3 Einfachste Mathematik: wenig Aufwand, großer Gewinn, viele Beispiele

Vorbemerkung:

Im Rundgang des zweiten Kapitels zur atmosphärischen Physik haben wir schon einige mathematische Formeln angesprochen, diese aber oft nur verbal formuliert und - wenn überhaupt - nur sehr kurze Hinweise auf mathematische Zusammenhänge gegeben. In einem allgemeinverständlichen Buch über Quarks & Kosmos, dessen genauen Titel und dessen Autor und ich leider vergessen habe, las ich einmal sinngemäß die Sätze: "Jede mathematische Formel in einem populärwissenschaftlichen Buch halbiert dessen Auflage. Ich verwende für meine Darstellungen nur eine Formel, sie heißt $E=mc^2$. Für diese Formel nehme ich die - zum Glück nur einmalige - Halbierung der Auflage gerne in Kauf".

Trotz des sympathisch-hintergründigen Humors in dieser Formulierung passt sie nicht so ganz zu Einsteins Äußerung: "Man sollte jede Diskussion und jede Sachdarstellung so einfach wie möglich gestalten, aber nicht *einfacher*"! Wenn man diesen Grundsatz allerdings durchsetzen möchte, ohne *jegliche* Mathematik anzuwenden, dann wird die Darstellung gerade für Laien besonders schwierig. Vielleicht haben Sie, liebe Leserin, lieber Leser, das hier und da im zweiten Hauptkapitel auch so empfunden. Wenn sich nun einige potentielle Leser von der bloßen Anwesenheit einiger *vorsichtig* angewendeter mathematischer Formulierungen abschrecken ließen, hätten sie sich ohne Not selbst benachteiligt. Auch wenn man die Lösungen von Gleichungen gar nicht betrachtet, haben sie schon einen hohen Erklärungswert, der Laien gut vermittelt werden kann. Oder, wie I. Stewart formuliert: "Man kann die Schönheit einer Gebirgslandschaft auch dann erkennen, wenn man die Berge nicht besteigt" [Stew08].

Diese Regel passt auf das vorliegende Buch beinahe noch besser als auf Stewarts ausgezeichnetes Buch, denn wir werden finden, dass es ganz besonders die Methode der mathematischen Systemtheorie ist, die es erlaubt, allein aus der Struktur der Systemgleichungen ganz entscheidende Schlussfolgerungen zu ziehen, ohne auch nur eine einzige Gleichung lösen zu müssen. Und das Beste dabei ist, dass die Struktur dieser Gleichungen nun wirklich einfach ist, wenn man einmal akzeptiert hat, dass ein abstrakter Raum auch mehr als drei Dimensionen haben kann. Das könnte ich Ihnen an dieser Stelle in wenigen Sätzen plausibel machen, aber dann verlasse ich die vorgesehene Reihenfolge der Themen.

3.1 Algebraische (diagnostische) Gleichungen und Theorie-Validierung

Worum geht es?

Ich halte es für vorteilhaft, unsere mathematischen Ergänzungen zum physikalischen Rundgang des vorigen Hauptkapitels mit ***algebraischen Gleichungen*** zu beginnen, die sich nicht - wie Differentialgleichungen - mit zeitlichen Änderungen von System-Variablen befassen, sondern mit zeit- und raumunabhängigen Beziehungen zwischen solchen Größen. Wir sprechen über einzelne Gleichungen und über Gleichungssysteme, über lineare und nichtlineare Gleichungen, über Konstanten, über Variablen und Freiheitsgrade, und erklären alles an sehr einfachen Beispielen.

An einer Stelle verlassen wir allerdings solche Ergänzungen der formalen Darstellungen durch *ausgedachte* Beispiele. Anhand der einfachen aber physikalisch inhaltsschweren algebraischen Gleichung zur Kennzeichnung der Energieerhaltung stellen wir uns die Frage, woher wir - bzw. *ob* wir überhaupt wissen, dass diese Gleichung richtig ist. So kommen wir auf die grundsätzliche ***Poppersche Methode*** der naturwissenschaftlichen Theorie-Validierungen zu sprechen, und darauf, dass diese Methode wegen ihres experimentellen Vorgehens auf das System Atmosphäre kaum anwendbar ist bzw. nicht angewendet werden sollte. Aber eine Verankerung der Energieerhaltung in allgemeinen Symmetrie-Prinzipien ermöglicht auch eine 'nicht-Poppersche' Validierungsform.

Einige algebraische Gleichungen - man nennt sie auch ***diagnostische Gleichungen*** - sind uns schon begegnet, z.B. die thermische Zustandsgleichung idealer Gase $p\upsilon = RT$ von Seite 148, wonach das Produkt aus Druck und spezifischem Volumen des idealen Gases zu allen Zeiten und an allen Orten proportional zu seiner Temperatur ist, oder die sogenannte Adiabatengleichung $p\upsilon^{\kappa} = \mathrm{const}$ von Seite 152, wonach bei adiabatischen und reversiblen Prozessen immer und überall das Produkt aus Druck und dem mit $\kappa \approx 1{,}4$ potenzierten spezifischem Volumen des idealen Gases konstant bleibt. Beides sind nichtlineare algebraische Gleichungen. Eine Gleichung, egal ob sie algebraisch ist oder eine Differentialgleichung, ist immer dann nichtlinear, wenn sie Variablen enthält, die mit sich selbst oder mit anderen multipliziert werden. Die Gleichung $p\upsilon^{\kappa} = \mathrm{const}$ ist offenbar 'hoch nichtlinear', denn hier wird sowohl p mit υ multipliziert, als auch υ mit sich selbst. Dass aber υ mit sich selbst *1,4 Mal multipliziert wird* - ich fürchte, liebe Laien-Leserin, lieber Laien-Leser, dass es Sie fast krank macht, akzeptieren zu sollen, dass solche 'unsinnigen' Definitionen 'angeblich' einen mathematischen Sinn haben. Aber sie haben tatsächlich einen Sinn, weil man durch sie ganz selbstverständliche Rechenregeln *allgemeiner* verwenden kann, ohne in Widersprüche zu geraten. Vielleicht kann ich Ihre Verzweiflung folgendermaßen ein wenig mindern: Schauen Sie sich einmal diese Folge an, die Sie sicherlich als 'richtig' akzeptieren:

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^1 = a$$

Wir haben von Schritt zu Schritt den jeweiligen linken Ausdruck durch a geteilt, um den jeweiligen rechten Ausdruck zu erhalten, nach dem Schema

$$a^4/a = a \cdot a \cdot a \cdot a/a = a \cdot a \cdot a = a^3; \quad a^3/a = a \cdot a \cdot a/a = a \cdot a = a^2; \quad a^2/a = a \cdot a/a = a = a^1$$

Wenn man diese Vorgehensweise *verallgemeinern* will, obwohl ja bei $a = a^1$ eigentlich Schluss ist, dann muss man *haargenau so* weitermachen, also stets den Potenzausdruck durch a teilen, und dabei jedes Mal die Potenzzahl um eins erniedrigen:

$$a/a = 1 = a^0, \quad a^0/a = 1/a = a^{-1}, \quad a^{-1}/a = a^{-2}, \quad a^{-2}/a = a^{-3} \quad \textit{usw.}$$

Wir haben nun solche Sachen wie: "Multipliziere a null Mal mit sich selbst“ oder sogar „Multipliziere a minus ein Mal mit sich selbst" widerspruchsfrei definiert! Widerspruchsfrei deswegen, weil wir die gültige Regel beachtet haben, dass man <u>*eine Potenz einer Zahl durch einen der Faktoren teilt, indem man den Nenner der Potenz um eins erniedrigt*</u>. Zur Verdeutlichung schauem wir uns noch einmal der letzten Schritt der obigen Reihe an, in aller Ausführlichkeit:

$$a^{-2}/a = (1/a^2)/a = 1/(a^2 \cdot a) = 1/a^3 = a^{-3}$$

Betrachten wir nun eine andere Reihe von Potenzen

$$a^8, \quad a^4, \quad a^2, \quad a^1 = a$$

Offenbar haben wir bei jedem Schritt die Wurzel gezogen. Z.B. ist ja $a^4 \cdot a^4 = a^8$, also gilt auch $\sqrt{a^8} = a^4$, ebenso $\sqrt{a^4} = a^2$ usw. Bei jedem Wurzelziehen wird also der Exponent halbiert, und bei $a = a^1$ ist wieder einmal 'eigentlich Schluss'. Wenn man diese Vorgehensweise ebenfalls verallgemeinern will, dann muss man auch hier *entsprechend* weitermachen, also von Schritt zu Schritt den Exponenten halbieren:

$$a^{1/2}, \quad a^{1/4}, \quad a^{1/8} \qquad \textit{usw.}$$

Man kann also tatsächlich widerspruchsfrei definieren, was es z.B. heißt, eine Zahl 'ein halbes Mal mit sich selbst zu multiplizieren', und man kann dadurch sogar altbekannte Rechenregeln über scheinbare Grenzen hinaus aufrechterhalten. Widerspruchsfrei war auch diese zweite Erweiterung, und zwar deswegen, weil wir die gültige Regel verwendet haben, dass man *Potenzen multipliziert, indem man die Exponenten addiert:* Tatsächlich ist ja in der Sequenz $a^8 - a^4 - a^2 - a - a^{1/2} - a^{1/4} - a^{1/8}$ jede Potenz das Doppelte der Potenz des *rechten* Nachbarn. Indem wir diese widerspruchsfreie mathematische Regel, die im 'normalen linken' Bereich der obigen Folge auch *anschaulich* ist, für den 'rechten' Bereich übernommen haben, haben wir die Anschaulichkeit zwar verloren, aber die Möglichkeit gewonnen, auch hier widerspruchsfrei mathematisch zu argumentieren und zu rechnen.

Wir haben soeben die Regel zum Multiplizieren von Potenzen für den Fall angewendet, dass die miteinander zu multiplizierenden Potenzen immer gleich waren - eben der rechte Nachbar der Sequenz. Übrigens hatten wir zur Berechnung der Tabelle von Seite 62 ebenfalls diese Regel angewendet, etwa als wir schrieben:

$$1 \text{ Billion} = (1 \text{ Million})^2 = (10^6)^2 = 10^{12}$$

Aber wir können ja auch zwei *verschiedene* Potenzen miteinander multiplizieren, z.B. die beiden Potenzen a^1 und $a^{2/5}$ **:**

$$a^1 \cdot a^{2/5} = a^{10/10} \cdot a^{4/10} = a^{14/10} = a^{1,4}$$

Wir haben hier also die Exponenten *ungleicher* Potenzen selbstverständlich verdoppelt, sondern einfach addiert. Die Zahlen haben wir so ausgewählt, weil so vielleicht auch eine gewisse Plausibilisierung für die Form des Exponenten der reversiblen Adiabaten-Gleichung 'herauskommt' (→Kapitel 2.7):

$$p\upsilon^{\kappa} = \text{const} \quad \textit{mit} \quad \kappa \approx 1{,}4$$

So viel zunächst zu nichtlinearen algebraischen Gleichungen. Ein Beispiel einer linearen algebraischen Gleichung wäre die spezifische (auf die Masse bezogene, → Seite 134) Gleichung der Energieerhaltung in isolierten Systemen, auch erster Hauptsatz der Thermodynamik oder Energieerhaltungssatz genannt

$$e = k + \phi + u = C \qquad (C = \text{const})$$

(s.u., Kap. 2.8). (e ist die Gesamtenergie, k, ϕ und u bezeichnen die spezifischen Teilenergien (kinetische, potentielle bzw. innere Energie). Hier gibt es keine nichtlinearen Produkte zwischen den einzelnen Variablen oder mit sich selbst. Diese Gleichung ist 'natürlich' zeit- und raum-*unabhängig*, aber die Werte der Variablen, die in dieser zeit- und raum-unabhängigen Beziehung stehen, sind ihrerseits zeit- und raum-abhängig. (Daher heißen sie ja '***Variable***').

Dass physikalische Gleichungen zeit- und raum- *unabhängig* sind, fällt unter die Kategorie ***Symmetrie-Eigenschaften*** der Physik. Würde es diese Raumzeit-Symmetrie nicht geben, dann wären ja die physikalischen Gesetze in vorigen Jahr oder heute oder morgen jedes Mal anders, und sie wären auch an jedem Raumpunkt - in New York, Tokyo oder in Berlin jedes Mal anders. Die Aussage der Zeit-Symmetrie ist aber identisch mit der Aussage der Energieerhaltung $e = k+\phi+u = const$! Und das ***Noether-Theorem*** [Noe18] lehrt, dass die Raum-Symmetrie identisch ist mit der Aussage der Impulserhaltung, aus der wiederum die Bewegungsgleichung folgt! Diese Verknüpfung der Raumzeit-Symmetrie mit solchen Erhaltungssätzen ist eine der tiesten Erkenntnisse der gesamten physikalischen Grundlagentheorie überhaupt. Die deutsche Mathematikerin Emmy Noether hatte sie 1918 gefunden.

Hat das Noether-Theorem irgendeine Relevanz für die Klimatheorie? Ich bin davon überzeugt, dass diese Frage zu bejahen ist: Auf Seite 21 hatte ich das Falsifizierungsprinzip in der Physik erläutert, [Popp35]: Nichts ist bewiesen, es gibt nur mehr oder weniger validierte Theorien, die viele oder weniger viele experimentelle Falsifizierungs-Experimente überstanden haben. Da man aber mit der Atmosphäre kaum Experimente machen kann - und sie auch nicht machen sollte - kann ein 'Wildwuchs' von Klimatheorien durch die sonst üblichen experimentellen Falsifizierungen kaum eingeschränkt werden.

Allerdings kann man sich fragen, ob das 'Überstehen' experimenteller Falsifizierungen die *einzige* Methode ist, Theorien zu validieren. Man könnte es auch als Validierung *einer speziellen Klimatheorie* werten, wenn der Nachweis gelingt, dass kein Widerspruch zu einer umfassenderen, *allgemeineren* und 'anerkannteren' Theorie vorliegt. Und hier setzt die Relevanz des Noether-Theorems [Noe18] auch für die Klimatheorie ein, denn etwas Allgemeineres und Anerkannteres als die Theorie, dass Theorien zur jeder Zeit und an jedem Ort gleich sind, gibt es wohl kaum. Wenn es anders wäre, wären Theorien nahezu wertlos.

Ursprünglich hatten wir die Gleichung der Energieerhaltung, $e = k+\phi+u = C$, nur als Beispiel für eine algebraische Gleichung aufgeführt. Aber weitschweifig, wie wir nun einmal sind, sind wir bei einer Äquivalenz dieser Gleichung mit der Zeitsymmetrie aller physikalischen Gesetze gelandet - wir haben den 'Rundgang-Charakter' der ersten beiden Kapitel offenbar noch immer nicht komplett verlassen. Wenn man sich z.B. anlässlich einer neuen physikalischen experimentellen Entdeckung unsicher ist, ob die Energie-Gleichung überhaupt stimmt, wird man die *Validität dieser Gleichung* anhand der Äquivalenz mit der Zeitsymmetrie zu schätzen wissen. Es gibt sogar ein berühmtes historisches Beispiel für genau diesen Fall! (Vorschlag: Bevor Sie, liebe

Leserin, lieber Leser, sagen dass das aber nun gar nichts mehr mit der Klimadiskussion zu tun hätte, lesen Sie bitte erst mal noch ein bisschen weiter).

Als man kurz vor Noethers Entdeckung auch den Beta-Zerfall von Atomkernen entdeckte - hauptsächlich durch Lise Meitner und Otto Hahn - hatte man den Energieerhaltungssatz 'fast' falsifiziert: Ein Neutron spaltetet sich laut Messung in ein Proton und ein Elektron auf. Das war 'in Ordnung', was den ***Ladungs-Erhaltungssatz*** betrifft - eine weitere wichtige Erhaltungs-Größe, die ebenfalls auf eine (hier aber quantenmechanische) Symmetrie zurückgeführt werden kann: Das Neutron hatte ebenso die Ladung Null wie das entstandene positiv geladene Proton und das entstandene negativ geladene Elektron zusammen. Aber die Energiebilanz stimmte nicht, die beiden durch 'Spaltung' entstandenen Teilchen hatten weniger Energie als das Ausgangsteilchen. Musste man also den Energieerhaltungssatz als falsch ansehen?

Im Jahre 1930, also 12 Jahre nach Noethers "Wonderful Theorem" (so ein Buchtitel von D.E.Neuenschwander, 2011, The Johns Hopkins University Press) machte der österreichische Physiker Wolfgang Pauli in einem offenen Brief an Lise Meitner den Vorschlag, den Energieerhaltungssatz beim Beta-Zerfall doch noch zu retten, indem man 'einfach' annimmt, dass beim Neutron-Zerfall neben dem Proton und dem Elektron noch ein drittes Elementarteilchen entsteht, welches der Träger der fehlenden Energie wäre. Pauli hatte für diese Vermutung nicht den geringsten experimentellen Hinweis.

Ich vermute, dass dieses Festhalten am Energieerhaltungssatz von Noethers Theorem [Noe18] beeinflusst war. Das ausschließlich zu diesem Zwecke postulierte Teilchen, von Enrico Fermi Neutrino genannt (es durfte natürlich keine elektrische Ladung enthalten), wurde erst 1956 von C.L. Cowan, F.Reines und Mitarbeitern experimentell nachgewiesen.

> *Somit galt der Energieerhaltungssatz 28 Jahre lang als experimentell falsifiziert, nur die Validierung durch Vereinbarkeit mit grundlegenderen Theorien hatte ihn 'am Leben' gehalten. Das kann man als Beispiel dafür ansehen, dass die Validierung einer speziellen Theorie durch Übereinstimmung mit einer allgemeineren Theorie tragfähiger sein kann, als die Validierung durch Übereinstimmung mit Experimenten, also mit nicht erfolgten experimentellen Falsifizierungen. Auch die Messtechnik hat Grenzen, so dass auch hierauf fußende Falsifizierungen falsch sein können!*

Nachdenkenswert ist vor allem, ob nicht *gerade in der Klimatheorie*, in der Popper'sche experimentelle Validierungen sowieso schwierig bis unmöglich sind, eine solche theoretische Validierung umso mehr versucht werden müsste. Ich überlasse es den Leserinnen und Lesern dieses Buches, selbst zu beurteilen, ob man Experimente mit der Atmosphäre - man nennt sie ja neuerdings 'geo-engineering' - machen sollte. Auch die sogenannte ***CCS-Technik*** (für Carbon Capture and Storage), welche eine unterirdische Einlagerung des 'schädlichen' CO_2 propagiert, gehört zur Gattung geo-engineering. *Für* diese hatte sich z.B. Prof. H.J. Schellnhuber in einer ZDF-Sendung 'Berlin-direkt' sehr engagiert: "Modellrechnungen zeigen: Ohne CCS keine Rettung vor der Katastrophe", [Schell-tv2]. Ich halte aber mit meine eigene Meinung nicht zurück: Da man Klima nicht vorhersagen kann, kann man auch den Ausgang solcher Experimente nicht vorhersagen. *Da* man das nicht kann, handelt es sich hier um nichts anderes als um ein *Experiment*, genauer gesagt um ein ***Falsifizierungsexperimente***, z.B. auch für für die AGW-Theorie. Und wehe uns allen, wenn ein so aufgefasstes Experiment einmal 'erfolgreich' sein sollte! Dann nämlich könnte - ausgelöst durch ein solches Experiment - der auf Seite 34 abgelichtete Buchtitel [IT/CIA78] wirklich stimmen!

Vor wenigen Jahren war man mit dem Forschungsschiff 'Polarstern' unterwegs zum Südatlantik, um die 'Menschheit zu retten', indem man dort Eisen ins Meer schüttete. Eisen düngt nämlich Algen, und Algen binden CO_2. Das Experiment hat aber nicht geklappt. Hierüber wurde auch in einer Fernseh-Dokumentation berichtet. Der Kommentar zum Misserfolg lautete sinngemäß: "Das Ökosystem 'Algen' ist offenbar komplex, daher konnte man die Reaktion auf die Eisendüngung nicht vorhersagen". Ich habe das als äußerst 'interessante' Aussage verbucht:

> *Ein vergleichsweise 'kleines' Untersystem des Klimasystems - bestehend aus den im Südatlantik befindlichen, mit CO_2 in Wechselwirkung stehenden Algen - wird also - korrekter Weise - als so komplex eingeschätzt, dass man es nicht vorhersagen kann. Das umfassende Klimasystem, welches außer diesem Untersystem noch ungeheuer viele andere Untersysteme umfasst, soll aber nach Meinung der gleichen Vertreter der AGW-Theorie vorhersagbar sein!*

Die Tatsache, dass das geschilderte Experiment *keine* signifikante CO_2-Verringerung gebracht hat, bedeutet nicht, dass es *gar keine Systemveränderungen* bewirkt hätte. Tatsächlich *hatten* sich die CO_2-reduzierenden Algen zwischenzeitlich vermehrt, nur sind diese dann von Krebsen gefressen worden. Statt CO_2 aus der Atmosphäre zu entziehen, hat man also gut genährte Krebse produziert. Das wollte man zwar nicht, scheint *hier* aber - zum Glück - nicht dramatisch zu sein. Dennoch: Wie das komplexe Ökosystem auf die ungewollte Veränderung reagiert, ist vorher *unbekannt!* Hier haben wir ein weiteres Beispiel für die Nicht-Vorhersagbarkeit komplexer Systeme, und somit auch für das Risiko, welches man bei der Durchführung von geo-engineering -Experimenten *prinzipiell* eingeht.

Zurück zur allgemeinen Aufspaltung der Gesamtenergie in die drei Energiearten k, ϕ und u. Zwar können sich diese Energiearten räumlich und zeitlich ändern, es sind ja schließlich raum- und zeitabhängige hydro-thermodynamische Felder. Wegen der durch die algebraische Gleichung $k+\phi+u = C$ ausgedrückten Beziehung zwischen ihnen bleibt aber ihre Summe in isolierten Systemen immer konstant! *Wenn* sich k und ϕ ändern - *ob* und *wie* sie sich ändern, sagen uns die noch zu besprechen Differentialgleichungen - dann kann die algebraische Gleichung auch die Änderung von u angeben, denn u muss jederzeit die zeit- und raumabhängige Summe der beiden anderen Energien zur Gesamtenergie des isolierten Systems ergänzen. M.a.W., wenn man die Werte von k und ϕ kennt, dann kann man den Wert von u ***diagnostizieren***. *Daher* nennt man algebraische Gleichungen auch ***diagnostische*** Gleichungen.

Die (spezifische) kinetische Energie k berechnet sich aus dem Quadrat der Geschwindigkeit v nach der Formel $k=(1/2)v^2$. Auch das ist natürlich eine algebraische Gleichung - aber eine nichtlineare - sie gestattet die Diagnose der kinetischen Energie aus der Geschwindigkeit. Möchte man umgekehrt die Geschwindigkeit aus der kinetischen Energie diagnostizieren, dann muss man die nichtlineare Ausgangs-Gleichung mit 2 multiplizieren und dann auf beiden Seiten die Wurzel ziehen. Beim Wurzelziehen erhält man aber *zwei* Lösungen. Z.B. ist $\sqrt{4}$ durch 2 gegeben, aber auch durch -2 (nach der guten alten Regel 'minus mal minus gleich plus'!). Dieses Ergebnis ist uns sehr willkommen: Wenn wir z.B. eine Geschwindigkeit nach Osten als positiv, und eine nach Westen als negativ definieren, dann müssen ja beide Geschwindigkeiten die gleiche kinetische Energie ergeben!

Interessant werden algebraische Gleichungen besonders dann, wenn sie 'x-beliebige', *unbekannte* Größen enthalten. Betrachten wir eine ganz einfache Textaufgabe: Ich sage dir *nicht*, wie alt Klaus ist. (Er sei also x Jahre alt). Aber ich sage Dir, dass die 10-jährige Elke 4 Jahre älter ist als er. Wie alt ist Klaus? Um das Alter von Elke zu erreichen, muss man offenbar zu x eine 4 addieren. Also muss man die algebraische Gleichung $x+4=10$ lösen, das heißt, man muss sie in die Form $x=\ldots$ umstellen. Natürlich sehen Sie direkt, dass $x = 6$ die Lösung ist. Aber manchmal ist das nicht so einfach wie hier, dann braucht man einen Lösungsweg. Und dieser besteht in geschickten Operationen auf beiden Seiten der Gleichung, hier in der Subtraktion von 4, ausführlich geschrieben $x+4-4=10-4$, und das heißt $x = 6$. Fazit: Eine Gleichung mit einer Unbekannten kann man lösen.

Geht das auch, wenn die gleiche 'Denksportaufgabe' gestellt wird, dabei aber *nicht* gesagt wird, dass Elke 10 ist? Dann ist auch *ihr* Alter eine Unbekannte, nennen wir sie y, und wir haben $x+4=y$. Was nun? Für $x=6$ und $y=10$ stimmt die Gleichung noch immer. Aber Klaus könnte ja auch 96 Jahre alt sein, und Elke 100, denn $96+4=100$ stimmt ja auch! Die Lösung ist nicht mehr ***eindeutig***. Sie kann aber mit einer zweiten Gleichung, durch eine weitere algebraische Beziehung zwischen x und y, wieder eindeutig gemacht werden. Es könnte z.B. als Zusatzbedingung gesagt werden, dass man die Zahl 60 bekommt, wenn man das Alter von Klaus und Elke miteinander multipliziert. Nun haben wie ein sogenanntes ***zwei-dimensionales Gleichungssystem***, nämlich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$x+4 = y$$
$$x \cdot y = 60$$

Statt $x \cdot y$ kann man auch hier wieder einfach xy schreiben. Die zweite Gleichung ist nichtlinear, denn sie enthält ja ein Produkt aus zwei verschiedenen Variablen. Schade, dass Sie das Ergebnis $x=6$ und $y=10$ schon kennen, denn sonst würden Sie mir schon eher glauben, dass man hier einen Lösungsweg wirklich braucht. Es gibt sogar mehrere Lösungswege, geschickte und weniger geschickte. Versuchen wir es damit, dass wir die obere Gleichung, umgeschrieben als $y = x+4$, in die untere Gleichung $x \cdot y = 60$ einsetzen:

$$x \cdot (x+4) = 60$$

Schön, dass wir nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten haben. Diese *kann* man ja lösen. Wenn man weiß, dass man eine Zahl mit einer Klammer multipliziert, indem man diese Zahl mit jeder Zahl in der Klammer multipliziert, hat man

$$x^2 + 4x = 60$$

Da wir von Anfang an wussten, dass $x = 6$ ist, kann man das natürlich einsetzen, (tun Sie es bitte), und feststellen, dass sowohl die Klammerform als auch die ausgeklammerte Version dieser Gleichung für $x = 6$ erfüllt ist. Die 'Probe' ist bestanden, und dabei haben Sie gewissermaßen auch die Klammerregel bewiesen! Aber normalerweise kennt man ja die Lösung an dieser Stelle noch nicht. Eigentlich wollen wir ja umgekehrt aus dieser Gleichung die Lösung erst *erhalten*, und diese geht aus den obigen Gleichungen so ohne weiteres nicht hervor. Wir haben den Lösungsweg noch nicht bis zum Ende durchschritten.

Wir machen weiter mit einer geschickten Umformung: wir addieren auf beiden Seiten der letzten Gleichung eine 4 und erhalten $x^2 + 4x + 4 = 64$. Warum, um Himmels willen, machen wir das? Wieder einmal wegen der Klammer-Regeln: Rechnen Sie doch einmal aus, was $(x+2)\cdot(x+2)$ ist! Wenn man jeden Term der linken Klammer mit jedem Term der rechten Klammer multipliziert, erhält man gerade die linke Seite unserer Gleichung $x^2 + 4x + 4 = 64$! Und da 64 auch noch das Quadrat von 8 ist, hat die durchgeführte Ergänzung dazu geführt, dass wir die ganze ursprüngliche Gleichung $x^2 + 4x = 60$ auch so schreiben können:

$$(x+2)^2 = 8^2$$

Nun ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel und erhalten wie gewünscht $x+2 = 8$ oder eben $x = 6$! Den Wert $y=10$ erhält man aus $x+4 = y$ *oder* aus $xy = 60$. Dass auch $(-8)^2 = 64$ ist, verstört uns ein bisschen, bedeutet es doch ein negatives Alter für Klaus! Aber immerhin bestätigt dieser Befund die vorher schon einmal geäußerte Bemerkung, dass quadratisch nichtlineare Gleichungen *zwei* Lösungen haben. Nun lernen wir aber, dass nicht immer jede mathematische Lösung in der Natur realisiert ist. So etwas nennt man einen Symmetriebruch - aber das nur nebenbei. Zum Verständnis des Klimas benötigen wir das nicht. (Aber für die extrem Neugierigen unter uns: für manche Elementarteilchen, sogenannte Antiteilchen, läuft die Zeit tatsächlich rückwärts! Vorstellen kann ich mir das nicht, muss man aber auch nicht. Die Elementarteilchenphysiker können es auch nicht).

Das obige Beispiel für ein zwei-dimensionales algebraisches System war nicht das denkbar einfachste, denn es war wegen der sich zu $y = x+4$ gesellenden Gleichung $xy = 60$ nichtlinear! Die zur eindeutigen Lösung $x = 6$ und $y = 10$ passende zweite Bedingungsgleichung *hätte* auch eine lineare Gleichung wie $x+y = 16$ sein können. Setzt man die erste Gleichung $y=x+4$ *hier* ein, so folgt $x+x+4=16$ oder $2x = 12$ oder $x = 6$! Das war's auch schon! $y=10$ erhält man ja sofort aus jeder der beiden linearen Gleichungen. Offenbar sind lineare Gleichungs-Systeme leichter zu handhaben als nichtlineare. Das gilt erst recht für Differentialgleichungs-Systeme wie das für die Atmosphäre. Manche halten das letztere sogar für das komplexeste praxisbezogene Gleichungssystem überhaupt. Ein Blick auf das Beispiel von Seite 109 könnte uns in der Meinung bestärken, dass das stimmt. Dabei enthält auch dieses Fortak'sche Gleichungssystem [For68] noch nicht die 'ganze Wahrheit', wie dort auch diskutiert wird. Dass es in einem Modell eine 'ganze Wahrheit' - über alle relevanten Details der Realität - sowieso nie geben kann, ist ja das Thema dieses Buches.

So, nun haben wir uns wohl doch etwas verlaufen. Wo stehen wir in unserem Exkurs über algebraische Gleichungen? Dass man eine Gleichung mit einer Unbekannten lösen kann, war unser erstes Fazit zu Beginn dieses Kapitels. Gerade haben wir gelernt, dass man auch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten eindeutig lösen kann. Und nun glauben Sie mir bitte: Man kann zum Beispiel auch 12 Gleichungen mit 12 unbekannten Variablen lösen. Immer wenn die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt, die zu berechnen sind, hat man ein eindeutig lösbares, ein ***geschlossenes Gleichungssystem*** vor sich.

Hat man aber weniger Gleichungen als Variable, gibt es keine eindeutige Lösung: die obige *eine* Gleichung $x+4 = y$ mit den *zwei* Variablen x und y hatte viele Lösungen, wie gesehen. Und umgekehrt bilden mehr Gleichungen als Unbekannte ein ***überbestimmtes System***, und es kommt zu Widersprüchen: Neben der Bedingung $x+4=10$ kann beispielsweise nicht auch $x+5=10$ gelten.

Egal, ob wir das nichtlineare algebraische Gleichungssystem $x+4 = y$ und $x \cdot y = 60$ wählen oder das lineare algebraische Gleichungssystem $x+4 = y$ und $x+y = 16$, die sich aus beiden Gleichungssystemen ergebenden Lösungen $x = 6$ und $y = 10$ gelten zu allen Zeiten. Man kann sie in Stein einmeißeln. Das gilt *nicht* für Lösungen von Differentialgleichungen, die wir im nächsten Kapitel besprechen.

Vorab nur so viel: So wie Lösungen algebraischer Gleichungen Zahlen sind, so sind Lösungen von Differentialgleichungen Funktionen, meist Funktionen der Zeit (→ Seiten 42 und 59). Wenn diese Differentialgleichungen Modellgleichungen eines physikalischen Systems sind, dann beschreiben sie das simulierte physikalische Verhalten dieses Systems, indem sie das Zeitverhalten seiner Variablen berechnen. Noch einmal: Systemvariable, deren zeitliche *Veränderungen* durch für sie zuständige Differentialgleichungen bestimmt werden, nennt man auch ***Freiheitsgrade***. Die in Stein gemeißelten Größen, die Lösungen von algebraischen Gleichungen also, würde man wohl nicht Freiheitsgrade nennen, auch nicht die unveränderlichen Lösungen $x=6$ und $y=10$ der algebraischen Systeme $x+4 = y$ und $x+y = 16$ oder $x+4 = y$ und $x \cdot y = 60$.

Was würde eigentlich passieren, wenn man die Gleichung $x+4 = y$ nicht durch eine weitere (lineare oder nichtlineare) *algebraische* Gleichung zu einem zwei-dimensionalen Gleichungssystem ergänzen würde, sondern durch eine Differentialgleichung? Mathematisch geschrieben, sähe das dann so aus:

$$\begin{aligned} y &= x+4 \\ dx/dt &= f(x,y) \end{aligned}$$

Die linke Seite der Differentialgleichung beschreibt die 'Schnelligkeit' der zeitlichen Änderung von x, und die rechte Seite besteht aus einer ***Einflussfunktion***, die die Art und Weise der Auswirkung der Größen x und y auf die x-Veränderung beschreibt - also die ***Vernetzung***. All das wird im nächsten Kapitel sehr ausführlich erläutert. Jedenfalls ist nun x ein variabler Freiheitsgrad und keine unveränderliche Zahl mehr. Die Größe y ist zwar noch immer kein *Freiheitsgrad* geworden, (für y steht ja keine eigene Differentialgleichung zur Verfügung, sondern 'nur' eine algebraische Gleichung), aber y ist auch keine in Stein gemeißelte Zahl mehr, denn sie 'muss' ja immer um 4 größer sein als der *variable* Freiheitsgrad x. Auf *diese* Weise, und nicht durch eine 'eigene' Differentialgleichung, wird auch y zeitabhängig. y hat keine eigene, von x unabhängige Zeitabhängigkeit, sie wird ja nur durch eine algebraische Gleichung an die Zeitabhängigkeit von x 'gefesselt', 'mitgeführt', oder - wenn man so will - 'versklavt'. Erst wenn die algebraische Gleichung $y = x+4$ im obigen zwei-dimensionalen Gleichungssystem durch eine prognostische Differentialgleichung ersetzt wird, hat man keine diagnostische *Mitführung* mit dem Zeitverhalten anderer Variablen mehr. Die *beiden* Differentialgleichungen haben dann *beiden* Variablen den Status von Freiheitsgraden gegeben, so dass sie sich nun nicht mehr 'parallel' zueinander verändern müssen, sondern über *unterschiedliche* Einflussfunktionen jeweils eigene, 'freie' zeitliche Entwicklungen erfahren.

Aus physikalischer Sicht ist es ein riesiger Unterschied, ob eine zeitabhängige Systemvariable ein 'echter' Freiheitsgrad mit einer eigenen Differentialgleichung ist, die ihren Zeitverlauf ***prognostizieren*** kann, oder ob sie ihre Zeitabhängigkeit nur dadurch erwirbt, dass sie ***diagnostisch*** starr an den prognostizierten Zeitverlauf eines Freiheitsgrades angekoppelt wurde. Daher heißen ja algebraische Gleichungen auch ***diagnostische Gleichungen***, und Differentialgleichungen heißen daher auch ***prognostische Gleichungen***. Dieser Unterschied wird sich später als äußerst wichtig erweisen bei der Beurteilung der Vorhersagbarkeit von Wetter und Klima.

Zur sprachlichen Kennzeichnung dieses Unterschiedes schlage ich folgende Terminologie vor: Falls - wie in unserem Beispiel - eine Zeitabhängigkeit $y(t)$ *nicht* durch eine 'eigene' prognostizierende Differentialgleichung vermittelt wird, sondern durch eine algebraische Gleichung, die $y(t)$ starr an eine andere Variable ankoppelt, die ihrerseits aufgrund einer für sie zuständigen Differentialgleichung ein *Freiheitsgrad* ist, dann nennen wir das Zeitverhalten der Variablen y ***algebraisch*** *(oder* ***diagnostisch****)* ***versklavt****.*

Diese algebraische Versklavung einer Variablen ist nur dann negativ zu beurteilen, wenn man für eine Prognose dieser Variablen 'eigentlich' eine Differentialgleichung zur Berechnung dieser Variablen finden und verwenden müsste. Das ist z.B. bei der Verwendung der idealen Gasgleichung $p = RT/\upsilon$ im Modell der Ideal-Atmosphäre nicht der Fall. Wie auf Seite 135 besprochen, berechnet man in diesem Modell den Druck algebraisch aus den durch Differentialgleichungen gefundenen Temperaturwerten und den Werten für das spezifische Volumen. (In Kapitel 4 werden wir plausibilisieren, dass man zwei Differentialgleichungen für diese beiden Freiheitsgrade T und υ herleiten kann)**,** Die Verwendung ist also 'gesunde' Physik im Rahmen der

Voraussetzungen für ideales Gas, wie in Kapitel 2.7 ausführlich besprochen. Eine weitere Differentialgleichung für p benötigt man also nicht mehr - dank der diagnostischen Gleichung. Man könnte sagen, hier macht die Natur selbst die Versklavung.

Es gibt aber sehr viele Beispiele dafür, dass diese Versklavung notgedrungen von 'Menschenhand' verursacht werden *muss*, z.B. dann, wenn ein Klimamodellierer gern eine Differentialgleichung für eine bestimmte Variable in sein Modell einbauen würde, dieses aber aus Gründen der Rechenkapazität oder einer nicht ausreichenden allgemeinen physikalischen Kenntnis nicht tun kann. Dann muss er diese Variable unberücksichtigt lassen oder sie algebraisch versklaven. Letzteres bezeichnet man mit dem verharmlosenden Begriff ***Parametrisierung*** (→ auch Seite 65 und 112).

Es ist - bei der Fülle der atmosphärischen Freiheitsgrade - völlig ausgeschlossen, dass bei Klima-Modellierungen für jeden Freiheitsgrad eine eigene Differentialgleichung zur Verfügung gestellt werden kann. Wenn ein solcher Freiheitsgrad nicht völlig unberücksichtigt bleiben soll, 'verknüpft' - 'versklavt' - *'parametrisiert'* - man ihn in der Regel mittels einer diagnostischen Beziehung mit einem Freiheitsgrad, dem von *seiner* Differentialgleichung ein Zeitverhalten zugewiesen wird, ein Zeitverhalten, von dem man höchstens vermuten kann, dass es dem Zeitverhalten der parametrisierten Variablen einigermaßen ähnlich ist - aber niemals gleich sein kann. Entscheidend ist: Alle in einen Gesamtprozess eingebetteten Teil-Prozessverläufe, die man nicht vorhersagen kann, wirken wie Zufallsprozesse. Und in Kapitel 5 werden wir sehen, dass solche Zufalls-Anteile des Gesamtprozesses von den deterministischen Anteilen des Gesamtprozesses auch noch dynamisch verstärkt werden!

Hier ist allerdings der nochmalige Hinweis angebracht, dass Parametrisierungen nicht aus Leichtfertigkeit der Modellbauer angewendet werden, sondern zwangsweise angewendet werden *müssen*. Es gibt nur sehr wenige Hinweise auf Ersatzmethoden wie etwa die Methode der sogenannten ***Modellparametrisierung*** [For69], [Lan82], [Lan90]. Hier parametrisiert man nicht ausschließlich mithilfe von algebraischen Beziehungen, sondern mithilfe von 'kleinen, niedrigdimensionalen' Differentialgleichungen, gewissermaßen 'Modell-Modulen', die - wiederum zwangsweise - Vernetzungen mit nur sehr wenigen anderen Freiheitsgraden verwenden.

Ein weiterer und sehr wichtiger Hinweis ist folgender: Der soeben eingeführte Begriff diagnostische Versklavung darf nicht verwechselt werden mit der Versklavung, die H. Haken schon 1982 eingeführt hatte [Hak82]. Dort geht es nicht wie hier um eine Versklavung von jeweils *eines* Freiheitsgrades im Sinne diagnostischer Ankopplung an *einen* - anderen - Freiheitsgrad, sondern um eine Versklavung von sehr *vielen Freiheitsgraden* durch *einen* anderen (oder durch sehr wenige andere) *Freiheits-*

grade, die Hermann Haken ***Ordner*** nennt. Diese ***synergetische Versklavung*** ist nur in hochkomplexen Systemen möglich. Nur diese haben sehr viele Freiheitsgrade, deren kollektive synergetische Versklavung zu ***Selbstorganisations-Prozessen*** - zu ***Strukturbildungen*** - führen. Wir kommen noch mehrfach darauf zurück.

Ein weiterer - *noch* wichtigerer - Unterschied zwischen der hier so benannten algebraischen Versklavung und der Haken'schen synergetischen Versklavung ist der, dass die erstere nur ein Notbehelf für die Modellierung eines Freiheitsgrades ist, deren Modellierung in Form einer korrekten Differentialgleichung wegen der Komplexität der Realität unmöglich ist. Die synergetische Versklavung hingegen ist *kein* Modell, welches einen notwendigen Rückzug von der Realität propagiert. Sie ist im Gegenteil ein Modell, welches eine Eigenschaft komplexer Systeme *beschreiben* soll, nämlich die geheimnisvolle Eigenschaft, selbstorganisatorisch Ordnungsstrukturen bilden zu können. Allerdings ist es nicht das einzige Modell, welches dieses Ziel verfolgt, wie schon auf Seite 179 beschrieben.

Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

Wir haben in diesem Kapitel zur Veranschaulichung von algebraischen (diagnostischen) Gleichungen fast nur spontan ausgedachte einfache Gleichungen verwendet. Die einzige Ausnahme war die sehr spezielle Gleichung $e = k+\phi+u = const$, die die Erhaltung der aus kinetischer, potentieller und innerer Energie zusammengesetzten Gesamtenergie in isolierten Systemen beschreibt. Der Anlass für diese Ausnahme war die sich aus dem theoretischen Hintergrund dieser Gleichung - die Raumzeit-Symmetrie der Physik - abzeichnende Möglichkeit einer 'theoretischen' Validierung von physikalischen Theorien als Ergänzung zur bekannteren und üblicheren Popperschen experimentellen Validierung [Popp35]. Für die atmosphärischen Wissenschaften, insbesondere für die Klimatologie, sollte dies sogar die *einzige* Validierungs-Methode sein, denn Experimente mit der Atmosphäre, die z.B. als 'geo-engineering' immer häufiger ins Gespräch kommen, können äußerst gefährlich sein.

Algebraische Gleichungen können also gut validierten Naturgesetzen entsprechen, sie können aber auch als 'Ersatzgleichungen' für nicht bekannte oder nicht anwendbare Differentialgleichungen verwendet werden. Dies entspricht der - notwendigerweise - extrem häufig verwendeten ***Parametrisierung*** von Variablen, die uns auch im nächsten Kapitel beschäftigen wird. Notwendig ist diese Vorgehensweise deswegen, weil wegen der auf den Seiten 28 und 116 beschriebenen notwendiger Weise großen Gitterabstände viele Variable in der Realität wesentlich kleinere Strukturen bilden können als die, die man im Modell-Gitter erfassen kann. Die vermeintliche Lösung dieses Problems wird in der Fachsprache mit der Behauptung umschrieben, dass man '***subskalige Prozesse parametrisieren***' könne.