3.2 Prognostische Differentialgleichungen und Freiheitsgrade

Worum geht es?

Während die Lösungen von algebraischen Gleichungen oder algebraischen Gleichungssystemen feste Zahlenwerte ergeben, sind die Lösungen von Differentialgleichungen oder von Differentialgleichungs-Systemen sogenannte *Freiheitsgrade*. Das sind Funktionen der Zeit, die die Entwicklung des modellierten Systems im Bilde der zeitlichen Veränderung seiner Freiheitsgrade beschreiben. Somit sind Differentialgleichungen *das* mathematische Hilfsmittel zur Berechnung von Prognosen. Sogenannte Feld-Freiheitsgrade variieren nicht nur mit Zeit, sondern auch mit dem Ort. Das zeitliche Verhalten an jedem einzelnen Ort einer solchen Feld-Variablen - in der Praxis meist an jedem Gitterpunkt des Modells - repräsentiert einen 'normalen' Freiheitsgrad.

Eine Bereitstellung des endgültigen Differentialgleichungs-Systems ermöglicht es auch, unsere Definition von Komplexität zu präzisieren und sie mit anderen Definitionen zu vergleichen.

Leider ist es in der Praxis der atmosphärischen Modellierung notwendig, in dem 'eigentlich' zuständigen Gleichungs-System viele Differentialgleichungen durch algebraische Beziehungen zu ersetzen. Dabei werden System-Variablen gezwungen, ihr eigenes Zeitverhalten und damit den Status eines Freiheitsgrades aufzugeben und sich stattdessen 'sklavisch' an das Zeitverhalten anderer, 'echter' Freiheitsgrade anzuketten. Solche algebraisch definierten Größen bleiben also variabel, gehören jedoch nicht mehr zu *den* Variablen, die auch Freiheitsgrade sind und die die Dimensionalität des Gleichungssystems und des Phasenraumes bestimmen. Das Verfahren, auch *solche* Variablen zu verwenden, weil man die 'eigentliche' Differentialgleichung nicht kennt oder sie aus praktischen Gründen nicht lösen kann, ist gerade die schon häufiger angesprochene Methode der ***Parametrisierung***. Es ist ein oft statistisches, aber immer subjektives Verfahren, weil es keine objektiven Vorschriften zur algebraischen Anbindung solcher Variablen an die 'übrig gebliebenen' Freiheitsgrade gibt.

Wenn man Gleichungen postuliert, mit denen man z.B. die Temperatur (Symbol T) und andere atmosphärische Variable $a, b, c, \ldots$ von morgen und übermorgen ausrechnen kann, dann hat man ein 'Wettermodell' gemacht. Natürlich ist eine ***algebraische*** Gleichung wie $T+4=10$ für eine Wettervorhersage völlig unsinnig, denn bekanntlich hat die Temperatur der Atmosphäre 'gelegentlich' auch andere Werte als 6 Grad. Was wir brauchen, ist keine *algebraische* Gleichung, sondern eine solche, deren Lösung auch 'nach der Rechnung' noch variabel ist. Das leisten ***Differen-***

tialgleichungen**,* denn die 'Lösungen' von Differentialgleichungen sind nicht 'starre Zahlen', sondern ***Freiheitsgrade, d.h. ***Funktionen***, die zu unterschiedlichen Zeiten i.A. auch unterschiedliche Werte haben. Z.B. hat die Differentialgleichung zur Ermittlung des zeitlichen Temperatur-Verhaltens die Form

Zeitliche Änderung der Temperatur T =

*eine **Einflussfunktion** auf* T, die von T *selbst abhängt, sowie von allen anderen Freiheitsgraden* $a, b, c, \ldots,$ *welche mit* T ***vernetzt*** *sind, wie z.B. Druck* p, *Wind* $\mathbf{v}$, *CO_2-Gehalt, Staubgehalt, Feuchtigkeit, solare Einstrahlung, Wolkenbildung, Meeresströmung, Landoberflächenform und vieles mehr.*

Die 'Punkte' in der Liste der Freiheitsgrade sind wichtig, denn es kommen tatsächlich *sehr* viele Freiheitsgrade zusammen, die die zeitlichen Veränderungen von T *mit* verursachen. Dass die Temperatur, ebenso wie z.B. Druck, Wind usw. Funktionen der Zeit t sind - *i.A. aber auch des Ortes* $\mathbf{r} = (x, y, z)$ - hatten wir schon auf Seite 59 besprochen. Es handelt sich hier also um zeit- *und* raumabhängige Funktionen, d.h. um ***Feldfunktionen**.* Die Temperatur z.B. ändert sich nicht nur beim Fortschreiten der Zeit, sondern auch bei Ortsveränderungen, z.B. vom Äquator in Richtung Nordpol. Die obige Differentialgleichung 'interessiert' sich aber nur für die *zeitliche* Veränderung von T. Das tut sie jedoch *an jedem* Raumpunkt. Ein atmosphärischer ***Feld-Freiheitsgrad*** verkörpert also mehr als *einen* Freiheitsgrad, streng genommen sogar so viele, wie die Atmosphäre Raumpunkte einnimmt, also *unendlich* viele.

Über den hier notwendigen werdenden Kompromiss hatten wir auch schon gesprochen: Man muss die reale Natur approximieren, man muss sie *modellieren!* Im aktuellen Beispiel lösen wir die obige Differentialgleichung natürlich *nicht* unendlich oft, sondern nur so oft, wie es der Anzahl der Kreuzungspunkte eines atmosphärischen *Gittermodells* entspricht (→ Seite 65). Jeder Temperatur-Wert an einem solchen Punkt ist ein vollständiger 'normaler', *nur* zeitabhängiger Freiheitsgrad, und die Anzahl dieser Freiheitsgrade entspricht der Anzahl der Gitterpunkte des Modells, mit denen man das Feld mit seinen 'unendlich vielen' Freiheitsgraden ***auflöst***, wie man sagt.

Ehe wir inhaltlich weiter argumentieren, sollten wir die etwas schwerfällige verbale Formulierung der obigen Gleichung ein wenig formalisieren. Wir hatten ja schon auf Seite 59 gesagt, dass man die verbale Aussage "Die Variable T ist eine Funktion von t, x, y und z" abkürzen kann durch die Formel '$T = f(t, x, y, z)$'. Entsprechendes gilt auch für unsere obige Einflussfunktion. Eine Vereinfachung der verbalen Gleichung lautet also:

Zeitliche Änderung von T = $f(T,a,b,c,\ldots)$; $a,b,c,\ldots$: alle mit T vernetzten Variablen

Eine Formalisierung - *und Präzisierung* - auch der linken Seite dieser Gleichung erfolgt gegen Ende dieses Kapitels. Aber die sich aus den dortigen Überlegungen ergebende zusätzlich formalisierte Form der Gleichung nehmen wir schon vorweg:

$$\dot{T} \equiv (d/dt)T \equiv dT/dt = f(T, a, b, c, \ldots)$$

Für die 'zeitliche Änderung' von T kann man also drei gleichwertige Symbole verwenden, wobei das zweite, $(d/dt)T$, eher selten verwendet wird. Egal, welches Symbol man wählt - zunächst werbe ich um Verständnis dafür, dass neben der Temperatur T auch die - so oder so - ausgedrückte 'zeitliche T-Änderung' eine Funktion der Zeit ist: Wenn die Funktion $T(t)$ *gleichmäßig* zunimmt - wenn es also mit gleichbleibender Geschwindigkeit wärmer wird, z.B. alle drei Stunden ein Grad, dann ist zwar die Funktion $dT/dt(t)$ konstant, aber es ist noch immer eine Funktion der Zeit, die jedem Zeitpunkt t einen bestimmten Wert von dT/dt zuordnet. Natürlich kann dieser jeweils zugeordnete Wert auch immer der gleiche sein! Erst wenn die Funktion $T(t)$ *ungleichmäßig* zunimmt, z.B. immer schneller oder immer langsamer, hat die Funktion $dT/dt(t)$ bei unterschiedlichen Argumenten t auch unterschiedliche Werte. Sie ist dann keine *konstante* Funktion mehr.

Noch einmal: wenn $dT/dt(t)$ eine konstante Funktion *ist*, dann muss die Funktion $T(t)$ nicht etwa auch konstant sein, sie kann eine - allerdings unveränderte - Erwärmungs- oder Abkühlungrate darstellen. Und wenn $T(t)$ *selbst* konstant ist? Dann ist $dT/dt(t)$ ebenfalls eine konstante Funktion, und sie lautet natürlich $dT/dt(t) = 0$.

Die Einflussfunktion $f(T,a,b,c,\ldots)$ ist haargenau die gleiche Funktion wie dT/dt, denn schließlich ist $dT/dt = f(T,a,b,c, \ldots)$ eine *'Gleichung'!* Das ist möglicherweise schwer zu verstehen, denn wenn die Temperatur - als Feldfunktion - nicht nur von t, sondern von (t, x, y, z) abhängt, dann muss ja auch die *zeitliche Änderung* dT/dt von diesen Raumzeit-Koordinaten abhängen. Also steht auf der linken Seite der Gleichung eine Funktion von (t,x,y,z), und diese soll identisch sein mit der Einflussfunktion $f(T,a,b,c,\ldots)$ auf der rechten Seite, welche aber zunächst *nicht* von den Raumzeit-Koordinaten (t, x, y, z) abhängt, sondern von den Feld-Freiheitsgraden $(T, a, b, c, \ldots)$. Also die linke Seite der Differentialgleichung hängt von ***Koordinaten*** (t, x, y, z) ab, und die rechte Seite von ***Feldfunktionen*** von $(T,a,b,c,\ldots)$. Oder nicht?

Die Argumente $(T,a,b,c, \ldots)$ der Einflussfunktion haben ja *ihrerseits* die gleichen Argumente (t,x,y,z) wie die der Funktion dT/dt auf der linken Seite. Ausführlich geschrieben lautet also die Differentialgleichung

$dT/dt(t,x,y,z) \;=\; f\big(T(t,x,y,z), a(t,x,y,z), b(t,x,y,z), c(t,x,y,z), \ldots\big)$ *(wird noch korrigiert!)*

Letztlich haben also *doch* die Funktionen beider Seiten die gleichen Argumente. Man sagt, die rechte Seite dieser Gleichung hängt zwar ***explizit*** von $(T, a, b, c, \ldots)$ ab, aber ***implizit*** von (t, x, y, z). Wir haben hier also eine Art 'Verkettung' von Funktionen, eine Funktion von Funktionen, was man auch ein ***Funktional*** nennt.

Liebe Leserin, lieber Leser, hoffentlich habe ich Sie nicht allzu sehr mit meiner inflationären Verwendung des Symbols x verwirrt, welches ich schon für allgemeine Variablen und Freiheitsgrade verwendet hatte (z.B. in Kapitel 2.4 zur Erläuterung von Korrelationen oder in Kapitel 3.1 zur Erläuterung von algebraischen Gleichungen). Und nun ist x auch noch eine Orts-Koordinate, wie sie Feld-Freiheitsgrade benötigen. Wenn wir nun auch einen Feld-Freiheitsgrad x eingeführt hätten wäre das Chaos mit dem Kürzel '$x(t,x,y,z)$' perfekt gewesen. Zum Glück haben wir aufgepasst, als wir oben die neben der Temperatur T aufzuführenden Feldfreiheitsgrade mit $a,b,c, \ldots$ bezeichnet haben. Ich bitte Sie auch in Zukunft darauf zu achten, ob ein Symbol x für die erste Ortskoordinate eines Feld-Freiheitsgrades steht oder für einen - dann aber gewöhnlichen - Freiheitsgrad selbst oder für eine sonstige Variable.

Und nun zur angekündigten Korrektur: Die Funktion dT/dt hängt von vier Argumenten ab, aber das Symbol dT/dt beschreibt nur die Ableitung nach t, also nur nach *einem* der vier Argumente. Es handelt sich hier um eine 'Teil-Ableitung', eine sogenannte ***partielle Ableitung***. Eine solche erhält aber in der Regel ein etwas anderes Symbol, mit dessen Hilfe sich die obige Differentialgleichung korrekterweise folgendermaßen schreibt:

$$\partial T/\partial t(t,x,y,z) \;=\; f\big(T(t,x,y,z), a(t,x,y,z), b(t,x,y,z), c(t,x,y,z), \ldots\big)$$

Das Symbol d/dt ist nämlich für die sogenannte ***totale Ableitung*** vorbehalten. Für die besonders Neugierigen unter den Leserinnen und Lesern, ('unter *meinen* Leserinnen und Lesern' darf ich ja nicht schreiben, denn sie gehören mir ja nicht), gebe ich hier die Formel für den Zusammenhang zwischen totalen und partiellen Differentialen und Ableitungen an. (Die nicht so Neugierigen 'dürfen' die nächsten anderthalb Seiten überschlagen). Das totale Differential der Temperatur lautet:

$$dT = \partial T/\partial t \; dt + \partial T/\partial x \; dx + \partial T/\partial y \; dy + \partial T/\partial z \; dz$$

Irgendwie logisch, nicht wahr? Da ja T von den Argumenten t, x, y und z abhängt, wird sich T auch ändern müssen, wird es also zu einer durch dT gekennzeichneten Änderung kommen müssen, wenn es zu Änderungen dt, dx, dy oder dz kommt. Und die *Stärke* dieser Einflüsse auf dT hängt von den entsprechenden partiellen Ableitungen der Temperatur ab. Daher *musste* diese Formel partielle Ableitungen nicht nur nach t, sondern nach allen *vier* Argumenten enthalten.

Von dem hier definierten totalen Differential dT der Temperatur kommt man zu ihrer totalen Ableitung dT/dt, wenn man jeden Term - auch der rechte Seite - der obigen Gleichung durch dt dividiert. Dabei entstehen offenbar die Quotienten $dt/dt=1$, dx/dt, dy/dt und dz/dt. Die drei Ortskoordinaten, z.B. eines Lagrange-Teilchens, ändern sich natürlich umso schneller, je größer seine *Geschwindigkeit* in die jeweilige Richtung ist. Schon auf Seite 59 haben wir diesen drei Geschwindigkeits-Komponenten die Symbole v_x, v_y, v_z gegeben und sie zu einem Vektor

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

zusammengefasst. - Das alles zusammen verändert die letzte Formel nach Division durch dt zu

$$dT/dt = \partial T/\partial t + \partial T/\partial x\, v_x + \partial T/\partial y\, v_y + \partial T/\partial z\, v_z$$

Offenbar muss man diese Formel nur dann anwenden, wenn T *wirklich* auch von den Ortskoordinaten abhängt, wenn T also ein *Feld-Freiheitsgrad* ist. Bei der globalen 'Klimatemperatur' ist das nicht der Fall, hier ist $\partial T/\partial x = 0$, und die beiden anderen partiellen räumlichen Ableitungen verschwinden ebenso. Die Formel geht über in

$$dT/dt = \partial T/\partial t$$

Das freut uns natürlich, haben wir doch keinen Fehler gemacht, als wir früher stets die zeitlichen Ableitungen als totale Ableitung dT/dt geschrieben haben! Und im gegenwärtigen komplizierteren Fall kann man die drei Summanden

$$\partial T/\partial x\, v_x + \partial T/\partial y\, v_y + \partial T/\partial z\, v_z = v_x\, \partial T/\partial x + v_y\, \partial T/\partial y + v_z\, \partial T/\partial z$$

zu einem einzigen Term zusammenfassen. Können Sie noch? Wenn ja, sage ich Ihnen noch schnell, *wie* das geht: Ebenso wie in der Definition $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ kann man auch die drei Ableitungen zu einem Vektor zusammenfassen, in diesem Fall zu einem ***Vektor-Operator***, den man ***Nabla*** oder ***Gradient-Operator*** nennt und mit dem Symbol ∇ abkürzt

$$\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial x,\ \partial/\partial z)$$

Was sich nun hinter den drei obigen Summanden verbirgt, ist nichts anderes als das ***innere Produkt*** der beiden hier genannten Vektoren, (so das wir dieses innere Produkt, auch ***skalares Produkt*** genannt, hier gleich mitdefiniert haben). Für die totale Temperaturänderung entsteht nun die Beziehung:

$$dT/dt = \partial T/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla T$$

Sie beschreibt die Temperatur-Änderung durch eine am Ort stattfindende ***lokale Erwärmung*** (oder Abkühlung) $\partial T/\partial t$ und durch eine ***advektive Temperatur-Änderung*** $\mathbf{v}\cdot\nabla T$, die deshalb zustande kommt, weil die mit der Geschwindigkeit **v** am Ort ankommende Luft aus wärmeren oder kälteren Gebieten kommt - je nach den durch ∇T beschriebenen dreidimensionalen *räumlichen* Temperatur-Verhältnissen.

So viel zur für Laien sicher 'fortgeschrittenen' mathematischen und theoretisch-meteorologischen Allgemeinbildung. Wer dies 'verstanden hat, auch wenn nur ansatzweise, könnte einen kleinen Vorteil haben, wenn wir in Kapitel 4 die Gleichungen der sogenannten ***Ideal-Atmosphäre*** besprechen werden. Aber mein Hauptanliegen, den abgrundtiefen Unterschied dieser - *noch vorhersagbaren* - Ideal-Atmosphäre zur realen Atmosphäre zu verdeutlichen, sollte auch ohne diesen 'kleinen Vorteil' gelingen.

Vor kurzem - nach der ausführlichen *verbalen* Formulierung der Differentialgleichung auf Seite 233 - hatte ich behauptet, dass die Temperaturprognose von 'sehr vielen' Freiheitsgraden beeinflusst würden, dass also die drei Pünktchen '...' am Ende der Argumentenliste der Einflussfunktion die Stellvertreter für sehr viele Freiheitsgrade seien. Vielleicht haben Sie ja diese Behauptung als etwas übertrieben empfunden: Die Einflussfunktion enthält zwar als Argumente nicht nur die Felder von T, p, $\mathbf{v}$, Gehalt von CO_2 usw., sondern *alle* Variablen und Feldvariablen, die mit T vernetzt sind. Aber sind es wirklich *'sehr'* viele?

Vielleicht möchten Sie als Gegenargument vorbringen, dass ja für eine Klima-Vorhersage gar keine ***Feldvariable*** vorhergesagt werden muss, sondern 'nur' der *eine* globale ***Mittelwert*** der Temperatur, also ein 'normaler' Freiheitsgrad, der nur von der Zeit abhängt, nicht aber von Ortskoordinaten, so dass man gar keine *unterschiedlichen* Werte an unterschiedlichen Gitterpunkten vorhersagen muss.

Sie ahnen es wohl schon: Diese Frage hängt eng zusammen mit der Frage, ob eine Klimaprognose hinreichend einfach sein kann, so dass Verkünder der 'Erreichbarkeit eines Klimaziels durch hinreichend CO_2-einsparende Energiemaßnahmen' wirklich von Fakten reden dürfen (→ z.B. [PB13] oder [Schell-tv1]), oder ob AGW-Skeptiker recht haben, wenn sie behaupten, dass das Klima so komplex sei, dass das Ausrechnen zukünftiger Klima-Fakten *nicht* möglich ist. Ich persönlich zähle mich zu den AGW-Skeptikern, aber nur dann, wenn man die Skepsis wirklich an der Komplexität der Klimafrage festmacht, (oder, wenn Sie so wollen, an den 'Punkten' in der Argumentenliste $T, a, b, c, \ldots$ der Einflussfunktion auf die globale Mitteltemperatur), und nicht etwa z.B. an einer so behaupteten Nicht-Existenz des Treibhauseffektes (→ z.B. [GT-in] oder [Thü-in]).

Liebe Leserin, lieber Leser, wenn ich einmal versuchen darf, ihre Motivation zum Lesen dieses Buches zu ergründen, dann ist meine erste Vermutung, dass Sie es leid sind, immer nur sich widersprechende Behauptungen zu Klimafrage hören zu müssen und nicht selbst entscheiden können, wer Recht haben könnte. Sie möchten selbst mitdenken können! Ich fühle mich natürlich sehr geehrt, dass Sie mir zutrauen, das zu ermöglichen. Vielleicht hatte ich in dieser Hinsicht schon hier und da einen einen Teilerfolg, z.B. weil Sie sich langsam auch selbst sagen, dass man nicht von Fakten reden sollte, wenn man von Prognosen einer Gleichung wie $\dot{T}=f(CO_2)$ spricht, wo doch eigentlich die Gleichung $\dot{T}= f(T,a,b,c, ...)$ zuständig wäre, in der die 'Punkte' sehr *viele* Freiheitsgrade symbolisieren - von denen der CO_2-Gehalt nur ein einer ist - die man längst nicht alle kennt, die auch noch vernetzt sind (sich gegenseitig beeinflussen), und und wo man auch diese Vernetzungen noch längst nicht alle kennt, nicht einmal die zwischen den inzwischen bekannten relevanten Freiheitsgraden.

Die Notwendigkeit, sehr viele Freiheitsgrade berücksichtigen zu müssen, können wir noch vertiefen. Dazu sollten wir jedoch noch ein wenig Vorwissen ansammeln. Wie schon angedeutet, müssen wir zwei Typen von Klimamodellen unterscheiden, deren vorherzusagenden Temperaturen sich folgendermaßen unterscheiden:

1) Die Temperatur, deren zeitliche Änderung berechnet werden soll, ist die oft erwähnte, *nur* zeitabhängige Klima-Mitteltemperatur $T=f(t)$. So ist es in ***globalen Klimamodellen***.
2) Die Temperatur, deren zeitliche Änderung berechnet werden soll, ist *doch* eine zeit- *und* raumabhängige Feldfunktion $T=f(t,x,y,z)$. So ist es in ***regionalen Klimamodellen***.

Auch im Fall 2) bedeuten die Symbole dT/dt bzw. $\dot{T}$ *nur* zeitliche, also keine räumlichen Änderungen. Aber diese Änderungen werden *an allen Gitterpunkten* berechnet, so dass in der 'nachträglichen Zusammenschau' all dieser T-Vorhersagen auch eine Vorhersage des gesamten ortsabhängigen T-Feldes entsteht. Und nun kommt die im Kontext unserer Argumentation entscheidende Aussage: Im Fall 1) der Vorhersage eines Gitterpunkt-unabhängigen Klima-Mittelwertes muss - vordergründig gesehen - die Prognose zwar nicht an allen Gitterpunkten wiederholt werden, aber die expliziten Argumente der Einflussfunktion auf diese Klima-Mitteltemperatur sind nach wie vor zeit- *und raumabhängige* Feld-Freiheitsgrade, so dass die einzelnen Gitter-Freiheitsgrade doch berücksichtigt werden müssen! *Die behauptete vielfache Vernetzung bleibt weiterhin bestehen!* Die <u>formal-mathematische Begründung</u> dafür ist einfach: In der für Fall 2) zuständigen Differentialgleichung

$$\dot{T}(t,x,y,z) = f\big(T(t,x,y,z),\ a(t,x,y,z),\ b(t,x,y,z),\ c(t,x,y,z), \dots\big)$$

können im Fall 1) die Ortsargumente der linken Seite entfallen, das Symbol T steht ja hier für die *global* gemittelte Temperatur, *aber auf der rechten Seite eben nicht*:

$$\dot{T}(t) = f_g\left(T(t,x,y,z),\ a(t,x,y,z),\ b(t,x,y,z),\ c(t,x,y,z), \ldots\right)$$

Bevor wir auch eine *inhaltlich-physikalische Begründung* angeben, hier noch eine Nebenbemerkung: auch im zweiten Fall möchte man räumlich gemittelte Temperaturen vorhersagen, aber die Mittelungen erfolgen hier nicht global, sondern nur über Klima-Regionen. Dieser Skalenunterschied unterscheidet - 'normalerweise' - eine regionale Klimaprognose von einer Wetterprognose. Allerdings gibt es auch eine ***Lokale Klimatologie***, welche z.B. untersucht, ob eine bestimmte Pflanze an der linken oder der rechten Hauswand besser gedeiht. Hier ist die Größenskala also sogar wesentlich *kleiner* als die Wetterdkala). Gesucht ist also im regionalen Fall 2) - im Gegensatz zum globalen Fall 1) - noch immer ein Temperatur-*Feld.* Da zu erwarten ist, dass sich die Einflussfunktion auf die Änderungen eines regionalen Mittelwertes von der Einflussfunktion auf die Änderungen eines globalen Mittelwertes unterscheidet, haben wir das Funktions-Symbol im globalen Fall mit dem Index 'g' versehen.

Nun aber zur inhaltlichen Begründung dafür, dass auch im Fall 1) der Berechnung eines globalen Mittelwertes die räumlich differenzierende Feldphysik der Freiheitsgrade berücksichtigt werden muss. Im Vorgriff auf Kapitel 4 begnügen wir uns hier mit einer 'punktuellen Begründung' anhand eines Beispiels: Sei in $\dot{T}= f(T,a,b,c, \ldots)$ der Freiheitsgrad a der ***Luftdruck***. Jeder weiß, dass bei hohem Luftdruck meist schönes, bei niedrigem Luftdruck meist schlechtes Wetter ist. Aber es kommt auch auf Druck-*Unterschiede* an, denn *diese*, und nicht der Druck selbst, sind für den Wind verantwortlich, denn letzterer ist dazu da, die Druckunterschiede wieder auszugleichen. In Modellen kann man Druckunterschiede natürlich nur mithilfe von Druck-Feldern darstellen.

Diese Winde können nun Warmluft oder Kaltluft verfrachten. Warmlufttransport ist mit einem Transport des thermischen Anteiles der inneren Energie verbunden. Da dieser Energievorrat begrenzt ist, könnte man denken, das ein reines 'Hin- und Herschieben' der thermischen Energie den globalen Mittelwert der Temperatur wohl doch nicht beeinflusst. Wenn aber z.B. konvergente Kaltlufttransporte Kaltluftgebiete erzeugen, deren Flächen größer sind als die von konvergenten Warmlufttransporten erzeugten Warmluftgebiete, spricht vieles für eine niedrigere global gemittelte Temperatur als im umgekehrten Fall, selbst wenn die Temperatur in den warmen Gegenden *überproportional* angestiegen ist: Wegen der Nichtlinearität aller atmosphärischen Prozesse und wegen *zusätzlich* erfolgender Umwandlungen zwischen der thermischen Energie und anderen Energieformen kommt es nämlich bei der Ermittlung der globalen Mitteltemperatur *nicht* zur Kompensation der durch den Wind entstandenen Warm- und Kaltluftgebieten. Fazit: Druckunterschiede, die man durch ortsabhängige Druckfelder beschreiben muss, ergeben Temperaturänderungen, die sich i.A. nicht kompensieren und somit die Klimatemperatur verändern. Also müssen die Winde und die sie verursachenden Druckunterschiede in der Einflussfunktion für die Globaltemperatur *Feldcharakter* haben, dürfen sie nicht als 'normale' Freiheitsgrade nur einmal auftreten, sondern sie müssen an allen Gitterpunkten berücksichtigt werden. M.a.W., es sind tatsächlich sehr viele Freiheitsgrade, und sie treiben die Komplexität des Systems nach oben.

Eine Global-Temperaturgleichung $\dot{T} \equiv dT/dt = f_g(T,a,b,c,...)$ gestattet die Berechnung der zeitlichen Tendenz dT/dt der Temperatur also nur dann, wenn man alle *Feld*-Temperaturen *und* alle mit ihr vernetzten *Feld*-Freiheitsgrade zu einem bestimmten Zeitpunkt kennt. Man nennt die Werte all diese Freiheitsgrade zum Startzeitpunkt 0 ***Anfangsbedingungen**.* Man muss ja 'nur' Anfangsbedingungen in die Einflussfunktion einsetzen und den Funktionswert bestimmen. Dieser ist ja identisch mit der Temperatur-Tendenz $dT/dt = f_g\,(0)$ zum Startzeitpunkt. Aber diese Temperatur-Tendenz zum Zeitpunkt 0 ist ja noch nicht die Temperatur selbst zu einem späteren Zeitpunkt 1. Erst *das* wäre eine Prognose, und wir fragen uns, wie wir das $T(1)$ aus der Temperatur-Tendenz $\dot{T}=f_g\,(0)$ zum Zeitpunkt 0 errechnen können.

Diese Frage beantworten wir am Ende dieses Kapitels. Aber schon jetzt sieht man wohl ein, dass man mithilfe eines geeigneten Verfahrens aus einer Temperatur-Tendenz zu einem Zeitpunkt auf die Temperatur zu einem *späteren* Zeitpunkt schließen kann. Danach wollen wir natürlich nach dem gleichen Verfahren aus der Temperatur-Tendenz zum Zeitpunkt 1 auf die Temperatur zum noch *späteren* Zeitpunkt 2 schließen. Aber nun müssen wir alle beteiligten Feld-Freiheitsgrade zum Zeitpunkt 1 in die Funktion f_g einstzen, die wir gar nicht haben! Die Anfangsbedingungen aller dieser Variablen können wir natürlich nicht wieder vewenden, denn sie haben sich ja 'inzwischen' ebenso wie die Temperatur verändert.

Obwohl wir nur an der Temperaturprognose interesiert waren, möglicherweise sogar nur an seinem Global-Mittelwert, kommen wir offenbar nicht darum herum, nun auch noch alle anderen Freiheitsgrad zu prognostizieren. Sogar vor *jedem* der ***Zeitschritte*** $1 \to 2 \to 3$ müssen wir die Tendenzen der anderen Freiheitsgrade a, b usw. berechnen. Das bedeutet, dass wie die Gleichung $\dot{T} = f_T\,(T, a, b, c, ...)$ durch Gleichungen der Art $\dot{a} = f_a\,(T,a,b,c,...)$, $\dot{b} = f_b\,(T,a,b,c,...)$ usw. zu einem geschlossenen ***Gleichungssystem*** ergänzen müssen. Deren Einflussfunktionen haben zwar alle die gleichen Argumente, aber es sind natürlich unterschiedliche Funktionen dieser Argumente. Z.B.

haben die beiden Funktionen $\dot{a}=a^2-3b$ und $\dot{b}=2a\cdot b$ die gleichen Argumente a und b, aber sie sind dennoch verschieden voneinander, was wir durch die unterschiedlichen Funktionssymbole $f_a(a,b) = a^2-3b$ bzw. $f_b(a,b) = 2a\cdot b$ symbolisieren können.

Wir verallgemeinern dies, indem wir auf die 'künstliche' Sonderrolle der Temperatur verzichten und von einem n-dimensionalen Gleichungs-System mit den Freiheitsgraden '$x_1, x_2, \dots, x_n$' und den Einflussfunktionen f_1 bis f_n. (Wegen der Indizierung ist die Doppelverwendung des Symbols x für Freiheitsgrade und Ortskoordinaten nicht mehr 'so schlimm', einen Feldfreiheitsgrad mit $x_1(t,x,y,z)$ zu bezeichnen, erzeugt hoffentlich keine Verwirrung). Das Differentialgleichungs-System lautet nun:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ dx_n/dt &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Das kann man offenbar noch kürzer scheiben als:

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad i = 1 \text{ bis } n$$

Geschlossene Gleichungssysteme können natürlich auch niedrig-dimensional sein, z.B. zweidimensional:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2) \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Wenn Sie nun glauben, dieses sei der Prototyp eines Klimamodells, in welchem x_1 die Temperatur T bedeutet und x_2 den CO_2-Gehalt (Symbol C), dann muss ich Sie enttäuschen: Das 'Modell', welches den öffentlichen Klimadiskussionen zugrunde liegt - insbesondere der Diskussion zum berühmten 2 Grad-Ziel - ist noch viel einfacher als Ihr vermutetes Gleichungs-System

$$\begin{aligned} dT/dt &= f_T(T, C) \\ dC/dt &= f_C(T, C) \end{aligned}$$

Es ist kein Gleichungs-*System* mehr, sondern nur *eine* Gleichung

$$dT/dt = f(C)$$

wobei C nicht berechnet wird, sondern in Szenarien vorgegeben wird, und die monokausale Funktion $f(C)$ mehr oder weniger linear ist. Diesem 'Modell' widmen wir wegen der unglaublichen Aktualität ein eigenes Kapitel (→ Kap. 3.4). Andererseits haben die Modelle hinter den Kulissen dieser Diskussion wesentlich mehr als zwei

Freiheitsgrade - aber noch immer zu wenig, um die komplexe Realität eingermaßen zuverlässig erfassen zu können. Einige der - zwangsweise - fehlenden Freiheitsgrade werden parametrisiert, was aber - ebenfalls zwangsweise - stark fehlerhaft ist, weil hierbei Freiheitsgrade ihre definierende Eigenschaft verlieren und durch algebraische Beziehungen in Zeitabhängigkeiten von echten - aber andern Freiheitsgraden versklavt werden (→ Seite 228).

Es steht nun noch eine präzise Definition dessen aus, was wir unter einer Tendenz, einer zeitlichen Änderung, z.B. der Temperatur, verstehen wollen, und wieso $\mathrm{dT/dt}$ eine sinnvolle Symbolik dafür ist. Wenn Sie so wollen, folgt nun eine stark vereinfachte 'Mini-Einführung' in die sogenannte 'Infinitesimal-Rechnung', auch Differentialrechnung genannt, die Leibnitz und Newton gegen Ende des 17. Jahrhunderts unabhängig voneinander entwickelt hatten.

Für eine *beliebige* Änderung (die nicht unbedingt eine Änderung in der Zeit sein muss) verwendet man gerne den griechischen Buchstaben Δ (Delta). Schreibt man z.B. Δv = 0,2 km/h, dann heißt das nicht, die Windgeschwindigkeit betrage 0,2 km/h, sondern sie habe sich um 0,2 km/h *vergrößert*, ausgehend z.B. von einem bestimmten Zeitpunkt beim Fortschreiten in die Zukunft, oder ausgehend von einem bestimmten Raumpunkt beim Fortschreiten in eine bestimmte Richtung. Δv = 0,2 km/h könnte z.B. die Änderung der Windgeschwindigkeit sein, wenn man sich einen Meter von der Haustür entfernt. Diesen Gedanken verfolgen wir erst weiter, wenn wir allgemeiner über raumabhängige ***Feldvariablen*** reden.

Aber wenn wir unter T die ***Klimatemperatur*** verstehen, also eine durch globale Mittelbildung entstandene Temperatur, ist auf den linken Seiten dieser Gleichungen das Problem der Ortsabhängigkeit von Temperaturfeldern sowieso ausgeklammert. Dann kann ja $\Delta \mathrm{T}$ nur noch eine *zeitliche* Änderung bedeuten, die höchst aktuelle Diskussions-Größe 'Änderung der globalen Klimatemperatur' also. (Zwar hat das Klima gar keine Temperatur, sondern die *Luft* im Klimasystem hat sie, aber das Wort 'Klimatemperatur' hat sich voll eingebürgert)

Zur Erlangung der korrekten mathematisch-symbolischen Formulierung der linken Seite einer Klimatemperatur-Gleichungen testen wir (nun doch wieder in den alten Bezeichnungen, z.B. $\mathrm{T}, a, b, c, \ldots$ für die Freiheitsgrade) den Ansatz

$$\Delta \mathrm{T} = f_{\mathrm{T}}\,(\mathrm{T}, a, b, c, \ldots) \qquad \textit{(\underline{erster Entwurf!})}$$

Leider ist die Information darüber, in welchem *Zeitraum* die zeitliche Änderung $\Delta \mathrm{T}$ geschieht, in der hier verwendeten Terminologie nicht enthalten. Um zum Ausdruck zu bringen, dass die Änderung ΔT während einer *Zeit-Spanne* geschieht, also während einer bestimmten 'Zeit-Änderung' Δt, muss man offenbar schreiben:

$$\Delta T = T(t+\Delta t) - T(t) = f_T(T, a, b, c, \ldots) \qquad (\textit{\underline{zweiter Entwurf!}})$$

denn das *ist* ja gerade die Temperatur-Differenz ΔT, die während des Verstreichens des ***Zeitintervalls*** Δt entsteht! Aber *welches* Zeitintervall wir wählen wollen, haben wir noch nicht geklärt. Die Einflussfunktion $f_T(T, a, b, c, \ldots)$ - auch Antriebsfunktion für die Klimatemperatur genannt - die auf der rechten Seite unserer Temperatur-Gleichung steht, muss ja viel stärker sein, wenn z.B. eine Erhöhung ΔT um 2 Grad innerhalb eines Jahres erfolgen soll, als wenn diese Temperaturerhöhung erst im Jahr 2050 erreicht werden soll.

Wenn wir also bei der Klimamodellierung mit Einflussfunktionen arbeiten wollen, die unabhängig sind vom gewünschten Prognose-Zeitraum, müssen wir offenbar die Temperaturänderung auf das Zeitintervall Δt beziehen, *während dessen sie stattfindet.* Dann erhalten wir nämlich die ***Geschwindigkeit*** der Temperaturänderung, und das ist grade die gesuchte ***Temperatur-Tendenz***, denn *diese* fällt und steigt im Rhythmus des Antriebs:

$$\Delta T/\Delta t = [\,T(t+\Delta t) - T(t)\,] / \Delta t = f_T(T, a, b, c, \ldots) \qquad (\textit{\underline{dritter Entwurf}})$$

Mit dieser dritten 'Testgleichung' beschreiben wir also, welche Temperaturänderung ΔT *'pro'* Zeitintervall Δt stattfindet. Wenn z.B. die Funktion $f(T, a, b, c, \ldots)$ den Wert 3 Grad Erhöhung pro Jahrhundert ergibt (Δt=100 Jahre), dann bedeutet der gleiche Antrieb auch eine Erhöhung von 0,3 Grad pro Jahrzehnt oder von 0,03 Grad pro Jahr. Zwar ändern sich jedes Mal der Zähler und der Nenner von $\Delta T/\Delta t$, aber der Differenzen - *Quotient* ist jedes Mal gleich. Es ist ja gleichgültig, ob man die Temperatur-Tendenz so oder so angibt.

Oder nicht? Ist selbst unser dritter Entwurf noch nicht geeignet? Falls sich die Geschwindigkeit der Temperatur-Änderung im Laufe der 100 Jahre *selbst* verändert, falls z.B. die Temperatur-Tendenz am Anfang eines Jahrhunderts anders ist als am Ende, dann kann *das* durch den Quotienten $\Delta T/\Delta t$ = 3 Grad /100 Jahre natürlich nicht beschrieben werden! Wenn man statt der Klima-Temperatur die Wetter-Temperatur im Auge hätte, benötigt man sogar *stündlich* veränderliche Temperaturtendenzen! Offenbar wäre es besser, für die Definition der Temperatur-Tendenz möglichst *kleine* Intervalle zu bilden, je kleiner desto besser!

Oder Betrachten wir ein gänzlich *anderes* Beispiel: Wenn ich während eines jeden Monats 90 € Schulden mache und die damit verbundene Geschwindigkeit meiner Verarmung, also meine 'Schulden-Tendenz' berechnen will, bilde ich zunächst einen Differenzen-Quotienten, nämlich 90 € / 1 Monat, und erhalte eine 'Schulden-Tendenz' von etwa 3 € pro Tag. Mache ich aber diese 90 € Schulden jede Woche, dann ist die meine Schulden-Tendenz gegeben durch 90 € / 7 Tage, also etwa vier Mal größer! Dann hätte die Einflussfunktion auf meine Neigung, Schulden zu machen, offenbar einen vierfach größeren Wert! Natürlich sollte die gegenwärtige Schulden-Tendenz *nicht* davon abhängen, *auf welches Zeitintervall* ich die Abnahme meines Vermögens V beziehe. Wenn die Einflussfunktion auf mein Kaufverhalten unabhängig sein soll von der Wahl eines Zeitintervalls, muss ich die jeweilige Vermögensverringerung immer auf das *gleiche, möglichst kleine* Zeitintervall beziehen.

Und nun kommen wieder diese Mathematiker, die immer alles ganz perfekt machen wollen. Sie sagen, diese Intervalle sollen so klein wie möglich sein, quasi unendlich klein, sie sollen ***infinitesimal*** klein sein! (→ z.B. auch Seite 28 oder Seite 74). Und den Differenzenquotienten $\Delta T/\Delta t$ (oder $\Delta V/\Delta t$) für *infinitesimale* Intervalle bezeichnen sie mit dem neuen Symbol dT/dt und nennen ihn nicht mehr Differenzen-Quotient, sondern ***Differential-Quotient***. Wer in der Schule Differential-Rechnung gelernt hat, (oder gerade lernt), wird sich daran erinnern, dass man den Quotienten dT/dt auch ***Ableitung*** oder ***Differentiation*** der zeitabhängigen ***Funktion*** $T = T(t)$ nach t nennt, und dafür gleichwertig das Symbol $\dot{T}$ verwendet.

Wenn es sich nicht um eine zeitliche, sondern um eine räumliche Ableitung handelt, verwendet man für die Kurzform nicht den 'Punkt', sondern einen 'Strich', etwa so: $dT/dx \equiv T'$. Und was sind nun endlich ***Differentialgleichungen***? Das sind einfach Gleichungen, welche Differentialquotienten, also ***Ableitungen*** enthalten, wie hier ja auch:

$$dT/dt = f_T\,(T, a, b, c, \ldots) \qquad \text{(\underline{\textit{Endversion}})}$$

Die Anzahl n der im Modell berücksichtigten Variablen nannten wir auf Seite 241 die ***Dimension*** des durch diese Gleichungen modellierten atmosphärischen Systems. Aber egal ob n eins oder eine Millionen ist - keine Sorge, die Modellatmosphäre hat noch immer die üblichen *drei räumlichen* Dimensionen des ganz normalen ***Anschauungsraumes***, auch ***Ortsraum*** genannt. Man kann ja, wie z.B. auf Seite 155 schon 'vorgedacht', die n Variablen des atmosphärischen Modellsystems als Achsen eines *abstrakten* Raumes - des ***Phasenraumes*** oder ***Zustandsraumes*** ansehen. Nur in *diesem* Sinn ist das atmosphärische Modellsystem 'n-dimensional'.

Man kann auch sagen, es sei ein Modell mit n ***Freiheitsgraden***, oder sein Phasenraum sei n-dimensional. Im Falle n=2 ist dieser Raum also eine ***Phasenebene*** oder ***Zustandsebene***, die wir übrigens in Kapitel 2.7 als $p\upsilon$-Ebene des Idealen Gases schon kennengelernt haben, → Seite 153, wenn auch dort noch nicht im Kontext von Differentialgleichungen: Die zeitlichen Änderungen von p und υ dort haben wir Experimentatoren überlassen. Wie das auch über Differentialgleichungen funktioniert, werden wir in Kapitel 4 erfahren. In Kapitel 5 werden wir auch in hochdimensionalen Phasenräumen argumentieren, aber dort fangen wir zur Erläuterung dieses wichtigen Hilfsmittels der Systemtheorie noch einmal sehr elementar und ganz von vorne an.

Neben Differentialgleichungs-Systemen gibt es auch mehrdimensionale Systeme algebraischer Gleichungen. Ebenso wie bei der Lösung einer einzigen algebraischen Gleichung kann man auch hier die Rechenergebnissen nicht mehr als ***Variable*** bezeichnen, denn sie können sich nicht mehr verändern, sie hängen von der Zeit t gar nicht ab. Umgekehrt sind ja Lösungen von Differentialgleichungen Variable, die wir auch ***Freiheitsgrade*** nennen können.

Interessant ist auch die Frage, was in einem Gleichungssystem 'geschieht', welches sowohl Differentialgleichungen *als auch* algebraische Gleichungen umfasst. Hier ist es für ein Verständnis des Klimasystem (und anderer komplexer Systeme) extrem wichtig, zwei sehr unterschiedliche Fälle auseinander zu halten, sagen wir einen 'guten' Fall und einen 'schlechten' Fall, der sich aber in Prognosen leider nicht vermeiden lässt. Den 'guten' Fall - die physikalisch validierte diagnostische Anbindung an Variablen, deren Zeitverhalten durch Differentialgleichungen bestimmt ist - haben wir am Beispiel der 'idealen Gasgleichung' schon auf Seite 228 beschrieben. Auch der der 'schlechte' Fall, in dem eine diagnostische Anbindung an Variablen zur ***diagnostischen Versklavung*** durch ***Parametrisierung*** von Systemvariablen wird, wurde schon mehrfach thematisiert (→ z.B. Seiten 65, 112). Hier ist die algebraische Beziehung nicht wie bei der 'idealen Gasgleichung' physikalisch validiert, sondern nur ein notdürftiger Ersatz für eine Differentialgleichung, die man nicht oder nicht genau genug kennt.

Ob valide algebraische Mitführungen mit Freiheitsgraden oder notgedrungene algebraische 'versklavende' Anbindungen an Freiheitsgrade, die betrachteten Größen sind nicht mehr konstant wie eine Lösung eines *rein* algebraischen Gleichungssystems. Aber sie sind dennoch keine Freiheitsgrade (wie auf Seite 228 begründet). Sie zählen auch nicht mit bei der Bestimmung der Dimension des Gleichungssystems, also auch des Zustandsraumes: Man muss ja die Werte der Teilmenge aller Variablen, die *nicht* auch Freiheitsgrade sind, nicht unbedingt angeben, wenn man den

Systemzustand benennen möchte! Bei Bedarf kann man ja ihre Werte aus den Freiheitsgraden, wie sie sich aus der Position des Zustandspunktes in diesem Raum ergiben, algebraisch berechnen.

Wie versprochen, wollen wir nun am Ende dieses Kapitel klären, wie wir aus der Temperatur-Tendenz dT/dt zum Zeitpunkt 0 auf die Temperatur T zum Zeitpunkt 1 schließen können. FRAGE: Könnten wir die Gleichung $dT/dt = f(0)$ mit dem Zeit-Differential dt multiplizieren, was $dT = dt \cdot f(0)$ ergäbe? Und könnten wir dieses dT zu dem als Anfangsbedingung schon bekannten $T(0)$ addieren, mit dem Ergebnis

$$T(1) = T(0) + dt \cdot f(0) \ ?$$

Wie schön, links steht die gewünschte für den Zeitpunkt 1 prognostizierte Temperatur, und rechts stehen nur bekannte Bestimmungsstücke zum Angangszeitpunkt 0. Aber leider hat dieses Vorgehen den entscheidenden Nachteil, dass $dt \cdot f(0)$ eine Temperaturänderung wäre, die während des infinitesimalen Zeitintervalls dt geschieht. Das hätte zwar den Vorteil, dass wir in der Zeit 'kontinuierlich' vorwärts kämen, aber es hätte den Nachteil, dass wir diese Prozeduren unendlich oft wiederholen müssten, um die Prognose 'messbar' voranzubringen. Sie ahnen es schon, liebe Leserin, lieber Leser, so wie wir den Raum nicht kontinuierlich überbrücken konnten, sondern mit nicht-infinitesimalen Gitterabständen arbeiten mussten, so müssen wir nun auch die Zeit diskretisieren, also endliche, nicht-infinitesimale Zeitintervalle verwenden. Mit anderen Worten, wir müssen von der soeben hergeleiteten Temperatur-Tendenz als Differentialquotient dT/dt wieder zurückkehren zum Differenzen-Quotienten. Damit schreibt sich die Tendenzgleichung $\Delta T/\Delta t = f(0)$ oder $\Delta T = \Delta t \cdot f(0)$, und die Prognosegleichung ist

$$T(1) = T(0) + \Delta t \cdot f(0)$$

Die Berechnung der nächsten Zeitschritte 1→2→3 erfolgen analog

$$T(2) = T(1) + \Delta t \cdot f(1)$$
$$T(3) = T(2) + \Delta t \cdot f(2)$$

usw., mit dem einzigen Unterschied, dass auf den rechten Seiten nicht mehr die Anfangsbedingungen einzusetzen sind, sondern die letzten Prognose-Ergebnisse. Zu beachten ist natürlich auch hier, dass man $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ usw. *erst dann* kennt, wenn man vorher das *komplette* Gleichungs-System für den jeweils vorangegangenen Zeitschritt gelöst hat.

Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

Dieses Kapitel hatte selbst schon zusammenfassenden Charakter und benötigt keine größere nochmalige Zusammenfassung. Immerhin haben wir hier erstmals die Struktur von Modell-Differentialgleichungen beschrieben. Sie ist eigentlich ganz einfach: Wie sich ein bestimmter Freiheitsgrad verändert, hängt - durch eine Einflussfunktion ausgedrückt - von diesem Freiheitsgrad selbst ab sowie von allen anderen Freiheitsgraden, mit denen er vernetzt ist. Soviel als Zusammenfassung. Als Ergänzung sollte man hier erwähnen, dass sich die auf Seite 48 erfolgte Definition der Komplexität auf die hier besprochenen Einflussfunktionen bezieht, so dass die dort beschrieben Doppeleigenschaft präzisiert werden kann: Mindestens eine von ihnen muss eine ***nichtlineare*** Funktion sein. Und die Einflussfunktionen auf einen bestimmten Freiheitsgrad dürfen *nicht nur* von diesem selbst abhängen. So kommt die ***Vernetzung*** ins Spiel! Je mehr Variablen vernetzt sind, und je mehr Einflussfunktionen nichtlinear sind, desto komplexer ist das System. Und hier ist die Atmosphäre Weltmeister unter den unbelebten Systemen.

Was den bereits in diesem Kapitel - im Vorgriff auf das Kapitel 5 - aufgenommenen ***'Phasenraum***-Aspekt' eines geschlossenen Systems von Differentialgleichungen betrifft, so neige ich eher zu einer ausschweifenden, statt zu einer noch einmal verdichtenden Ergänzung, (sie müssen's ja nicht lesen): Ich fotografiere gern Sonnenuntergänge und bin dabei meist fasziniert von der Bewölkung, die ja 'von hinten' beleuchtet wird, was das Erkennen eines großen Detailreichtums ermöglicht, z.B. unterschiedliche Wolkendichten, unterschiedliche Bewegungsformen in unterschiedlichen Wolkenhöhen. Und dann fällt mir ein, dass dieses 'Ortsraum-Bild' der Atmosphäre im ***Phasensraum*** längst nicht so 'schön' ist. Es besteht nur aus einem einzigen Punkt! Der bloße *Ort* dieses Punktes im Phasenraum macht es aus, dass die Wolke in Ortsraum gerade so aussieht. Die vielen Details stecken ja in den vielen Projektionen auf die Achsen des sehr hochdimensionalen Phasenraumes! Gestern hatten wir ein anderes Wolkenbild, aber es entsprach dem gleichen Zustandspunkt, der sich nur an einer anderen Stelle des Phasenraumes befand. Aber gestern wie heute verschlüsselt dieser so im Phasenraum verortete Zustandspunkt *nicht nur* diese Wolke, sondern auch alle anderen Wolken in jedem Winkel der Atmosphäre, und darüber hinaus auch alle Winde und Stürme, alle Hoch- und Tiefdruckgebiete, alle atmosphärischen Wellen- und Wirbelbewegungen usw.! Die ungeheuer *vielen* Projektionen auf die vielen Achsen des hoch-dimensionalen abstrakten Phasenraumes haben es möglich gemacht, die Unzahl der Freiheitsgrade durch Projektionen zu verschlüsseln, von denen mein schönes Foto nur einen winzigen Ausschnitt wiedergibt. (Sie haben es ja doch gelesen! Vielen Dank!)