermögensberechnung einen Euro besitze - das nennt man eine ***Anfangsbedingung*** - dann sterbe ich auch mit diesem Vermögen. Oder etwas unpersönlicher ausgedrückt: Die Lösungsfunktion für die Differentialgleichung $dx/dt = 0$ mit der Anfangsbedingung $x(t=0) = 1$ lautet $x(t) = 1$. Wenn man den Graph dieser Lösungsfunktion in der Skizze von Seite 249 *zusätzlich* einzeichnen wollte, müsste man nur einen horizontalen Strich zeichnen, der die vertikale x-Achse bei $x=1$ schneidet. Bei einer anderen Anfangsbedingung wäre auch die Lösungsfunktion anders, ihr Graph wäre noch immer rein horizontal, von minus bis plus unendlich, aber sie würde die vertikale Achse bei einem anderen x-Wert schneiden.

Übrigens ist der aus einer anderen Anfangsbedingung folgende *veränderte* Graph die Antwort auf die frühere Frage, warum man immer von *einer* Lösung der Differentialgleichung redet, und nicht von *der* Lösung. Auch die auf Seite 249 skizzierte Exponentialfunktion $x(t)=e^t$ gilt nur für *eine* Anfangsbedingung, d.h. für einen Wert, den sie an der Stelle $t=0$ hat. Wir zeigen diese Skizze hier noch einmal (in der *rechten* Seite):



Für den *rechts* gezeichneten Funktionsverlauf der Lösung e^t der Differentialgleichung $dx/dt = x$ lautet die Anfangsbedingung ersichtlich $x(t=0) = 1$. Das ist die gleiche Anfangsbedingung, die wir auch der Lösung der 'einfachsten' Differentialgleichung $dx/dt=0$ zugrunde gelegt hatten, deren Graph einfach als horizontale Line quer durch den Punkt $x=1$ der x-Achse zu zeichnen wäre. Hätte man für $dx/dt=0$ die Anfangsbedingung $x(t=0) = 2$ gewählt, würde, wie besprochen, der Graph der erneut horizontalen Lösung die x-Achse bei $x=2$ schneiden. Aber nun können wir natürlich auch der Differentialgleichung $dx/dt = x$ die Anfangsbedingung $x(t=0) = 2$ verordnen. Dann bliebe die Form der Exponential-Kurve unverändert, aber ihr Graph würde 'nach oben' parallelverschoben, bis er die x-Achse bei $x=2$ trifft. Wir sagten auch schon, dass der Graph der Lösung $x(t) = e^{at}$ von $dx/dt = ax$ im Falle $a>1$ größere Steigungen, im Falle $a<1$ (aber noch $a>0$) schwächere Steigungen hat. Wenn z.B. $a=2$ ist, die Anfangsbedingung $x(t=0)=1$ aber unverändert bleibt, hat der Graph noch immer den Schnittpunkt mit der x-Achse bei $x=1$. Für alle Punkte der x-Achse gilt ja $t=0$, so dass der Exponent at ebenfalls Null ist. Aber die Steigung ist jetzt doppelt so groß, die Steigung der Funktion e^{2t} ist nun $d(e^{2t})/dt = 2e^{2t}$, denn sonst könnte sie ja nicht die Differentialgleichung $dx/dt = 2x = 2e^{2t}$ erfüllen. Ersetzt man in der Skizze die gezeichnete ansteigende Kurve durch die Funktion $x(t) = e^{2t}$, ist diese *so* steil, dass sie bei t=1 bereits den x-Wert erreicht hat, den die *gezeichnete* Kurve erst bei t=2 erreicht (für den wir auf Seite 249 gedanklich nach 'oben' extrapolieren mussten).

Und nun bitte ich Sie, sich statt der rechten obigen Skizze einen 'Film' aus folgenden drei Bildern vorzustellen: *1. Bild:* der steile Graph von e^{2t} ; *2. Bild*: der tatsächlich gezeichnete Graph von e^t ; *3. Bild:* der (horizontale) Graph von $x(t)=1= e^0$. Wie müsste nach dieser 'Serie' das 4. Bild aussehen? Richtig! Nach e^{2t}, e^t und e^0 kommt natürlich e^{-t}, und der Graph *dieser* Funktion ist in der linken Freihand-Skizze wiedergegeben!

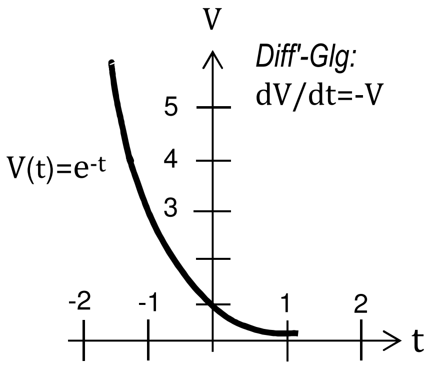
Und von welcher Differentialgleichung ist e^{-t} die Lösung? Natürlich von der *allgemeinen* Differentialgleichung mit der linearen Einflussfunktion ax, also $dx/dt=ax$, aber mit dem Parameter a=-1. Schließlich wissen wir ja schon, dass $dx/dt=ax$ die Lösung e^{at} hat, (wieder mit der Anfangsbedingung $x(t=0)=1$), und das gilt eben auch für a=-1, und für alle anderen negativen und positiven reellen Zahlen auf der t-Zahlengrade.

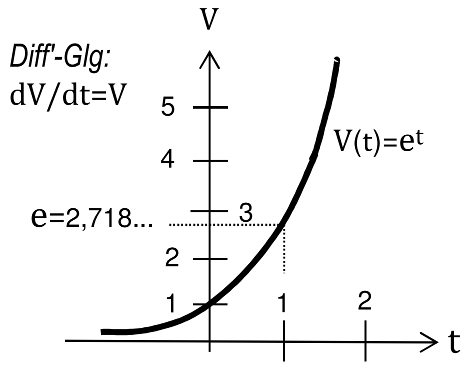
Versuchen wir einmal, mit Hilfe des persönlichen Vermögen-Modells' von Seite 244 zu verstehen, dass mathematisch-formale Gleichungen wie die soeben besprochenen auch etwas mit realen Prozessen zu tun haben können. Testen wir also, ob die einfache Gleichung $dx/dt = x$ so etwas wie ein kleines Wirtschaftsmodell für einen einzigen Menschen sein kann. Um zu symbolisieren, dass x nun ein persönliches Vermögen V sein soll, schreiben wir

$$dV/dt = V$$

Das dieser Gleichung zugrundeliegende 'Wirtschaftsgesetz' behauptet also, dass - mein Vermögen umso schneller zunimmt, je mehr Vermögen ich schon habe. *Und das stimmt ja auch*, z.B. weil ich dann immer mehr Zinsen bekomme. Wenn ich aber Schulden habe, wenn also V negativ ist, dann sagt ja $dV/dt=V$, dass auch die infinitesimale Vermögensdifferenz dV pro Zeitintervall dt negativ sind. Mein Vermögen, obwohl schon im Minus, nimmt weiter ab, und das umso schneller, je größer der Schuldenberg bereits ist. Und auch das stimmt, z.B. weil ich ja nun *selbst* immer mehr Zinsen bezahlen muss.

Bitte beachten Sie, dass das soeben geschilderte Schuldenmodell ein anderes ist als das in der obigen Doppelskizze links veranschaulichte Modell. Das dortige Modell entsprach ja einer Wirtschafts-Gleichung $dV/dt=-V$: Je mehr Geld ich *habe* (und nicht *schulde*), desto schneller verliere ich *dort* aufgrund der Einflussfunktion $f(V) = -V$ mein Guthaben. So zeigt es ja auch der entsprechende Graph in der obigen Skizze, die wir hier für die Variable V (statt x) noch eimal zeigen (unten links).





Dieses Modell ist realitätsfremd, es sei denn, meine Freizügigkeit für sinnlose Einkäufe oder für sinnvolle Spenden wüchsen überproportional zu meinem Kontostand, oder wir hätten eine Steuergesetzgebung, deren Ziel es wäre, die arm-reich-Schere gar nicht erst entstehen zu lassen. Etwas allgemeiner ausgedrückt: Die Differentialgleichung $dV/dt=aV$ *parametrisiert* eine sozial ausgerichtete Steuerpolitik, *wenn* $a<0$ *ist*, (gleichgültig, ob $a=1$ ist oder nicht), und sie parametrisiert die Entstehung bzw. Verstärkung einer Arm-Reich-Schere, wenn man $a>0$ wählt. Ersetzen Sie doch einmal in beiden Modelltypen V durch $-V$. Was ist passiert? Gar nichts! Beide Gleichungen bleiben unverändert. Sie sind nur mit -1 multipliziert worden. Das kann man auch rückgängig machen durch eine nochmalige Multiplikation mit -1. Allerdings sind unsere Skizzen der Graphen der Lösung beider Gleichungen *noch nicht vollständig,* es zeigt ja gar keine negativen V-Werte an!

Was passiert nämlich mit diesen Graphen bei der Multiplikation mit -1? Jeder V-Wert der beiden Kurven wird schlicht negativ! Wenn wir das Bild für negative V-Werte (für Schulden) vervollständigen wollen, müssen wir zunächst die V-Achse nach unten verlängern, (dort eine negative V-Skala anbringen), und die beiden Graphen einfach nach unten 'umklappen'. Exakter ausgedrückt, müssen wir die beiden fetten Graphen an der t-Achse *spiegeln*. Und schon sehen wir, dass im linken, 'sozialen' Fall die Schulden $-V$ im Laufe der Zeit t *abnehmen*, (weniger negativ werden) und dass im rechten, 'unsozialen' Fall die Schulden beschleunigt anwachsen, wie oben im 'Schuldenmodell' schon beschrieben.

Noch einmal? Wenn Sie eine Widerholung nicht wünschen, überspringen Sie einfach den nächsten Absatz!

Wenn man die beiden Differentialgleichungen $dV/dt=-V$ bzw. $dV/dt=V$ mit -1 multipliziert, erhält man die Gleichungen $d(-V)/dt=V$ bzw. $d(-V)/dt=-V$. Das sind aber keine *neuen* Gleichungen, sie machen nur darauf aufmerksam, dass man auch negative Zahlenwerte in $dV/dt=-V$ bzw. $dV/dt=V$ einsetzen darf. Die soeben gedanklich ergänzten, an der t-Achse *gespiegeten* Graphen veranschaulichen nur, was die Gleichungen $d(-V)/dt=V$ bzw. $d(-V)/dt=-V$ auch schon selbst sagen: Im ersten Fall ist die Einflussfunktion V auf die Veränderung $d(-V)/dt$ der *Schulden* positiv, (das negative Vermögen wird weniger negativ). Die Schulden nehmen also ab, so wie auch - vor der Multiplikation - das *Vermögen* wegen der Einflussfunktion $-V$ abgenommen hat. Hier wird also sowohl eine aus irgendwelchen Gründen aufgekommene Schuldensumme als auch ein - vielleicht geerbtes - Vermögen gedämpft. Man spricht von einer ***negativen Rückkopplung***. Hingegen ergibt die die Differentialgleichung $dV/dt=V$, nach Multiplikation mit -1 also $d(-V)/dt=-V$, eine ***positive Rückkopplung:*** Sowohl ein Vermögen V als auch ein Schuldenberg $-V$ wird immer größer.

Positive Rückkopplungen werden ***auch entstabilisierende Rückkopplung*** oder auch ***Mitkopplungen*** genannt. Sie wirken *immer* verstärkend, sowohl auf positives Vermögen als auch auf Schulden. ***Negative Rückkopplungen*** heißen auch ***stabilisierende Rückkopplung*** oder ***Gegenkopplungen,*** sie wirken in beiden Fällen abschwächend***.*** Für den Fall, dass die zu prognostizierende Variable V heißt, haben wir die Gegenkopplung auch 'sozial' und die Mitkopplung auch 'unsozial' genannt. Das sind keine üblichen Begriffe, sie sollen hier nur die zugrundeliegenden Dynamiken veranschaulichen.

Natürlich kann man die Gleichungen $dV/dt=-V$ bzw. $dV/dt=V$ statt mit +1 oder -1 auch mit $+a$ oder $-a$ multiplizieren. Wie wir schon diskutiert haben, verändern sich nun *doch* die Differentialgleichungen, denn die Lösungen, die exponentiellen Änderungen e^{-t} bzw. e^{t} gehen ja in e^{-at} bzw. in e^{at} über. Aber die beiden Rückkopplungs-*Arten*, positiv oder negativ zu sein, bleiben bestehen, nur wirken sie 'kräftger' falls $a>1$ ist, und weniger kräftig, falls $0<a<1$ ist. Somit kann man z.B. auch *unterschiedliche* Zinssätze simulieren. Bei $a=0$ sind ja, wie bsprochen, aus den exponentiellen Veränderungen *konstante* Lösungsfunktionen geworden, und bei $a<0$ vertauschen ja die positiven und negativen Rückkopplungen ihre Rollen.

Man kann also gewisse Realitäten mit einer derart einfachen Gleichung modellieren, wenn man die Methode der Parametrisierung verwendet. Gleichzeitig zeigt sich aber auch die Schwäche dieser Methode: Wenn man bedenkt, dass hier so unterschiedliche Freiheitsgrade wie Zinsen, Spendenbereitschaften, Leichtfertigkeiten beim Konsum oder bei Bürgschaften oder Steuersätze mit den gleichen algebraischen Ausdrücken $+a$ oder $-a$ parametrisiert werden müssen, statt ihre jeweils *eigenen* Entwicklungen im Rahmen ganz anderer, jeweils unterschiedlicher Vernetzungen zu simulieren, dann ahnt man das Ausmaß der Ungenauigkeit der Parametrisierungs-Methode. Auch dass die hier simulierte negative oder positive Rückkopplung immer exponentiell sein muss, ist ja ein schlagender Beweis für die Schwäche *dieser* Parametrisierung. Wer jemals einen unverschuldeten Schuldenberg langsam 'abstottern' musste, wird sofort bestätigen, dass die negative Rückkopplung nicht immer exponentiell erfolgt, so schön das auch wäre. Aber sie erfolgt auch nicht immer linear, was man mit der Differentialgleichung $d(-V)/dt=c$, $c = \mathrm{const} > 0$, parametrisieren könnte. Welche sonstigen Parametrisierungen man auch immer verwendete, stets würden die unterschiedlichsten Freiheitsgrade, das Vertrauen auf Geschäftspartner, die allgemeine Konjunktur, ja sogar die Gene der wirtschaftlich handelnden Personen versklavt werden von einer Konstanten oder von irgendeiner - linearen oder nichtlinearen - algebraischen Funktion des einzigen hier betrachteten Freiheitsgrades V.

Nun lösen wir uns von dem Vermögens-Freiheitsgrad V und betrachten wieder x als typisch für allgemeine Freiheitsgrade. Als der Club of Rome im Jahre 1973 vor dem 'exponentiellen Wachstum' warnte, [MMZM73], sowie vor den damit verbundenen katastrophalen Entwicklungen für die gesamte Weltbevölkerung, hatte er sich offensichtlich weitgehend auf den Gleichungstyp $dx/dt = ax$ mit der Exponentialfunktion e^{at} als Lösung berufen. Die ersten beiden Hauptkapitel von [MMZM73] handeln nur von ihr. Dann wird im dritten Kapitel auf der dortigen Seite 88/89 ein aufwendiges Diagramm für ein 'Weltmodell' gezeichnet, welches komplexe Rückkopplungen zwischen 99 sogenannten 'Faktoren' veranschaulichen soll. Aber die entscheidende Aussage mit dem Hinweis, dass bei Berücksichtigung von vielen Freiheitsgraden das Modell nicht unbedingt zum exponentiellen Wachstum führt, ist mir beim - vielleicht nicht hinreichend intensiven - Lesen nicht bewusst geworden. (Leider enthält das Buch auch kein Sachwortregister). Stattdessen wurde z.B. vorhergesagt, dass im Jahre 2000 kein Erdöl mehr vorhanden wäre (→ z.B. [MDR-tv]), und im Umschlagtext des Buches heißt es im Wortlaut "Fazit: Unser Bevölkerungs- und Produktionswachstum ist ein Wachstum zum Tode". Vergleiche zur verbalen Propagierung von Ozonloch ("wir bekommen alle Krebs"), Waldsterben ("erst stirbt der Wald, dann stirbt der Mensch") und - aktuell - zum "Klimakiller CO_2" drängen sich auf. Die Liste der falsch vorhergesagter 'Fakten' ist offensichtlich legendär.

Man kann schon in eindimensionalen Modellen verhindern, dass das destabilisierende exponentielle Wachstum auftritt. Dazu gibt es zwei grundsätzliche Möglichkeiten. Die *erste* haben wir schon besprochen, nämlich die, in der Gleichung $dx/dt=ax$ einen negativen Parameter $a<0$ zu verwenden. Dann erhält man z.B. die Differentialgleichung $dx/dt=-2x$ mit der Lösung e^{-2t}, also die Lösung mit negativen, stabilisierenden Rückkopplungen, entsprechend dem auf Seite 254 gezeichneten Graphen mit 'stärkerer' Abschwächung. Einen 'Mittelweg' gibt es hier nicht, man kann nur wählen zwischen einem exponentiellen Abfall und einem einem exponentiellen

Wachstum, den man durch eine Parametrisierung mit $m>0$ erhält. Unterschiedliche ***Beträge*** von a, durch $|a|$ symbolisiert, variieren nur die *Steilheit* des exponentiellen Abfalls (bei $a<0$) bzw. des exponentiellen Anstiegs (bei $a>0$).

Die *zweite* Möglichkeit gestattet es, auch in einer eindimensionalen Gleichung mit dem einzigen Freiheitsgrad x einen 'Wettkampf' zwischen positiver und negativer Rückkopplung zu simulieren. Das wird schon damit erledigt, dass man die Differentialgleichung

$$dx/dt=ax-bx$$

postuliert, wobei die destabilisierende Rückkopplung gewinnt, wenn das (positive) a größer als b ist. Im umgekehrten Fall - Sie ahnen es - bleibt das simulierte System stabil. Wenn man ein 'Weltmodell' im Auge hat, so ist die Gleichung $dx/dt = ax-bx$ verbesserungsfähig. Der Grund für Relevanz negativer Rückkopplungen liegt nämlich darin, dass die Erde nur begrenzte Ressourcen hat, die das Wachstum 'irgendwann' begrenzen. Diese Dämpfung des Wachstums ist aber 'am Anfang' noch gering, dafür werden sie 'später', wenn die Ressourcen tatsächlich 'knapp' werden, umso stärker, und am Ende dominieren sie und beenden das Wachstum.

Die Gleichung $dx/dt=ax-bx$ kann diese zeitliche Verzögerung der negativen gegenüber der positiven Rückkopplung nicht leisten. Die Bereitstellung von Ressourcen nennt man auch Logistik, und damit kommt erneut ***die Logistische Gleichung*** ins Spiel, von der schon wegen ihrer 'Chaos-Fähigkeit' und dem charakterisischen ***Schmetterlingseffekt*** die Rede war, (→ Seite 48), ohne jedoch die Gleichung selbst anzugeben. Sie lautet (so wie wir sie anwenden wollen):

$$dx/dt = ax - ax^2 = a(x - x^2)$$

(Was die später genauer zu untersuchende Chaosfähigkeit dieser Gleichung betrifft, so sei hier vorweggenommen, dass Chaos nur in der diskretisierten Form der logistische Gleichung auftritt, (→ Seite 28) und auch nur dann, wenn der Parameter a betimmte Werte annimmt: Erst wenn a größer als etwa 3,6 wird, ist der Schmetterlingseffekt 'plötzlich da', bei kleineren a jedoch nicht. - Alle in *diesem Absatz* zu treffenden Aussagen zur Logistischen Gleichung beziehen sich auf Parameterwerte *unterhalb* dieser 'Schwelle zum Chaos').

Die Gleichung unterscheidet sich - in der nicht ausgeklammerten Form - von der Gleichung $dx/dt= ax-bx$ nur dadurch, dass sie *einen* statt zwei Parameter hat *und* dass der negative Rückkopplungsterm *quadratisch nichtlinear* statt linear ist. Dieser *zweite* Unterschied bewirkt tatsächlich die gewünschte zeitliche Verzögerung der negativen Rückkopplung gegenüber der positiven, wie sie typisch sein kann für die für Ressourcen-Abhängigkeit des Wachstums. Das erkennt man am einfachsten an der ausgeklammerten Version $dx/dt = a(x - x^2)$. Fängt das Wachstum gerade an, ist x noch klein. Wenn die erreichte Größe x den Wert 1/100 erreicht hat, (*welche* Größe es auch sei, und in welchen Einheiten sie auch angegeben sein möge), lautet unsere Logistischen Gleichung $dx/dt = a(0{,}01 - 0{,}0001)$. M.a.W., wenn wir von vornherein *nicht* die Logistische Gleichung, sondern die Gleichung $dx/dt = ax$ für das rein exponentielles Wachstum benutzt hätten, wäre der Fehler nur 1% gewesen. Auch wenn das Wachstum den Wert x=1/10 erreicht hätte, wäre die Differentialgleichung $dx/dt = ax$ noch immer zu 90% 'richtig' gewesen. Erst beim Wert x=1 ist die negative stabilisierende Rückkopplung genauso stark wie die positive, wachstumsfördernde Rückkopplung, und danach setzt sich die so simulierte Ressourcenknappheit endgültig durch.

Aber wofür kann x in den Wachstumsformeln stehen? Das kann z.B. das *Bruttonationaleinkommen* sein, (früher *Bruttosozialprodukt* genannt), oder das *Bruttoinlandsprodukt* (der Gesamtwert aller hergestellten *Waren* und erbrachten *Dienstleistungen* innerhalb einer Zeitspanne). In [MMZM73] hat der Club of Rome das bisherige (d.h. das bis 1972 erfolgte) exponentielle Wachstum von 5 Größen - der *Bevölkerung*, der *Nahrungsmittelproduktion*, der *Industrialisierung*, der *Umweltverschmutzung* und des *Rohstoffverbrauches* - *statistisch* ermittelt, und die schon erwähnte 'tödliche' Weiterentwicklung seit 1973 in Modellen errechnet. Heute, über 40 Jahre später, erweisen sie sich 'zum Glück' als Fehlprognosen, so wie ja auch die Eiszeitprognose von 1978 [IT/CIA78], die Prognosen zum Ozonloch [MR74] und die Prognose zum Waldsterben [SK90] Fehlprognosen waren. Das Buch, das Sie gerade lesen, versucht Sie davon zu überzeugen, dass diese erlebten Fehlprognosen, (und viele andere ließen sich hinzufügen), doch nicht 'zum Glück' geschehen sind, sondern dass Sie alle eine gemeinsame Ursache haben: die Unterschätzung der Komplexität des jeweiligen Systems.

Auch die Logistische Gleichung ist natürlich wegen der Berücksichtigung nur eines Freiheitsgrades x noch weit von jedweder Realität entfernt, obwohl man mit diesem einzige Freiheitsgrad sowohl positive als auch negative Rückkopplungen nachbilden kann. Was hat man nicht alles *dadurch* modellieren wollen, dass man es entweder von dem Ausdruck ax oder von $-ax^2$ algebraisch abgebildet hat. Wie unvollkommmen das nur gelingen kann, haben schon am - eigentlich überschaubarem - Modell der Entwicklung eines Vermögens einer einzigen Person gesehen. Dass das Vermögen *selbst* dafür sorgt, dass es exponentiell wächst, kann man wegen der Zinsen, die das Vermögen abwirft, noch verstehen. Aber das es sich irgendwann aus Resourcen-knappheit selbst begrenzen kann, schon weniger. Wieder einmal gibt es tausende von Möglichkeiten - Freiheitsgrade - mehr Geld zu erwerben ohne gleichzeitig die Ausgaben zu erhöhen, z.B. leichtsinniger Konsum oder eine überproportionale Spendenbereitschaft, oder die Übernahme einer 'prekären' Bürgschaft, oder das Übertreten von Gesetzen und daraus resultierenden Geldstrafen. Es gibt also auch hier unendlich viele Freiheitsgrade, die das Zeitverhalten des Freiheitsgrades 'Vermögen' *negativ* rückkoppeln können. Und jeder der auf das Vermögen negativ *oder* positiv rückkoppelnden Freiheitsgrade hat ja auch ein eigenes Zeitverhalten, welches wie das Zeitverhalten des Vermögens selbst von der Gesamtheit *aller* Freiheitsgrade in der Argumentenliste der jeweiligen Einflussfunktion abhängt. Jedes Detail dieser komplexen Vernetzung kann das Vermögen in jede Richtung, plötzlich oder langsam, heute oder morgen verändern.

Aber all diese Details sind in der Logistischen Gleichung nicht modelliert: Sie sind nur ***parametrisiert****:* ihr Zeitverhalten ist durch das Zeitverhalten des Vermögens V algebraisch versklavt worden, in genau dem Sinne, wie wir das auf Seite 228 ausführlich beschrieben haben. Aber nun haben wir ein konkretes Beispiel: Alle Freiheitsgrade, deren Vernetzungen mit dem Vermögen dieses vermehren, sind diagnostisch starr an den höchst einfachen algebraischen Ausdruck aV angekoppelt, und alle Freiheitsgrade, deren Wechselwirkungen das Vermögen vermindern, werden durch den - immerhin nichtlinearen - algebraischen Ausdruck $-aV^2$ parametrisiert, also ebenfalls vom Zeitverhalten von V 'mitgeschleppt', aber nicht, wie es richtig wäre, mit einem eigenen dynamischen Zeitverhalten versehen. Man steckt also in die Modellierung die Annahme hinein, dass all diese Freiheitsgrade, für deren Zeitverhalten eigene Modellgleichungen zuständig wären, von vornherein nur - auf diese oder jene Weise - vom Zeitverhalten von V abhängen, über den algebraische Ausdruck aV bei Vermögenszuwachs, bzw. über den algebraische Ausdruck $-aV^2$ bei Vermögensminderung. *Und das ist das exakt gleiche Prinzip, nach dem zwangsweise in Klimamodellen - sogar in den am weitesten ausgebauten - das Zeitverhalten von vielen Klima-Freiheitsgraden modelliert werden muss!*

Zwei Gegenargumente wären denkbar gegen die hier allmählich durchschimmernde Aussage, dass komplexe Modelle *generell* nicht vorhersagbar seien: Erstens, man kann ja selbstverständlich Modelle verwenden, die mehr als einen Freiheitsgrad *haben*, und zweites, die unbelebte Atmosphäre ist als System viel einfacher zu modellieren als Wirschaftsmodelle, die ja viele Freiheitsgrade belebter Systeme wie Menschen oder sogar Menschengruppen wie Regierungen, Energieversorger usw. enthalten. Beide Argumente sind richtig, aber nur qualitativ, nicht quantitativ. Salpp ausgedrückt: Es *geht* qualitativ besser als mit der logistischen Gleichung, aber die notwendige Quantität der notwendigen Verbesserungen ist unerreichbar.

Stellen Sie sich einen Arzt vor, der die Heilungsmöglichkeit eines kranken Menschen dadurch ermittelt, dass er zwei mathematische Gleichungs-Systeme konstruiert, die die zeitlichen Entwicklungen aller Freiheitsgrade des Systems 'Mensch' vorhersagen. Die beiden Systeme unterscheiden sich nur dadurch voneinander, dass die geplanten medizinischen Freiheitsgrade, die ja mit allen anderen Freiheitsgraden wechselwirken würden, in einem Modell enthalten sind und im anderen nicht. Nun muss der Arzt nur noch die Gleichungen lösen, um zu berechnen, wie die Medikamente (oder auch andere geplanten Maßnahmen) auf alle Organe incl. Gehirn wirken, wie sie sich auch auf die Wechselwirkungen innerhalb der Organe, innerhalb aller Zellen und aller Zellkerne usw. auswirken, und ob die medizinisch beeinflusste Vernetzung zwischen allen Freiheitsgraden des menschlichen Körpers incl. seiner geistigen und psychischen Struktur den unfassbar hohen Selbstorganisationsgrad lebensverlängernd unterstützt oder nicht. Wenn das - 'leider' - nicht der Fall sein sollte, rechnet er das alles noch einmal durch mit dem Modell einer Vernetzung der Freiheitsgrade des Patienten mit den Freiheitsgraden einer *anderen* medizinischen Maßnahme.

Wenn wir übereinstimmend einen solchen Gedanken fast albern finden, liegt das nicht daran, das die Idee wirklich albern wäre, sondern daran, dass es illusorisch erscheint, jedes Blutkörperchen, jede Nervenzelle usw. in einem Pool von menschlichen Freiheitsgraden und all ihren Wechselwirkungen korrekt zu modellieren. Oder ganz einfach ausgedrückt, das System Mensch ist dermaßen komplex, dass schon die Idee, es modellmäßig zu simulieren, geradezu albern erscheint.

Aber ist die Quantität der notwendigen Verbesserungen, z.B. ausgehend von der Logistischen Gleichung, nicht wesentlich geringer, wenn wir die Freiheitsgrade der Atmosphäre modellieren wollen, und nicht mehr die unermesslich vielen Freiheitsgrade des Systems Mensch, wo ja auch keinesfalls bewiesen ist, ob solche menschlichen Strukturen wie Stolz, Hass, Glaube usw. überhaupt Ergebnisse eines bestimmten Zusammenspieles der vernetzten menschlichen Freiheitsgrade sind.

Egal, ob diese Zweifel dadurch entstehen, dass die Anzahl der menschlichen Freiheitsgrade so unsagbar groß sei, dass man ihre Auswirkungen wohl niemals überblicken kann, oder dadurch, dass rationale naturwissenschaftliche Erklärungen *jedweden* menschlichen Verhaltens sowieso unmöglich seien und höchstens auf sein *organischen* Verhalten angewendet werden können - ein reiner Zahlenvergleich der menschlichen und atmosphärischen Freiheitsgraden ist wohl nicht verboten. Und obwohl ich sie nicht abgezählt habe, neige ich dazu, dass unbelebte Systeme weniger

Freiheitsgrade haben als belebte. Aber: Es sollte nicht unerwähnt bleiben, dass es Hypothesen gibt, z.B. die Gaia-Hypothese [Lov82], dass das Erdsystem sogar selbst in gewisser Weise ein belebtes System sei. Auch wenn das falsch sein sollte, und wenn die Atmosphäre sogar unermesslich viel weniger Freiheitsgrade haben sollte als ein lebendiges System, hat die Atmosphäre noch immer unermesslich viele Freiheitsgrade!

Das erinnert mich an einen kürzlich gesehenen, sehr beeindruckenden Fensehfilm, dessen Titel ich vergessen habe: Eine Wettgemeischaft in einem Altersheim hat den Jackpot gecknackt, und die rührende Hilfslosigleit der betagten Menschen, plötzlich mit den erworbenen Millionen umgehen zu müssen, wurde sehr glaubhaft geschildert. Eine solche Hilflosigkeit ist ja sehr verständlich, und sie ist kein bisschen geringer als sie es wäre, wenn der Gewinn nicht Millionen-, sondern Billionen-Beträge umfasst hätte. Und - Sie wissen schon was ich damit sagen will - die Hilflosigkeit beim Versuch einer detaillierten wirklichkeitsnahen Modellierung der Atmosphäre ist auch nicht geringer als die beim Versuch, mit Differentialgleichungen das Verhalten eines Menschen auszurechnen. Man kann diese Hilflosigkeit nur besser verstecken!

OK, ich akzepier es, liebe Leserin, lieber Leser, wenn Sie dieses Argument für die Nichtvorhersagbarkeit der Atmosphäre nicht ganz ernst nehmen wollen oder können, und wenn sie konkretere Argumente anfordern. Ich versuche diesem zu entsprechen, indem ich noch einmal an die kleinen Wirtschafts- oder Vermögens- Modelle erinnere und daran, wie problematisch es ist, die in der Wirklichkeit wirkenden zahlreichen Freiheitsgrade in einem eindimensionalen Modell durch algebraische Ausdrücke des einzigen verbliebenen Freiheitsgrades zu parametrisieren. In ähnlicher Weise will ich nun zeigen, dass auch eindimensionale *atmosphärische* Modelle 'etwas' mit realen atmosphärischen Prozessen zu tun haben können, dass dieses 'Etwas' aber auch hier sehr dürftig ist, und dass diese Dürftigkeit äußerst schwierig - ich sage überhaupt nicht - zu überwinden ist, obwohl man die Prognoseergebnisse 'Fakten' nennen möchte, was z.B. [PB13] und sehr viele andere tun.

Als einfachstes Modell überhaupt haben wir die Differentialgleichung $dx/dt = 0$ mit der Lösung $x = const$ bezeichnet. Wie groß diese Lösungs-Konstante ist, hängt von der Anfangsbedingung $x(t{=}0)$ ab. Wenn z.B. die Modell-Klimatemperatur T zum Start-Zeitpunkt der Prognose $T{=}15$ Grad Celsius eingesetzt wird, dann bleibt es bei dieser Temperatur. Nimmt man statt $dT/dt = 0$ die Gleichung $dT/dt = aT$, dann nimmt die Temperatur exponentiell zu oder ab, je nachdem, ob a positiv oder negativ ist. Nimmt man die logistische Gleichung $dT/dt = aT - aT^2$, und als Anfangsbedingung $T = ½$ Grad, so steigt T zunächst an, weil $aT = ½a$ größer ist als $aT^2 = ¼a$. Wenn aber mit der Anfangsbedingung $T=15$ Grad Celsius gestartet wird, wird die Modellatmosphäre sehr schnell kälter.

Ähnlich wie $dV/dt = aV$ als 'Ein-Personen-Vermögensmodell' interpretiert werden konnte - wenn auch ein sehr beschränktes -, so kann man auch plausible *meteorologische* Begründungen für *jede* der genannten einfachen 'Modellgleichungen' für die Temperatur angeben. Beim Vermögensmodell kann ein Vermögenszuwachs deswegen selbst für eine Beschleunigung dieses Zuwachses sorgen, weil mit dem Vermögen auch die *Zinsgewinne* steigen. Und in der Atmosphäre?

Beispiel 1: *Eine* Idee ist die folgende. Je wärmer es ist - je größer T ist - desto schneller schmelzen Schnee und Eis. Ihre hellen Oberflächen hatten aber vorher Sonnenenergie ungenutzt reflektiert, (der Fachbegriff hierzu heißt ***Albedo***), so dass nach dem wärmebedingten Schmelzen der Reflexionsflächen mehr Sonnenenergie *genutzt* wird und es noch wärmer wird. Man nennt diesen positiven Rückkopplungsprozess ***Eis-Albedo Rückkopplung***. Da sich aber die Temperaturveränderung nur unter Zuhilfenahme von schmelzenden Schnee- und Eisflächen *selbst* verstärkt, wäre der Begriff *Temperatur-Schnee/Eis-Strahlung-Albedo-Temperatur Rückkopplung* besser, weil er andeutet, dass hier *mehrere* Freiheitsgrade beteiligt sind. Wollte man allerdings weitere in dieser Rückkopplungsschleife mitbeteiligte Freiheitsgrade in dem Begriff unterbringen, wäre er sehr bald unbrauchbar, denn er würde zu lang, es sind nämlich sehr viele weitere Freiheitsgrade mitbeteiligt, wie die folgenden Überlegungen zeigen:

Schneeschmelze kann es nur geben, wenn es vorher geschneit hat. *Damit* es schneien kann, müssen sich erst eimal Wolken bilden. Die Wolkenphysik ist unfassbar komplex, sie nimmt ihrerseits sehr viele weitere Freiheitsgrade mit ins Boot. Und die anschließende Schneeschmelze kann ja nur eingeleitet werden, wenn sich die Wolken auflösen, zumindest 'dünner' werden, damit die Strahlung nach unten 'durchgelassen' und dort absorbiert werden kann. Alles in allem sind an den zeitlichen Änderungen der Schnee-und Eisbedeckung höchst komplexe Wechselwirkungen zwischen vielen Freiheitsgraden beteiligt, von denen in [Lan02], resp. in www.hajolange.de / Kap.05 Die feuchte Atmosphäre.pdf, Seiten 296 - 300 nur ein sehr kleiner Teil erläutert wird.

Damit Sie nicht umständlich in meiner Homepage hin und her klicken müssen, was ja noch nicht einmal möglich ist, wenn Sie diesen Text ausgedruckt haben, zitiere ich hier einmal aus diesem Buch, und zwar die Zusammenfassung der dortigen Seite 300. Natürlich ist dieser Text - da aus einem Fach-Lehrbuch - für Sie als Laien 'eigentlich' ungeeignet. Aber auch wenn Sie nur sehr wenig verstehen, erhalten Sie sicher einen nachhaltigen Eindruck von der Tatsache, dass die Albedo, die Schneebedeckung usw. nicht nur von der Temperatur eines eindimensionalen Modells abhängen, sondern von vielen anderen Freiheitsgraden, die nicht korrekt berücksichtigt werden können, wenn man sie diagnostisch an das Zeitverhalten eines arithmetischen Ausdruckes in T anbindet (versklavt), was Parametrisierungen aber tun.

In dem angekündigten Textzitat aus [Lan02] geht es darum, unter welchen Umständen ein Wolkentropfen überhaupt zu einem Regentropfen anwachsen kann und ob er, *falls* er zum 'Herunterfallen' groß genug wird, unten als Regentropfen oder als Schneeflocke ankommt. Voraussetzung zum Verständnis des Textes ist das Wissen, dass Tröpfchenbildung in feuchter Luft nur bei ***Übersättigung*** möglich ist, und dass die erforderliche Übersättigung umso größer ist, je kleiner der Tropfenradius ist.

Das ist übrigens der Grund dafür, dass es ohne ***Kondensationskeime***, die sozusagen eine 'radiusvergrößernde' Wirkung haben, sowieso keine Wolkentröpfchen geben kann. Das Entstehen hierzu geeigneter Kondensationskerne steht nach der Svensmarck-Theorie [SC08] in enger Wechselwirkung mit der Stärke der kosmischen Strahlung, (→ auch Seite 117), die bis in niedrige Wolkenhöhe durchkommt, und dieses Vermögen wiederum hängt davon ab, wie schwach der Sonnenwind ist, welcher die kosmische Strahlung abschirmt. Bei großer Sonnenfleckenzahl, d.h. bei starker Sonnenaktivität, ist diese Abschirmung groß, was weniger Kondensationskerne zur Folge hat und daher auch weniger abkühlenden Regen. - Haben Sie es gemerkt? Stärkere Sonnenaktivität, d.h. auch stärkere Sonneneinstrahlung, erwärmt die Erde, ...

> *aber NICHT deswegen, weil die Atmosphäre dann mehr solare Einstrahlung absorbiert - ein Effekt, dessen energetische Wirkung tatsächlich gering ist - sondern deswegen, weil der damit verbundene stärkere Sonnenwind die kosmische Strahlung veranlasst, weniger kühlende Kondensationsskeime zu bilden!*

Sonneneinfluss auf das Klima? ja! - nach [SC08] ist er sogar stärker als der CO_2-Einfluss - aber nicht durch direkte Erwärmung, sondern vor allem durch Verringerung der Abkühlung durch Regen. Wieder sind die Zusammenhänge komplexer als vordergründig gedacht, dabei wurde noch nicht einmal erwähnt, dass auch das irdische Erdmagnetfeld ein weiterer hier mitspielender Freiheitsgrad sein könnte. Ein Beispiel für eine direkte energetische Begründung ohne 'nichtlineare Umwege' findet man in einem von 'Welt online' geführten Interview mit Prof. Peter Lemke, Universität Bremen und AWI Bremerhaven: "Ein äußerer Faktor ist die Sonne. Welchen Einfluss hat sie auf das irdische Klima?" Antwort: "Der ist gegenwärtig vernachlässigbar klein. Die Strahlungsleistung der Sonne schwankt selbst über mehrere Dekaden nur um 0,2 Prozent. Da haben Vulkanausbrüche einen größeren Einfluss ...", [Welt_b-in]. Eine

Sammlung von Gegenposition mit Hinweisen auf diese 'Umwege', zusammengestellt vom Wissenschaftsredakteur Ulrich Kulke, findet man z.B. in [Welt_a-in].

In dem angekündigten, nun folgenden Textauszug aus [Lan02] - letztendlich zum gleichen Thema - kommt einige Male das Symbol F vor. F steht für ***'Freie Energie'***. Das ist eine thermodynamische Größe, die wir im vorliegenden Buch nicht thematisieren, die sich aber aus den thermodynamischen Größen U (Innere Energie), S (Entropie), die wir schon thematisiert *haben*, und der Temperatur T folgendermaßen bestimmt:

$$F = U - TS$$

Fortgeschrittene Leserinnen und Leser können sich unter www.hajolange.de/ Kap.01 Thermodynamische Grundlagen.pdf ausführlich über Sinn und Zweck dieser Größe informieren. Den Laien, meiner eigentlichen 'Zielgruppe', kann ich nur versichern, dass die nun folgende Zusammenfassung ohne Verwendung der Größe F auch möglich gewesen wäre, sie dann aber länger und für Sie dennoch nicht verständlicher geworden wäre. Aber auch ohne Detailverständnis werden Sie - so hoffe ich jedenfalls - den Eindruck gewinnen, dass eine Logistische Gleichung, $dT/dt = aT\text{-}aT^2$, sehr viele Prozesse *nicht* modellieren kann, nicht nur die Physik der Kondensationskerne nicht. Und nur *darauf* kommt es hier an.

Zitat aus [Lan02], Seite 300 (Zusammenfassung):

> Ein Tropfenwachstum bei ***Übersättigung*** ergibt aufgrund des ***Volumenanteiles*** eine thermodynamisch günstige F-Erniedrigung, der ***Oberflächenanteil*** aber erhöht F. Die Erniedrigung ist kubisch im Tropfenradius r, die Erhöhung ist quadratisch. Ob die Summe zur Erhöhung oder zur Erniedrigung führt, hängt also vom ***Tropfenradius*** r ab. Ist r groß, so überwiegt der Volumenanteil, bei sehr kleinen Radien überwiegt jedoch der Oberflächenanteil. Dann muss der Tropfen ***verdampfen***, weil seine ***Freie Energie*** F bei einer Radiusverkleinerung abnimmt. Gleichgewicht ergibt sich für einen ***kritischen Radius***. Dieses Gleichgewicht ist jedoch ***instabil***, denn F hat ein relatives Maximum! Der Tropfen wächst also weiter, bis er als ***Regen*** ausfällt.
>
> Allerdings kommen hier noch weitere komplexe physikalische Prozesse ins Spiel wie ***Dampfdruckerniedrigung*** durch ***Lösungseffekte***, ***Unterkühlung***, ***Sublimations***- und ***Koagulationseffekte*** [GW85]. In diesem Zusammenhang soll wenigstens noch der ***Bergeron-Findeisen-Prozess*** erwähnt werden. Er basiert darauf, dass der Sättigungsdampfdruck nicht nur über einer ebenen Wasseroberfläche niedriger ist als über einer gekrümmten, sondern dass er auch über Eis niedriger ist als über Wasser. Folglich kann die Luft über ***Wassertröpfchen*** ungesättigt,

über ***Eiskristallen*** jedoch gesättigt sein! Die Folge ist, dass in ***Mischwolken*** die Eiskristalle auf Kosten der Wassertropfen wachsen (***Sublimation***).

Ab einer kritischen Größe werden die Eiskristalle nicht mehr vom ***Aufwind der Wolke*** getragen und fallen herunter. Dabei kollidieren sie mit den noch schwebenden unterkühlten Tröpfchen und wachsen noch weiter (***Koagulation***). Wenn die Kristalle während des Falles erneut schmelzen, regnet es, sonst fällt der Niederschlag als Schnee.

In den Tropen reicht die Luftfeuchtigkeit jedoch meist aus, um unter Umgehung der Eis-Phase, also allein durch "Zusammenfließen" (***Koaleszenz***) kleiner Tröpfchen, hinreichend große Regentropfen zu bilden. Unterstützend wirken dabei ***konvergente Luftströmungen*** und die ***Luftelektrizität***.

Zitat-Ende

Anders als im Originaltext habe ich hier viele Begriffe ***hervorgehoben,*** weniger um zu demonstrieren, *welche* - Ihnen oft unbekannte - physikalische Einflüsse noch zu beachten wären, sondern um zu demonstrieren *wie viele* es sind. Sie alle halten ja die Schneebedeckung und die Albedo davon ab, sich - vordergründig - im Gleichschritt mit T zu verändern, im Falle $dT/dt=-aT$ also nur mit zunehmender Temperatur abzunehmen, und mit abnehmender Temperatur zuzunehmen. Ich wollte ein weiters Mal anhand konkreter meteorologischer Beispiele untermauern, dass 'realitätsnahe' Modelle im Zustandsraum unglaublich hochdimenional sein müssen. Dabei sind wir noch gar nicht am Ende angekommen, sondern erst bei der Entstehung von Niederschlag und Schnee als *Voraussetzung* für die Veränderung der reflektierenden Schnee- und Eisflächen, also auch der Albedo. Die sich nun noch anschließende ***Transformation*** eines Teiles der Schneeflächen in Eisflächen (***Vergletscherung***) wäre noch einmal ein ähnlich komplexes Thema und brächte eine weitere Flut von Freiheitsgraden und diese kontrollierende Differentialgleichungen mit sich.

Soviel also zum *Beispiel 1*, der Eis-Albedo Rückkopplung als Prozessfolge, die durch eine eindimensionale oder niedrig-dimensionale Modellierung nicht modelliert werden kann. Das Beispiel dürfte klar gemacht haben, dass auch eine zwei- fünf oder zwanzigdimensionale Modellierung nur *dieser* Rückkopplung noch nicht ausreichen würde. Schließlich war ja der - *hier auf* Seite 118 bereits *vorweggenommene* - Einfluss von Sonnenwind, Erdmagnetfeld und kosmischer Strahlung im Zitat aus meinem Buch von 2002 noch nicht einmal enthalten, und auch nicht der mögliche Einfluss des Mondes, auf den wir schon auf Seite 19 hingewiesen hatten!

Entsprechende Kommentare gelten auch für die folgenden weiteren Prozessbeispiele, die ich aber nur noch kurz abhandle:

Beispiel 2: Je größer T ist, desto eher können sich Verdunstung und danach auch Wolkenbildung verstärken. Der Wasserdampf ist aber wie CO_2 ein Treibhausgas, sogar ein noch viel stärkeres. Je wärmer es ist, desto mehr Treibhausgas ist also da für eine noch *schnellere* Erwärmung: Wir haben eine weitere positive, entstabilisierende ('labilisierende') Rückkopplung gefunden, nennen wir sie ***Temperatur-Wolken-Temperatur (Typ 1) -*** Rückkopplung.

Beispiel 3: Eine T-Erhöhung erwärmt auch die Gewässer (Flüsse, Seen, Meere), und daher wird aus ihnen vermehrt auch das Treibhausgas CO_2 ausgetrieben. Wir haben eine dritte positive, entstabilisierende Rückkopplung, sagen wir eine ***Temperatur-CO_2-Temperatur*** - Rückkopplung.

Aber eine Temperatur-Zunahme kann auch für eine *Temperatur-Abnahme* sorgen. Die (wie gesehen unzureichende) eindimensionale Modellgleichung ist nicht mehr $dT/dt = aT$, sondern $dT/dt = -aT$. Beispiele *dafür*::

Beispiel 4: Die Obergrenzen der durch T-Erhöhung entstandenen zusätzlichen Wolken haben sehr helle, weiße Obergrenzen und werfen daher - ebenso wie Schnee und Eis - solare Energie ungenutzt ins Weltall zurück. Wir haben also diesmal keine positive ***Mitkopplung***, sondern eine ***Gegenkopplung***, genauer gesagt eine *negative, stabilisierende* ***Temperatur-Wolken-Temperatur (Typ 2)*** - Rückkopplung. Wenn man diese ***Wolken-Albedo*** nicht parametrisieren, sondern auch noch explizit berücksichtigen wollte, stiege ja die Komplexität durch weitere Freiheitsgrade noch einmal astronomisch an - und dann *noch einmal*, wenn es gilt, auch die sonstigen äußerst vielseitigen Auswirkungen von Wolken auf Wetter und Klima zu modellieren. (Beides klang schon in meinen Kommentaren zum Beispiel 1 an).

Interessant ist folgendes: sowohl die Oberflächen von Schnee und Eis, als auch die Oberfläche der Wolken reflektieren Solarstrahlung und unterstützen daher eine *Abkühlung*. Bei Erwärmung nehmen aber Schnee- und Eisflächen i.A. ab, Wolken jedoch i.A. zu (wenn *noch* einmal weitere Freiheitsgrade mitwirken, wie z.B. vertikale Winde). *Daher* wirkt die Albedo einmal labilisierend (Beispiel 1) und einmal stabilisierend (Beispiel 4)!

Beispiel 5: Die durch T-Erhöhung entstandenen zusätzlichen Wolken führen oft auch zu mehr Regen, und dieser wäscht Teibhausgase wie CO_2 aus. (Es entsteht 'saurer Regen'). Wir haben eine weitere Gegenkopplung, eine stabilisierende ***Temperatur-CO_2 -Temperatur*** - Rückkopplung.

Die negative Rückkopplung in Beispiel 5 wirkt viel längerfristiger als diejenige in Beispiel 4. Das liegt daran, dass das kohlenstoffhaltige Regenwasser irgendwann in die Ozeane gelangt, wo sich die Schalentiere schon darauf freuen, denn sie benötigen den Kohlenstoff zum Einbau in ihre Kalkschalen. Im Rahmen eines - insgesamt natürlich wieder äußerst komplexen - sogenannten ***Karbonat-Silikat-Zyklus*** kommt es zu einer Kohlenstoffspeicherung in der Lithosphäre, weil die Kalkschalen der auf den Meeresboden absinkenden toten Meerestiere dort sedimentieren. Dass die Abkühlung durch Sedimentierung des Treibhausgases in der Lithossphäre eine längere Zeitskala hat als die Abkühlung durch die Albedo an Wolkenobergrenzen ist wohl offensichtlich. Aber auch die Sedimentierung von Kohlenstoff ist nicht endgültig, worauf ja schon das Wort Karbonat-Silikat-Zyklus hinweist. Die sogenannte Plattentektonik - Bewegungen der Erdplatten auf dem zähflüssigen heißen Erdmantel - macht es möglich, dass irgenwann, vielleicht nach Millionen von Jahren, durch einen sogenannten ***Subduktionsprozess*** das Kalziumkarbonat so tief in den heißen Erdmantel hineingedrückt wird, dass gasförmiges CO_2 freigesetzt wird und über Vulkanausbrüche zurück in die Atmosphäre gelangt.

Liebe Leserin, lieber Leser, konnte ich Sie überzeugen, dass die pure Anzahl der Freiheitsgrade, die auch tote Schalentieren im Meer, kosmische Strahlung und Tropfenwachstum auf Kondensationskeimen einbeziehen, die mathematisch - atmosphärische Modellbildung ebenso überfordert wie einen Arzt, wenn er mit Hilfe eines dynamischen Menschenmodells die Wirkung von Medikamenten aus Differentialgleichungen berechnen wollte? Und ist diese Aussage nicht unabhängig davon, ob im letzteren Fall die Anzahl der Freiheitsgrade *noch* höher liegt oder nicht?

Alle fünf bisher beschriebenen Rückkopplungs-Schleifen begannen und endeten bei der Temperatur T. Wir wollen aber nicht vergessen: Da in der Differentialgleichung für den einen Freiheitsgrad T so viele Rückkopplungen untergebracht werden müssen, muss man die eindimensionale Differentialgleichung für T zu einem Gleichungs-System ergänzen, dessen Dimension der Zahl der zu berücksichtigen Freiheitsgrade entspricht. - So haben wir es auf Seite 240 gelernt.

Wie groß ist doch der Kontrast zur einfachen eindimensionalen Modellierung mithilfe von Parametrisierungen! Greifen wir letztere noch einmal kurz auf. Vielleicht haben Sie, liebe Leserin, lieber Leser, schon selbst einen haarsträubenden Fehler in diesen Modellen bemerkt. Modelle macht man doch eigentlich, um *auszurechen*, wie sich das atmosphärische System zeitlich entwickeln wird, wie sich z.B. Wolken oder CO_2 auf die Temperatur auswirken. Aber was passiert denn hier? Der Modellierer, der mit der Parametrisierung $dT/dt = aT$ arbeitet, lässt *nicht* das Modell entscheiden, ob das Zusammenwirken von Temperatur, Wolken, CO_2 usw. eine stabilisierende oder eine labilisierende Rückkopplung ergibt! Der Modellierer muss das offenbar *selbst* entscheiden, indem er *vor der* Prognose den Parameter a negativ oder positiv *wählt!*

Was eigentlich als Prognoseergebnis durch Rechnung *herauskommen* soll, wird *vorher* ins Modell hineingesteckt: Das qualitative Ergebnis der Modellsimulation wird bei der mathematischen Modellbildung in Parameterisierungen *vorweggenommen!*

Bei der Betrachtung der eindimensionalen Modelle und der Parametrisierungen ist das - leider ebenfalls illusorische - Bedürnis entstanden, für die Modellierung 'eigentlich' ein hochdimensionales Gleichungs-System zu verwenden, in dem *alle* relevanten Freiheitsgrade durch eine eigene Differentialgleichung vertreten sind, die die jeweiligen relevanten Wechselwirkungen mit allen anderen Freiheitsgraden zum Ausdruck bringen. Einem solchen Modell möchte ich hier den Namen ***vollständiges Modell*** geben.

In diesem Unterkapitel wollten wir über einfache und komplexe Modelle reden, wobei Komplexität nach Seite 48 das Zusammenspiel von Nichtlinearität und Vernetzung ist. ***Einfache Modelle*** sind entweder nicht vernetzt - also eindimensional - oder linear, oder beides. Die bisher besprochenen einfachen Modelle waren entweder eindimensional oder eindimensional *und* linear. Mehrdimensionale *und* lineare Modelle gibt es wahrscheinlich nicht, jedenfalls ist mir kein sinnvolles Beispiel hierzu eingefallen. Das soeben definierte vollständige Modell wäre - wenn es realisierbar wäre - mit Sicherheit ein komplexes Modell.

Aber natürlich gibt es auch *realisierbare* nichtlineare Modelle mit einer beträchtlichen Anzahl von Freiheitsgraden. Wie schon erwähnt, nennt man sie *realitätsnahe Modelle.* Obwohl man in den letzten Jahren gerade hier sehr große Fortschritte gemacht hat, halte ich diesen Begriff für missverständlich, suggeriert er doch, dass diese Modelle 'nahe' am soeben definierten *vollständigen* Modell lägen. In der öffentlichen Klimadiskussion spricht man - nach meiner Wahrnehmung - zu etwa 99% vom ***'Klimaziel-Modell'*** und zu etwa 0,9% von den ***'realitätsnahen Modellen'***, also

1) von dem *'Klimaziel-Modell'* als Modelltyp, der die physikalischen Vorstellungen nennt, welche unabdingbare Voraussetzungen sind für die Stimmigkeit der alltäglichen Nachrichten und Diskussionen über die Klimaschädlichkeit oder Klimafreundlichkeit jedweder energiepolitischen Entscheidung, also für die Quasi-Identität von CO_2-einsparenden Energiemaßnahmen und Klimamaßnahmen.

2) von dem *'realitätsnahe Modell'* als Modelltyp, der - in unterschiedlichen Versionen - hinter den Kulissen der Klimadiskussion tatsächlich realisiert wird, und deren Prognosen angeblich die physikalischen Vorstellungen hinter dem *'Klimaziel-Modell'* bestätigen, so dass schon Modelltyp 1) 'Fakten' liefert.

(Der winzige 'Rest' von 0.1% befasst sich mit ***'konzeptionellen Modellen'*** und mit ***'Modellen mittlerer Komplexität'***, auf die wir erst später - in Kapitel 4 - zu sprechen kommen).

In Kurzform kann man den physikalischen Hintergrund des Modelltyps 1) so beschreiben, dass die Klimaentwicklung von keinem anderen Freiheitsgrad relevant abhinge als vom anthropogen erzeugten CO_2, dass man also in Modelltyp 2) den Einfluss aller anderen Freiheitsgrade vernachlässigen dürfe. Zum Beweis dafür, dass man in der 'offiziell-öffentlichen' Klimadiskussion die Aussagen dieses Klimaziel-Modells tatsächlich als Fakten darstellt, möchte ich keinen geringeren als H.J. Schellnhuber zitieren, Gründer und Direktor des Potsdamer Instituts für Klimafolgenforschung, (laut Wikipedia weltweit eines der angesehensten Institute im Bereich der Klimaforschung), Chefberater der Bundesregierung in Fragen des Klimawandels und der internationalen Klimapolitik und Träger zahlreicher Ehrungen. Wie schon auf Seite 24 berichtet, hat er in einer ZDF 'Talkshow' am 3.12. 2009 (Moderation Maybritt Illner) eine - von mir mitprotokollierte - ein-eindeutige Zuordnung von atmosphärischen Erwärmungsraten und menschlichem CO_2-Verbrauch vorgenommen. Zur Verdeutlichung wiederhole ich hier den Wortlaut, nun jedoch in nahezu vollständiger Ausführlichkeit:

> "Als Physiker kann ich Zahlen zur Größe der Herausforderung nennen: Ab 2 Grad wären die Folgen weitgehend unbeherrschbar, da ist sich die Wissenschaft einig. Wenn 9 Milliarden Menschen 2050 die 2 Grad nicht überschreiten sollen, dann können wir ausrechnen <!!>, wieviel Kohlenstoffkredit die Erde dann noch hat: Jeder Mensch darf dann p.a. noch 2t CO_2 verbrauchen, wenn wir das Klimaschutzziel überhaupt ernst nehmen. Das erreicht er allein durch „normales" Autofahren. … Ich kann ihnen *noch* eine Zahl nennen: Bis 2015 muss der Scheitelpunkt erreicht sein, sonst müssten wir jedes Jahr noch weitere 9% vom „CO_2 - Kredit" abrüsten. Als Physiker kann ich sagen, dass meine Zahlen auf Analysen beruhen, die valide sind, die gültig sind".

Das Symbol <!!> habe ich eingefügt, weil hier der Bezug zum Modelltyp 2), dem als *'realitätsnah'* eingeschätzte Modelltyp, erfolgt. - Mehrfach haben wir aber behauptet, dass das 'Klimaziel-Modell' die Realität des Klimasystems extrem vereinfacht. Nun können wir im Bild des *'idealen'* n-dimensionalen Gleichungs-Systems (→ Seite 241)

$$dx_i/dt = f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \textit{mit}\ \ i = 1 \text{ bis } n,$$

die 'quantitative' Frage beantworten, '*wie*' klein n bei dieser Vereinfachung geworden ist. Wird sogar die niedrigste Stufe $n=1$ realisiert, also die Gleichung $dx/dt=f(x)$, die ja sogar den Status der Komplexität als Verknüpfung von Nichtlinearität und Vernetzung verloren hat? Zunächst hat man vielleicht den Eindruck, dass immerhin das zweidimensionale Modell

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2)$$
$$dx_2/dt = f_2(x_1, x_2)$$

in Anspruch genommen wurde, wobei x_1 die Klimatemperatur T wäre und x_2 der CO_2-Gehalt, den wir mit dem Symbol C kennzeichen wollen:

$$dT/dt = f_T(T, C)$$
$$dC/dt = f_C(T, C)$$

Das wäre die größtmögliche Vereinfachung unter *Bewahrung* der Komplexität, und sie enthält ja genau die beiden Variablen, welche den Gegenstand der Klimaziel-Debatte bilden. AGW-Vertreter betonen aber, man berechne gar keine Klima-***Prognosen***, sondern Klima-***Projektionen***. Damit ist gemeint, dass man die zweite Gleichung $dC/dt=f_C(T,C)$ des Systems *gar nicht* verwendet, den Freiheitsgrad C also nicht mehr aus der dafür zuständigen zweiten Differentialgleichung ermittelt, sondern 'von außen' als Szenarien vorgibt. Die so modifizierte Restgleichung lautet also

$dT/dt = f_T(C)$ *unter Vorgabe des Zeitverlaufes von* C

Anfangsbedingungen darf man, muss man sogar vorgeben, aber wenn man ganze Zeit-*Verläufe* von C (und in 'realitätsnäheren' Modellen auch Zeitverläufe von *anderen* Freiheitsgraden) vorgibt, statt sie aus Anfangsbedingungen heraus in nichtlinearer Vernetzung zu berechnen, dann sollte man mindestens dazu sagen, dass die Ergebnisse *nicht* "valide und gültig" sind. Aus dem n-dimensionalen ist ein 1-dimensionales System geworden! Von Vernetzung zwischen verschiedenen Freiheitsgraden ist nicht mehr die Rede. Wir haben sozusagen eine Differentialgleichung ohne Freiheitsgrade hingeschrieben! Das ähnelt eher einer Parametrisierungsformel *selbst* als einer Differentialgleichung unter *Verwendung* einer Parametrisierung: Man könnte die Berechnung fast genauso 'gut' mit einer algebraischen Gleichung durchführen, die die Temperatur starr an den vorgegebenen C-Verlauf ankoppelt, sie also algebraisch 'versklavt'. Die Verbannung des Freiheitsgrades T aus der Einflussfunktuin f_C bedeutet, dass selbst die fünf Beispiele für stabilisierende bzw. labilisierende Rückkopplungsschleifen verlorengegangen sind, die wir - wenigen Seiten zuvor - den 'einfachen' eindimensionalen Modellen zur Parametrisierung angeboten hatten!

Allerdings verwendet man meist *mehrere unterschiedliche* Vorgaben von Zeitverläufen des CO_2-Gehaltes, ein sogenanntes ***Ensemble,*** d.h. man wiederholt die Temperatur-Prognose mit jeweils anderen CO_2-Vorgaben und bildet danach den Ensemble-

Mittelwert. Das Ergebnis nennt man dann nicht mehr ***Prognose***, sondern ***Projektion***. Das kann man sowohl mit dem dem *'Klimaziel-Modell'* durchführen, als auch mit dem sogenannten *'realitätsnahen'* Modell, aus dem man vorher den Freiheitsgrad CO_2 entfernt hat. (Ein Freiheitsgrad kann ja nicht gleichzeitig vorgegeben *und* berechnet werden). Übrigens wäre der Übergang von der Prognose zur Projektion im Falle eines *'realitätsnahen'* Modells gar nicht nötig, wenn dieses *tatsächlich* realitätsnah wäre, wenn also im Vergleich zum hypothetischen *vollständigen* Modell kaum noch Raum für Eingliederungen weiterer Freiheitsgrade bliebe.

Bei dem Übergang von der Prognose zur Projektion hofft man, dass die Prognose-ergebnisse innerhalb des Ensembles nur wenig streuen, sich also ähneln, so dass die Projektion in die Zukunft nur wenig von der Genauigkeit der 'schwierigen' CO_2-Vorgabe abhängt. Man müsste dann gar keine 'besonders realistischen' Zeitverläufe vorgeben, und man hätte dann auch gleich einen Hinweis auf die Verlässlichkeit der Projektion mit eingebaut. Allgemeiner gesagt: Selbst bei größerer Streuung der Ensemble-Rechenergebnisse hätte man nicht nur das Klima vorhergesagt, sondern auch die *Güte* dieser Vorhersage, die natürlich (*im Falle* einer größeren Streuung) geringer ausfallen würde. Aber dann hätte man immerhin einen notwendigen Hinweis auf notwendige Verbesserungen der Modelle bekommen.

Das Ganze hat durchaus den Anschein eines genialen Gedankens. Doch leider vergisst man dabei, dass Eingliederungen bisher *nicht* berücksichtigter Freiheitsgrade - also das Fortschreitung in Richtung Realität - die zeitliche Entwicklung der *bisher* berücksichtigten Freiheitsgrade *verändern* würde. Das ist nun einmal das Wesen der Vernetzung zwischen Freiheitsgraden! Und dabei würde sich sowohl der Ensemble-Mittelwert als auch die Streuung der Rechenergebnisse der Ensemblemitglieder verändern! Und welchen Sinn hätten die Ensemble-Mittelwerte, wenn einige Mitglieder dieses Ensembles auf unterschiedliche Attraktoren im Phasenraum zustreben? (Das war ein kleiner Vorgriff auf Kapitel 5). Also waren die Projektionen wohl doch nicht unbedingt "valide" und "gültig".

Paradoxerweise ist die Abschaffung des CO_2-Freiheitsgrades 'zur Hälfte' gut begründet, da man den *anthropogen erzeugten Anteil* des CO_2 sowieso kaum berechnen kann. Dazu müsste man ein Modell der Menschen machen, ein Modell eines lebendigen Gesellschafts- und Wirtschaftssystems, und das ist *noch* schwieriger als ein korrektes *rein atmosphärisches* Modell zu entwerfen. Aber *prinzipiell* gehörte selbstverständlich eine mit der Atmosphäre wechselwirkende ***Biosphäre*** - bzw. ihr Untersystem ***Anthroposhäre*** - zu einem vollständigen bzw. zu einem *wirklich* realitätsnahen Klimamodell hinzu.

Betrachten wir den Weg zu mehr Realität einmal unter einem etwas anderen Blickwinkel. Betrachten wir z.B. den Weg vom zweidimensionalen Modell für die Freiheitsgrade T und C nach 'oben'. Dabei machen wir erst einmal einen Zwischenstopp bei einem vierdimensionalen Modell. Die zusätzlichen Freiheitsgrade mögen Wasserdampf sein (Symbol D) und die Albedo (Symbol A). Dann 'mausert' sich das Gleichungs-System

$$dT/dt = f_T(T, C)$$
$$dC/dt = f_C(T, C)$$

zum Gleichungs-System

$$dT/dt = f_T(T, C, D, A)$$
$$dC/dt = f_C(T, C, D, A)$$
$$dD/dt = f_D(T, C, D, A)$$
$$dA/dt = f_A(T, C, D, A)$$

Die Vernetzungen im zweidimensionalen Gleichungs-System umfassen vier Möglichkeiten einer Einwirkung eines Freiheitsgrades auf sich selbst oder andere: $T \rightarrow T$, $C \rightarrow T$, (erste Gleichung) sowie $T \rightarrow C$, $C \rightarrow C$ (zweite Gleichung). Im vierdimensionalen Modell sind es schon die 16 Einwirkungen $T \rightarrow T$, $C \rightarrow T$, $D \rightarrow T$, $A \rightarrow T$; $T \rightarrow C$, $C \rightarrow C$, $D \rightarrow C$, $A \rightarrow C$; $T \rightarrow D$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow D$, $A \rightarrow D$ und $T \rightarrow A$, $C \rightarrow A$, $D \rightarrow A$, $A \rightarrow A$. Da wir hier vier Gleichungen für die vier Freiheitsgrade betrachten, und da jede dieser Gleichungen vier Einflussgrößen auf den *jeweiligen* Freiheitsgrad aufzählt, ist es kein 'Wunder', dass bei der gesamten Vernetzung 16 = 4 mal 4 kausale Beeinflussungen im Spiel sind.

Und wieviele Wechselwirkungen werden in der Vernetzung eines 6-dimensionalen Modells berücksichtigt? Man muss sie gar nicht nach dem Muster $T \rightarrow T$, $C \rightarrow T$, $D \rightarrow T$, ... abzählen, denn wir haben ja soeben das Gesetz 'entdeckt', dass die Anzahl der in einem n-dimensionalen Differentialgleichungs-System zu beschreibenden kausalen Abhängigkeiten n^2 ist, hier also 36.

Der Vernetzungsgrad steigt quadratisch mit der Dimensionszahl des Gleichungs-System an!

Betrachtet man 100 Freiheitsgrade, so hat man es schon mit zehntausend Wechselwirkung zu tun, und bei 1000 Freiheitsgraden mit einer Million. Wenn wir uns daran erinnern, dass wir nicht nur Einzel-Freiheitsgrade berechnen müssen, sondern auch Feldfreiheitsgrade, von denen jeder so viele Einzel-Freiheitsgrade umfasst wie das verwendete Gitter Kreuzungspunkte hat, ist uns schnell klar, dass 1000 Freiheitsgrade nicht gerade berauschend viel sind.

Z.B. enthält schon ein *einziger* Feldfreiheitsgrad auf einem '32 mal 32' Gitter 1032 Einzel-Freiheitsgrade. Oder nehmen wir das für globale Modelle naheliegende geographische Gitter aus je 180 Längen- und Breitenkreisen, so entspricht *ein* Feldfreiheitsgrad schon 180 mal 180 = 32400 Einzel-Freiheitsgraden mit 32400^2 = mehr als eine Milliarde interner Wechselwirkungen. Und die einzelnen Breitenkreise haben dabei noch immer den Abstand von etwa 111 Kilometern, was einigermaßen dem untersten Eintrag der Luftpäckchen-Größentabelle von Seite 62 entspricht, dem Luftpäckchen der Größe 100 mal 100 mal 1 km. Wenn wir 30 solcher Netze übereinander legen, haben wir die Atmosphäre bis zu 30 km Höhe erfasst, . Angenommen, wir benötigten für das ideale *vollständige Modell* etwa 30 Feldfreiheitsgrade, dann bekommen wir es mit 32400 mal 30 mal 30 = 29169999, also fast 30 Millionen Einzel-Freiheitsgraden zu tun, und noch immer ist jeder dieser Freiheitsgrade in Raumgebieten der Größe 100 mal 100 mal 1 km mit nur einer einzigen Wertangabe vertreten! Von einer Modellierung etwa der kleinräumigen Turbulenzbewegung oder gar des klimatisch hoch relevanten Tropfenwachstums sind wir noch immer 'Lichtjahre' entfernt. So allmählich kommt es uns nicht mehr unplausibel vor, dass die Autoren von [LMTW97] die Anzahl der atmosphärischen Freiheitsgrade auf 'bis zu' 10^{19} = 10 Trillionen geschätzt haben. Wenn hier jeder Freiheitsgrad mit jedem vernetzt ist, sind das 10^{38} = 100 Sextillionen direkte Vernetzungen.

Um Missverständnissen vorzubeugen, wiederhole und betone ich noch einmal, dass bei Weitem *nicht alle* in einem Differentialgleichungs-System beschriebenen Wechselwirkungen die gleiche Relevanz haben. Sehr, sehr viele der hier diskutierten 10^{38} Wechselwirkungen werden so schwach sein, dass sie so gut wie sicher vernachlässigt werden dürfen,

> *aber gleich alle Freiheitsgrade (bis auf einen einzigen) <u>komplett</u> zu vernachlässigen, ist wohl kaum weniger abenteuerlich wie allen die gleiche Relevanz zuzuordnen!*

In der alltäglichen Klimadiskussion stützt man sich dennoch auf die 'Klimaziel-Modell-vorstellung' mit einem einzigen, *unvernetzten* Freiheitsgrad, dem anthropogenen Anteil des globalen CO_2-Gehaltes. Und wie wir - insbesondere auf Seite 269 - gesehen haben, gestatten es dieser eine Freiheitsgrad angeblich, eine globale Erwärmung hochdetailliert vorherzusagen.

Es vergeht auch kein Tag, an dem in Nachrichten oder sonstigen Dokumentationen von Presse, Funk oder Fernsehen *nicht* über die Klimafreundlichkeit oder Klimaschädlichkeit dieser oder jener Maßnahme die Rede ist, egal, ob es Maßnahmen zur

Energieversorgung sind, des Verkehrs, der Landwirtschaft usw. Dabei soll stets CO_2 mit einer derartigen Selbstverständlichkeit das alleinige Kriterium für die Klimaentwicklung sein, dass man es noch nicht einmal *erwähnt!* Auf Welklima-Konferenzen mit tausenden von Teilnehmern aus über hundert Ländern ist es nicht anders. Sogar die Verhaltensweisen im Privatleben - etwa ob Duschen oder Baden mehr CO_2 produziert, werden nur noch unter dieser Prämisse der alleinigen Klimarelevanz von CO_2 diskutiert. So kann man z.B. einen persönlichen CO_2-Rechner erwerben, als Bestandteil eines Buches, [Füss08], welches den Titel trägt 'Bin ich eine Klimasau?'.

Da wir gerade Argumente für eine Nicht-Vorhersagbarkeit des Klimas sammeln, die sich schon beim jetzigen Kenntnisstand als stichhaltig aufdrängen, darf das Problem des notwendigen mehrfachen Wechsels von feinkörniger zu grobkörniger Beschreibung nicht fehlen. Wir beschränken uns auf die drei Mittelungs-Schritte auf der vierstufigen ***Körnungsleiter*** von Seite 26, die schon ihrerseits eine gewaltige modellhafte Vereinfachung der tatsächlichen atmosphärischen Gegebenheiten darstellt:

Schritt 1: Molekulare Beschreibung ⟶ Hydro-Thermodynamik
Schritt 2: Hydro-Thermodynamik ⟶ Physik des Wetters
Schritt 3: Physik des Wetters ⟶ Physik des Klimas

(→ auch Seite 73) Grundsätzlich gibt es *zwei* mögliche Strategien zur Verrichtung dieser drei Schritte (oder auch der Schritte in komplexeren realitätsnäheren Körnungsleitern, → Seite 30):

1) Man verwendet die ursprünglichen feinkörnigen Gleichungen und mittelt erst *nach* der Berechnung der feinkörnigen Lösungen.
2) Man versucht eine für die höhere, grobkörnigere Größenskala gültige Gleichung zu finden und setzt dort den zu berechnenden grobkörnigen Freiheitsgrade sowie die Argumente der grobkörnigen Einflussfunktion direkt ein.

Die Methode 1) ist sozusagen die 'Notlösung', die man verwenden *muss*, wenn man eine für die Methode 2) notwendige effektive Gleichung für die jeweilige Grobskala nicht kennt. Wie schwierig bis unmöglich diese 'Methode 1)' für die Schritte 1 und 2 auf der Körnungsleiter wären, geht aus unserer Tabelle von Seite 62 über die Größe der jeweils zu berechnenden Luftpäckchen und ihre Anzahl hervor: der dort beschriebene immense Rechenaufwand ist nicht zu bewältigen!

Für den Schritt 1 ist eine 'Notlösung' nicht nötig, weil die effektiven grobkörnigen Gleichungen schon in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts hergeleitet wurden. Eine Reihe günstiger Umstände hat die Vermeidung der 'Notlösung' in Schritt 1 möglich gemacht, wie die 'reine' Zufälligkeit der molekularen Bewegungen im feinkörnigen System, die große Energielücke zur hydro-thermodynamischen Skala, was der Erfüllung des Reynolds'schen Postulates entspricht, ein stabiles lokales thermodynamisches Gleichgewicht und die Forschungsarbeit der Giganten Boltzmann, Lagrange, Euler und anderen. Die ausfühliche Beschreibung des Schrittes 1 war das Hauptthema von Kapitel 2.2. In keinem anderen Schritt auf der Körnungsleiter, auch nicht auf den auf Seite 30 angedeuteten komplexeren, realitätsnäheren Körnungsleitern ist die Methode 2) so valide wie hier.

Kommen wir nun zu Schritt 2, dem hauptsächlich das Kapitel 2.5 gewidmet ist. Versuchen wir, aus den vielen dort (und auch anderswo) beschriebenen Details das Wesentliche herauszuziehen, was der Beantwortung unserer gegenwärtigen Frage dienlich ist, also der Frage, wie man den Schritt von kleineren zu größeren Skalen optimieren kann, hier also den Schritt von der hydro-thermodynamischen Feinkörnigkeit zur Grobkörnigkeit des Wetters: Sollte man zuerst die validen Gleichungen der Hydro-Thermodynamik lösen, die uns in Schritt 1 zuteil geworden sind, und *dann erst* die fällige Mittelung der *prognostizierten* feinkörnigen Felder auf der Skala des Wetters durchführen? Oder sollte man die Strategie 2) anwenden, also Gleichungen verwenden, die *von vornherein* für die Wetterskala gelten?

Natürlich erlauben die großräumigeren Felder der Wetterskala, für die Rechnungen auch Gitter mit größeren Maschenweiten zu verwenden als in Berechnungen der kleinskaligen hydro-thermodynamischen Felder erlaubt sind. Somit spricht für die Strategie 2), dass ein großräumiger Feld-Freiheitsgrad in sehr viel weniger einzeln zu berechnende Einzelfreiheitsgrade zerfällt als ein hydro-thermodynamisches Feld. Aus Kapitel 2.5 und von früher (→Seite 28) wissen wir außerdem, dass bei der *zeitlichen* Diskretisierung bei großen Gitterabständen auch größere *Zeit*-Intervalle erlaubt sind als bei kleinen Gitterabständen. M.a.W., die Strategie 2) erfordert nicht nur weniger Einzel-Freiheitsgrade pro Feld-Freiheitsgrad, sondern man macht auch bei jeder - nun wenigeren - Rechnungen in der Prognose einen wesentlich größeren Zeitschritt in die Zukunft, was ja die Anzahl aller erforderlichen Rechnungen noch einmal reduziert. Wann also könnte überhaupt noch etwas für die Strategie 1) sprechen? Eigentlich nur dann, wenn die für die Methode 2) erforderliche Gleichung unvermeidliche Approximationen enthält (so ist es im Schritt 2 der Körnungsleiter), oder wenn man sie gar nicht kennt (so ist es im Schritt 3).

Aber *warum* kennt man eine grobskalige Gleichung nicht genau oder gar nicht? Im Schritt 1 kennt man sie ja schließlich doch! Sonst gäbe es keine valide Hydrodynamik und Thermodynamik. Warum unterscheiden sich *überhaupt* gemittelte Gleichungen von den ungemittelten? Wenn z.B. $dT/dt = f_T(T, x_1, x_2, x_3, \dots)$ eine Differentialgleichung für ein feinkörniges System ist, wieso kann man nicht einfach die Mittelwerte der Freiheitsgrade $T, x_1, x_2, x_3, \dots$ in diese Gleichung einsetzen? Warum *muss* die grobkörnige Gleichung mit Beziehungen zwischen den grobkörnigen Freiheitsgraden anders aussehen? Zugegeben, auch die erfolgreichen hydro-thermodynamischen Gleichungen sind nicht identisch mit den direkten Mittelwerten über die Bewegungsgleichungen der molekularen Bewegungen (→Kap. 2.3). Aber *warum* ist das so?

Die in Kapitel 2.3 und 2.4 gegebene Antwort lautete: Weil die Gleichungen nichtlinear sind, und weil sich Mittelwerte über nichtlineare Produkt von Produkten der Mittelwerte *unterscheiden*! Auf Seite 94 haben wir explizit ausgerechnet, dass der *Mittelwert* über ein solches nichtlineares Produkt von Freiheitsgraden *nicht das gleiche ist* wie ein Produkt von Mittelwerten dieser Freiheitsgrade! Vielmehr muss das letztere durch Zusatzterme ergänzt werden! Wenn wir Mittelungen durch 'Querstriche' kennzeichnen, dann ergaben unsere Rechnungen die Ungleichung $\overline{x\,y} \neq \bar{x}\,\bar{y}$. Die Zusatztermen der rechten Seite, die aus der Ungleichung eine Gleichung machen, hatten wir dort errechnet zu

Reynolds-Term	$R = \overline{x'y'}$	(auch ***Korrelation*** genannt)
Kreuzterm	$K = \overline{\bar{x}y'} + \overline{x'\bar{y}}$	
Leonard-Term	$L = \overline{\bar{x}\,\bar{y}} - \bar{x}\,\bar{y}$	

Die Beziehungen zwischen dem Mittelwert $\overline{x\,y}$ eines Produktes und dem Produkt $\bar{x}\,\bar{y}$ der Mittelwerte lauteten

$\overline{x\,y} = \bar{x}\,\bar{y} + R$ falls eine Energielücke existiert (→ Seite 46)

$\overline{x\,y} = \bar{x}\,\bar{y} + R + K + L$ falls eine Energielücke *nicht* existiert

Wenn aber in einer Gleichung bei ihrer Mittelung solche Zusatzterme auftreten, hat sich *selbstredend* die Gleichung für die Mittelwerte gegenüber der Gleichung für ungemittelte Freiheitsgrade verändert, wie behauptet. Und diese Mittelung *muss* ja zum Zwecke der Gewinnung einer Gleichung für die Klimatemperatur durchgeführt werden! Das 'Schlimmste' dabei ist, dass die hinzugekommenen Terme neue unbekannte Variablen sind, so dass die Zahl der Gleichungen im Gleichungssystem nun kleiner ist als die Zahl der nun größer gewordenen Unbekannten. Damit haben wir ein unterbestimmtes Gleichungssystem rerhalten, das nicht mehr lösbar ist (→ Seite 113). Wenn das Reynolds'sche Postulat (→ Seite 90) gültig ist, (was ja gleichbedeutend ist mit der Existenz einer Energielücke zwischen der Größenskala der ungemittelten und der gemittelten Variablen), beschränken sich die unbekannten Zusatzterme auf Reynols-Terme - auf Korrelationen - für die man neue Differentialgleichungen herleiten kann. Allerdings 'nützt' dieses meistens auch nichts, weil eine solche weitere Gleichung ihrerseits auch wieder neue Unbekannte Variablen ins Spiel bringt. Das ist das sogenannte Schließungsproblem (→ Seite 114), welches für die Schritte 2 und 3 unserer - sowieso schon stark vereinfachrten Körnungsleiter - bis heute noch nicht gelöst ist. Wenn aber das Reynolds'sche Postulat *nicht* gültig ist, was in den Schritten 2 und 3 der Fall ist, dann kommen *zusätzlich* noch die Terme K und L hinzu, die wir auf Seite 94 näher besprochen hatten.

Dass im Schritt 1 nicht nur K und L verschwinden, (wegen der Energielücke zwischen Molekularbewegung und hydrodynamischer kleinräumiger Turbulenz), sondern auch noch R 'beherrschbar' geworden ist, hängt damit zusammen, das die Zufälligkeit des stochastischen Chaos der molekularen Bewegungen dem Würfel-Zufall nicht unähnlich ist: wenn x' und y' in $R = \overline{x'y'}$ die Abweichungen (Schwankungen) von Würfelergebnissen vom Mittelwert 3,5 bedeuten, ist R tatsächlich Null, wie wir auf Seite 96 veranschaulicht haben.

Solange das Turbulenzproblem nicht gelöst ist, (und das kann dauern, denn ein Gleichungssystem aus buchstäblich unendlich vielen Gleichungeen mit unendlich vielen Unbekannten stellt sich einer praktikablen Lösung entgegen), ist die Parametrisierung nicht nur eine einfachere *Alternative* für eine Differentialgleichung, sondern sie ist absolut *nötig*. R, K und L *müssen* also parametrisiert werden. Mit R versucht man es wenigstens, wenn auch nur im Schritt 2. Von Parametrisierungsversuchen der Terme K und L habe ich noch nie etwas gehört.

Überhaupt wird das ebenso wichtige wie problematische Thema 'Parametrisierung', dem wir hier schon viel Raum gewidmet haben, in Veröffentlichungen der AGW-Vertreter äußerst stiefmütterlich behandelt. Eine optimistische Einschätzung der Klima-Vorhersagbarkeit wird - immerhin folgerichtig - meist mit einer totalen Vermeidung des Themas Parametrisierung kombiniert, und bei den seltenen Erwähnungen äußerst zurückhaltend, geradezu 'verschämt' behandelt. Eine gewisse Ausnahme bildet [KF05], mit den Zeilen von Seite 61 unten: "Man nennt die Berücksichtigung eines Prozesses ohne explizite Simulation desselben Parametrisierung. Wolken- und Niederschlagsbildung sind eher kleinräumige Prozesse. die typischerweise parametrisiert werden müssen. Dadurch wird ein wesentlicher Unsicherheitsfaktor in die Modelle eingebracht, denn Wolken sind klimatisch relevant, ...". Aber ganau eine Seite später heißt es wieder, ohne nähere Begründung: "Trotz aller Unsicherheiten sind die heutigen GCMs <steht für global circulation models> recht gut in der Lage, das derzeitige Klima der Erde zu reproduzieren". Das es einfacher ist, aus der Vergangenheit die Gegenwart zu berechnen als aus der Gegenwart die Zukunft (→ Seite 112 oder auch [Knu-in], Seite 28), wird nicht thematisiert.

Noch zurückhaltender wird die Parametrisierung in [PB13] kommentiert. Auf der dortigen Seite 26 kann man lesen: "Die verwendeten Approximationen (das Maß der Näherungen an die tatsächliche Auflösung) und die Parametrisierungen (vorgegebene Abschätzungen kleinteiliger Effekte) sind anders, da sie ... Wolken bis hin zu kleinen Konvektionen direkt berechnen können. In vielen globalen Klimamodellen sind kleinere Wolken hingegen nur parametrisiert vorhanden." (Dass man in Wettermodellen für die Wolkenphysik keine Parametrisierung benötigte, stimmt so nicht: Die dazugehörige Tröpfchenphysik, → Seite 264, *muss* parametrisiert werden!) Das ist *alles*, was [PB13] zu Erklärung und zum Hintertgrundwissen des Parametrisierungs-Konzeptes bereithalten.

Andererseits heißt es auf Seite 33 von [PB13]: "Ist Ihnen schon einmal aufgefallen, das man die Argumente der Skeptiker immer sofort und ohne größere fachliche Anstrengung - und unabhängig vom eigenen Hintergrundwissen dieser komplizierten Dynamik - versteht?" Nun weiß ich zwar nicht, welches Hintergrundwissen eine komplizierte Dynamik haben kann - oder ist hier ein Hintergrundwissen *über* die komplizierte Dynamik gemeint, vielleicht sogar über die komplexe Dynamik, was ja nicht das gleiche ist? Egal, ich persönlich - von [PB13] sicherlich als Skeptiker eingestuft - kann mich jedenfalls darüber freuen, dass Sie, liebe Leserin, lieber Leser, meine vielen Ausführungen zum Thema 'Parametrisierung' ohne größere fachliche Anstrengung verstehen konnten, auch dann, wenn Sie als Laie kein eigenes Hintergrundwissen mitbringen konnten!

Nach all dem werden Sie, liebe Leserin, lieber Leser, vermutlich sagen, dass sich die Strategie1), also die 'Notlösung' der beiden auf Seite 274 vorgestellten Methoden für Schritte auf der Körnungsleiter (also für effektive ***Skalensprünge***) kaum noch vermeiden lässt, wenn es sich um die Schritte 2 und 3 der dort ebenfalls angegebenen Körnungleiter handelt. - Ja, sie haben Recht, aber sie haben für den Schritt 2 etwas 'weniger Recht' als für den Schritt 3. Beim Schritt 2 geht es ja um die Möglichkeit, effektiver Wetterprognosen zu produzieren. Ob das Postulat 'Gültigkeit des Reynolds'schen Postulates' hier eben *doch* einigermaßen gut erfüllt ist, hängt vom jeweiligen atmosphärischen Zustand ab (was mitentscheidend dafür ist, dass eine Wetterprognose mal besser und mal schlechter ist, aber niemals für mehr als etwa 10-15 Tage möglich ist). Beim Schritt 3 jedoch ist das Reynolds'sche Postulat - auf der Klimaskala von 'einigen Jahrzehnten' - ganz und gar nicht erfüllt, wie z.B. [Hau04] eindrucksvoll gezeigt hat, → auch [HLS99].

Wir müssen noch einem möglichen Missverständnis vorbeugen. Man könnte nach der bisherigen Darstellung denken, Differentialgleichungen enthalten nur zeitliche Ableitungen, wie sie auf den linken Seiten aller Systemgleichungen auftreten. Dieser Eindruck wäre falsch, auch räumliche Ableitungen können eine Rolle spielen, die sogar komplizierter sind als zeitliche Ableitungen, weil man ja die Feldfunktionen räumlich in *drei verschiedene* Richtungen ableiten kann. Diese drei Ableitungen kann man aber zu einem ***Vektoroperator*** zusammenfassen (den man ***Nabla*** nennt), ebenso wie man die Komponenten Westwind, Südwind und Vertikalwind zu einem ***Windvektor*** zusammenfassen kann.

Aber das alles ist wohl 'zu viel auf einmal'. Wenn Sie, liebe Leserin, lieber Leser, im vorigen Absatz nur 'Bahnhof' verstanden haben, machen Sie sich bitte nichts daraus. Wir kommen später darauf zurück, dann werden wir aber mehr Hintergrundwissen haben, und Sie werden alles verstehen, versprochen! Außerdem wollte ich eigentlich mein Hauptargument für die Nichtvorhersagbarkeit des Klimasystems - nämlich die Phasenraum-Interpretation der atmosphärischen Dynamik - nicht so 'nebenbei' einführen. Merken Sie sich vielleicht vorerst einfach nur die folgenden 4 Punkte. Aber auch diese sind für das Kommende nur fakultativ, nicht obligatorisch:

1) Jeder Vektor, also auch jede vektorielle Funktion, jeder vektorielle Freiheitsgrad usw. kann im dreidimensionalen Raum auch durch drei Größenangaben dargestellt werden, durch die sogenannten ***Komponenten*** des Vektors. Bei Verwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind das die Projektionen des Vektors auf die drei Koordinatenachsen. Die Komponenten Westwind, Südwind und Vertikalwind des ***Windvektors*** waren Beispiele hierfür.

2) Differentialgleichungen enthalten nicht nur die zeitlichen Ableitungen von Freiheitsgraden, bzw. der Komponenten von vektoriellen Freiheitsgraden - auf den linken Seiten der Systemgleichungen - sondern auch räumliche Ableitungen, welche beschreiben, wie sich die Feld-Freiheitsgrade nach Osten, nach Norden oder nach oben verändern. Diese sind in die Einflussfunktionen auf den rechten Seiten der Gleichungen 'eingebaut'.

3) Die Gesamtheit der Freiheitsgrade eines Gleichungssystems können als Dimensionen eines abstrakten, i.A. hochdimensionalen Phasenraumes aufgefasst werden, (auch ***Zustandsraum*** genannt), also eines Raumes, an dessen Koordinatenachsen nicht die rechts-links-Erstreckung oder die vorn-hinten-Erstreckung oder die oben-unten-Erstreckung z.B. eines Kältegebietes abzulesen sind, sondern die Werte der Temperatur selbst, oder der Feuchtigkeit, des Kohlendioxid-Gehalte, der Windge-

schwindigkeit, usw., eben alle Werte an allen Raumpunkten der in dem jeweiligen Modell berücksichtigten Freiheitsgrade.

All diese Informationen zusammengenommen definieren den ***Zustand*** der Atmosphäre in diesem Zeitpunkt. Natürlich muss der Phasenraum dann sehr viele Koordinatenachsen haben, es muss - wie gesagt - ein sehr hochdimensionaler Raum sein. Er hat dermaßen viele Koordinatenachsen, dass alle den Zustand der gesamten Atmosphäre definierenden Freiheitsgrade als Projektionen buchstäblich eines einzigen Punktes in diesem Phasenraum darstellbar sind. Dieser Punkt heißt daher auch ***Zustandpunkt***.

4) Eine zeitliche Änderung des ganzen Systems kann man daher als Bewegung dieses einzigen Punktes im Zustandsraum - des ***Zustandspunktes*** - deuten. Bei dieser Punktbewegung verändert sich ja die Projektionen auf die Achse, die für den jeweiligen Freiheitsgrad zuständig ist, und zwar gerade so, wie das von dem Differentialgleichungs-System von Seite 241 vorhergesagt wird. Letztendlich entspricht die von diesem Gleichungssystem geleistete Prognose der Berechnung einer einzigen ***Zustands-Trajektorie*** im Phasenraum.

5) Die nach unserer Definition zur Komplexität gehörende Vernetzung drückt sich im Phasenraum dadurch aus, dass die zeitlichen Veränderungen der Projektionen auf einer der vielen Achsen des hochdimensionalen Phasenraumes nicht unabhängig sind von den Projektionen des Zustandspunktes auf allen anderen Achsen. Und die Nichtlinearität bedeutet, dass nicht alle dieser Abhängigkeiten linearer Natur sein dürfen.

Nachdem wir unsere Definition der Komplexität oft verwendet haben, und nun auch noch einen ersten Hinweis auf ihre Auswirkung auf die Systemveränderungen im Bilde der Projektionen auf die Achsen des Phasenraumes bekommen haben, sollten wir auch einige alternative Definitionen der Komplexität kennenlernen. Es ist gar nicht einfach, in der Literatur übereinstimmende Definitionen zu finden. Es gibt z.B. auch informationstheoretische Definitionen, die auf die Thematik dieses Buches kaum zugeschnitten sind. Bei der Suche nach der 'besten' Definition dachte ich an unseren im ersten Kapitel vorgestellten Laien, der in seiner Begriffs-Konfusion sinngemäß fragte: »muss man die ohne erkennbares Prinzip verwendeten Begriffe komplexe, komplizierte, vernetzte, nichtlineare oder chaotische Atmosphäre wirklich auseinanderhalten, oder bedeuten sie alle das Gleiche?«

Ich konnte keine Definition finden, die neben der Erklärung von 'komplex' auch eine hinreichende Abgrenzung oder Einbeziehung der anderen Eigenschaften enthielt, die in der obigen Laienfrage enthalten sind (→ Kapitel 1). Daher habe ich die schon bekannte eigene Definition gewählt, die den Laien vielleicht etwas entgegenkommt, indem sie schon drei der fünf nachgefragten Begriffe zur Sprache bringt, und die selbstverständlich kompatibel zu den sonstigen Definitionen in der Literatur ist. Hier noch einmal zur Wiederholung:

- *Ein dynamisches System ist genau dann **komplex**, wenn seine Freiheitsgrade durch Wechselwirkungsprozesse miteinander **vernetzt** sind, und wenn diese Vernetzung im zuständigen Gleichungssystem durch mindestens eine **nichtlineare** Einflussfunktion beschrieben wird.*

Mindestens eine der Einflussfunktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ muss also nichtlinear sein, damit das dynamische System komplex ist. Denksportaufgabe: ist nach dieser Definition ein Modell, welches durch das Gleichungssystem

$$dx_1/dt = f_1(x_1), \quad dx_2/dt = f_2(x_2), \ \ldots, \quad dx_n/dt = f_n(x_n)$$

mit *ausschließlich* nichtlinearen Einflussfunktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ beschrieben wird, komplex oder nicht? Antwort: Diesem Gleichungssystem fehlt zur Komplexität die Voraussetzung der ***Vernetzungen*** zwischen den Freiheitsgraden $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Der Freiheitsgrad x_1 würde sich völlig unabhängig von den Freiheitsgraden $x_2 \ldots x_n$ entwickeln, x_2 unabhängig von $x_1, x_3 \ldots x_n$, usw. Mit der Definition, dass in komplexen Systemen sowohl Nichtlinearität *als auch* Vernetzung vorliegen muss, schließe ich mich nahezu wörtlich z.B. der Definition von P. Milling an [Mill81] an:

- *Die Komplexität eines Systems steigt mit der Anzahl an Variablen, der Anzahl an Verknüpfungen zwischen diesen Variablen sowie der Funktionalität dieser Verknüpfungen (zum Beispiel Nichtlinearität).*

Zwei Freiheitsgrade muss das System also mindestens haben, denn wenn es nur einen Freiheitsgrad hat, kann es ja nicht mit anderen vernetzt sein. Aber es gibt durchaus unterschiedliche Komplexitätsgrade: Je *mehr* nichtlinear vernetzte Freiheitsgrade das System hat, desto komplexer ist es. Und es gibt kaum ein anderes unbelebtes, physikalisches System, welches *mehr* nichtlinear vernetzte Freiheitsgrade hat als die Atmosphäre! - Unsere Definition deckt sich auch weitgehend mit der ganz anderen Definition von H. Härtl [Här08]:

- *Das Gesamtverhalten eines komplexen Systems kann … nicht beschrieben werden, selbst wenn man vollständige Informationen über seine Einzelkomponenten und ihre Wechselwirkungen besitzt.*

In der Tat werden auch wir bald erkennen, dass die *von uns* definierte Komplexität als Summen-Eigenschaft von Vernetzung und Nichtlinearität *tatsächlich* zur *Nichtvor-*

hersagbarkeit eines komplexen Systems (wie das Klimasystem) führt. Diese Nichtvorhersagbarkeit wird von Härtl '*Nichtbeschreibbarkeit'* genannt, und sie wird gewissermaßen in *Umkehrung* unserer Schlussweise als *definierende* Eigenschaft komplexer Systeme angesehen.

Um Missverständnissen vorzubeugen: Immer wenn ich von *Nichtvorhersagbarkeit* des Klimas rede, habe ich einen Zeitraum von einigen 10 oder 100 Jahren im Blick. Für Zeiträume von einigen 10000 Jahren *ist* das Klima vorhersagbar, und die warm-kalt-Einjahresrhythmen 'Sommer und Winter' sind es ja auch. Allerdings ist das Verhalten der Atmosphäre in diesen Zeitskalen auch nicht mehr komplex, weil hier der Einfluss von *vorhersagbaren* Erdbahnparametern tatsächlich ein dominierender Klimafaktor ist, gegen den die komplexe Vernetzung aller Klima-Freiheitsgrade machtlos ist. Wegen dieser ***Maskierung der Komplexität*** besteht auch kein Widerspruch zu Millings, Härtls oder unserer Definition.

Wenn aber in der öffentlichen Klimadiskussion von Seiten der AGW-Vertreter immer wieder behauptet wird, dass nur der Klimafaktor 'anthropogenes CO_2' ausschlaggebend für das 'Klimaziel' sei, dann behauptet man, dass der Freiheitsgrad CO_2 gegen die Wechselwirkung mit anderen atmosphärischen Freiheitsgraden wie Temperatur, Feuchtigkeit, Wolkenbildung, Luftverschmutzung usw. immun sei, in vergleichbarem Maße, wie die Geometrie der Erdumlaufbahn um die Sonne immun gegen die genannten Freiheitsgrad ist. Eine nicht wirklich überzeugende Annahme!

Eine weitere sehr interessante Definition von Komplexität geben K. Richter und J.M. Rost [RR02]. Sie diskutieren auch den Begriff ***komplizierte Systeme***, gehen aber über sonst übliche Charakterisierungen - etwa 'komplizierte Systeme kann man beschreiben und verstehen, wenn man sich genug Zeit dafür nimmt, komplexe Systeme aber selbst dann nicht' - weit hinaus:

- ***Kompliziert*** *ist ein System … , dessen geduldige Analyse … eine Zerlegung in Untereinheiten erlaubt, … . Mit Hilfe der übersichtlichen Teile wird ein Verständnis des Gesamtsystems möglich. … .*
  Für ***komplexe*** *Systeme ist diese Art der Unterteilung nicht möglich … : Gerade die Vernetzung vermeintlicher Einzelteile prägt wesentliche Eigenschaften des Gesamtsystems, die mit Hilfe der getrennten Teile entweder gar nicht erfasst werden oder gar nicht existieren. … . Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.*

Wenn man mit einem gewissen Hintergrundwissen ausgestattet ist und ganz genau hinschaut, sieht man, dass [RR02] den Unterschied zwischen komplizierten und komplexen Systemen auf den Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen Systemen zurückführen. Der Schritt von dem 'nur' komplizierten zum komplexen System wird ja von ihnen auf die verlorene *Zerlegbarkeit* eines komplizierten Systems zurückgeführt, und diese Zerlegbarkeit macht Anleihen bei - oder ist sogar identisch mit - dem sogenannten ***Superpositionsprinzip***, welches nur in der ***linearen Physik*** gültig ist. Somit entspricht unsere Definition der Komplexität auch derjenigen von [RR02].

Unsere Definition ist kürzer, sicherlich kann man mit ihr auch die Komplexität eines vorliegenden Gleichungssystems schneller überprüfen. Die Definition von [RR02] ist jedoch physikalisch hintergründiger. Die Autoren legen in ihre eher physikalisch ausgerichtete Komplexitätsdefinition die Nichtvorhersagbarkeit des entsprechenden Systems mit hinein, (ähnlich wie [Här08]). Wir hingegen, mit unserer eher mathematisch ausgerichteten Definition der Komplexität, müssen die daraus folgende physikalische Nichtvorhersagbarkeit erst nachweisen.

Das aber funktioniert sowohl im 'normalen' drei-dimensionalen Anschauungsraum, (was im aktuellen Kapitel 3 schon gelegentlich deutlich wurde, und was in Kapitel 4 fortgesetzt wird) als auch im Phasenraum (→ Kapitel 5). Nach meiner Überzeugung funktioniert es im zweiten Fall sogar noch 'überzeugender': Hier lässt die Darstellung der physikalischen Auswirkungen der Komplexität gar keinen Spielraum mehr für eine Rettung der Vorhersagbarkeit, und obendrein ist das systemtheoretische Argument den Laien auch plausibler zu vermitteln. Lassen Sie sich überraschen, liebe Leserin, lieber Leser, und wenn sie anderer Meinung sind, lassen Sie es mich bitte unter der in dieser Homepage vermerkten e-Mail-Adresse (met_lange@yahoo.de) wissen.

Für uns ist wichtig: Die Nichtvorhersagbarkeit eines komplexen Sytems folgt aus *all diesen* Definitionen von Komplexität. Leider wird Komplexität gelegentlich auch mit Vernetzung *oder* mit Nichtlinearität *allein* verwechselt. Der Grund dafür könnte sein, dass es einerseits vernetzte, aber lineare Systeme in der realen Natur kaum gibt - so dass vernetzte Systeme fast 'automatisch' auch nichtlinear sind - und dass andererseits nichtlineare aber *unvernetzte* dynamische Systeme ebenfalls nicht vorhersagbar sein *können*, denn es können - müssen aber nicht - ***deterministisch chaotische*** Systeme sein - obwohl sie ja im Sinne unserer Definition nicht komplex sind. Jedoch:

> *In eindimensionalen - also nicht vernetzten - deterministisch chaotischen Systemen hat die Nichtvorhersagbarkeit einen anderen Grund als den, den wir der Komplexität anlasten!*

Damit sind wir endlich bei der fünften Systemeigenschaft angekommen, die unser Laie auf Seite 12 in seiner Frage nach chaotischen Systemen angesprochen hat: Wenn ein nichtlineares, aber nur einen einzigen Freiheitsgrad umfassendes System nicht vorhersagbar ist, handelt es sich um ein ***deterministisch chaotisches*** System! Gerade mit diesen Systemen werden komplexe Systeme sehr oft verwechselt. (Im nächsten Unterabsatz 3.5 befassen wir ganz allgemein mit dem deterministischen Chaos).

Natürlich könnte man die Definition von Komplexität auch ein weiteres Mal verändern und dabei die 'Chaotizität' mit 'ins Boot' nehmen, oder die Härtl'sche Definition [Här] verwenden, die ja die Nichtvorhersagbarkeit und die Komplexität mehr oder weniger miteinander identifiziert. Mit einer solchen Definition wäre es allerdings kaum möglich, zu erklären, wieso manches System sowohl wegen Chaotizität *als auch* wegen Komplexität nach 'herkömmlicher' Definition nicht vorhersagbar ist. Ein chaotisches System *kann* zwar unvernetzt sein, *muss* es aber nicht.

Es gibt Systeme, die *beide* Eigenschaften haben, und ein atmosphärisches Modell ist vermutlich ein solches: Der Begründer der Theorie des deterministischen Chaos, E. Lorenz - ein Meteorologe - hat diese Chaosart im Rahmen einer numerischen Modellstudie zur atmosphärischen Konvektion entdeckt [Lo2]. Auch hier muss man wieder sagen: Der Nachweis dieser Chaosart gilt zunächst nur für das *Modell* der Konvektionsbewegung. Ob es auch für die Konvektionsbewegung selbst gilt, ist dadurch nicht bewiesen. Und dass das Klimasystem deterministisch-chaotisch ist, wird zwar stets behauptet, ist aber streng genommen auch nicht bewiesen. Daher ist mir 'wohler', wenn ich hier die Nicht-Vorhersagbarkeit des Klimas auf das altbekannte stochastische Chaos zurückführe.

Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

Die denkbar einfachsten dynamischen atmosphärischen Modelle haben nur einen Freiheitsgrad x, sie haben also die Form $dx/dt = f(x)$. Ihnen fehlt also die Vernetzung mit *anderen* Freiheitsgraden und damit nach unserer Definition von Seite 247 auch eine der beiden Eigenschaften der Komplexität. Die zweite Eigenschaft, die Nichtlinearität, geht der Gleichung $dx/dt = f(x)$ auch noch verloren, wenn die Einflussfunktion $f(x)$ linear ist, z.B. $f(x) = ax$ mit dem Proportionalitätsfaktor $a>0$. Dennoch ist diese super-einfache Modellgleichung

$$dx/dt = ax$$

sehr berühmt geworden, denn es ist die ***Gleichung des exponentiellen Wachstums***, hervorgerufen durch endlose und immer stärker werdende positive Rückkopplung, vor dem der Club of Rome in einem Buch mit Rekordauflage im Jahre 1973 gewarnt hat, [MMZM73]. Allerdings kann man mit einem negativen a, $a<0$, mit der gleichen Gleichung auch negatives Wachstum und exponentiellen Abstieg parametrisieren. Wenn man eine Modellgleichung $dx/dt = ax - bx$ postuliert, hat man vermeintlich exponentiellen An- und Abstieg simuliert, aber in der ausgeklammerten Form

$$dx/dt = (a-b)\, x$$

erkennt man, dass man doch nur An- *oder* Abstieg simuliert hat, je nachdem, welcher der beiden Parameter a und b größer ist. Diesen Nachteil vermeidet die logistische Gleichung, indem sie die negative Rückkopplung nichtlinear (quadratisch) formuliert:

$$dx/dt = ax - ax^2$$

Wir haben besprochen, dass ausgehend von x=0 zunächst ein exponentielles Wachstum erfolgt, welches aber zunehmand vom nichtlinearen Term begrenzt wird, so dass man sagen kann, die zunahmende Resourcen-Knappheit parametrisiert zu haben. Diese Sicht gab der logistschen Gleichung ihren Namen.

Wie gesagt, verleiht die Nichtlinearität der logistischen Gleichung in diskretisierter Form die Fähigkeit, auch ***deterministisches Chaos*** zu erzeugen. Deswegen findet man gelegentlich auch Definitionen der Komplexität, die nur die Nichtlinearitätsbedingung, nicht auch die Vernetzungs-Bedingung fordern. Dann aber wird es schwieriger, verschiedene Größenordnungen der Komplexität zu benennen. Die Vernetzung ist einfacher zu quantifizieren als die Nichtlinearität, und der Weg von den einfachen Modellen mit dem einzigen Freiheitsgrad x zu Modellen mit größerer Realitätsnähe besteht darin, immer *mehr* vernetzte Freiheitsgrade in die die Modellierung einzubinden. Mit anderen Worten, die Dimensionalität des Differentialgleichungs-Systems - und des dahinter stehenden Phasenraumes - muss erhöht werden. Die wechselwirkenden Freiheitsgrade durch Parametrisierungen zu beschreiben, erhöhen diese Dimensionszahl nicht - aber sie verlangt eine subjektive willkürliche Vorwegnahme des *Ergebnisses* solcher Wechselwirkungen.

Wir haben haben hier den Bedarf an 'Komplexifizierungen' durch Dimensionserhöhungen des Differentialgleichungs-Systems an einigen Beispielen für positive und negative atmosphärische Rückkopplungsschleifen veranschaulicht. Wir haben also - schon lange bevor wir den Phasenraum als systemtheoretisches Hilfsmittel besprechen werden (→ Kapitel 5) - auf die gewaltige Anzahl der mitspielenden Vernetzungen hingewiesen, die es äußert fraglich machen, ob man jemals eine Modellierungsstufe erreichen wird, deren Vorhersagen 'Klimafakten' genannt werden dürfen. Ein hypothetisches Modell, welches dieses Ziel erreicht hat, nennen wir hier ein ***vollständiges Modell***. Man schmälert die großen Verdienste der gegenwärtigen Modellbauer und ihre Fortschritte kein bisschen, wenn man bemerkt, dass die sogenannten ***realitätsnahen Modelle*** einen sehr entgegenkommenden Namen erhalten haben.

Die großen Fortschritte in der Klimamodellierung sind aber keinesfalls 'wertlos'. Nur sollte man sie nicht als geeignetes Handwerkszeug zur Gewinnung 'valider und gültiger' Prognosen darstellen, sondern als Handwerkszeug dafür, die komplexe Atmosphäre besser verstehen zu lernen. Mit dem zunehmenden Verständnis ist allerdings auch die Erfahrung verbunden, dass der 'gefühlte Abstand' zum vollständigen Modell kaum kleiner wird, er *bleibt* praktisch unerreichbar. Daran kann auch die sogenannte Ensemble-Methode der Berechnung von Projektionen nichts ändern.