

2.7 *Ideales Gas und Ideal-Atmosphäre - Experimente und Zustandsebene*

Worum geht es?

Die physikalischen Veränderungen der Luftpäckchen, die sie bei Kompression in konvergenter Strömung bzw. bei Expansion in divergenter Strömung erfahren, kann man auch in einer Messvorrichtung untersuchen, die einer Luftpumpe 'ohne Ventil' ähnelt, in welcher das Luftpäckchen eingesperrt ist und dessen Kolben heruntergedrückt oder hochgezogen wird. So kann man das Volumen des Luftpäckchens kontrolliert einstellen und den sich dadurch verändernden Druck und die Temperatur genauer und weniger 'umständlich' messen, als wenn man während der Messung mit dem Lagrange-Luftpäckchen in der konvergenten (also komprimierenden) Strömung mitschwimmen müsste und zudem die Volumen-Verkleinerung aus der Strömungsform heraus ermitteln müsste.

Solche Messungen haben Boyle, Mariotte, Amontons und Gay-Lussac Ende des 17. und Anfang des 18. Jahrhundert an idealem Gas vorgenommen. (Das ist ein Gas-Modell, in dem die Moleküle kräftefrei herumfliegen, wenn sie nicht gerade untereinander oder mit Begrenzungswänden zusammenstoßen, und dass *trockene* Luft recht gut modelliert). Um übersichtliche Messergebnisse zu erhalten, haben sie allerdings in ihren Versuchsserien nicht alle drei Variablen v , p und T variiert, sondern nur zwei. Zum Konstanthalten von je einer dieser Variablen, m.a.W. zur Erzeugung sogenannter **isochorer**, **isobarer** oder **isothermer** Prozesse, muss man allerdings noch eine vierte Variable des Gases betrachten, die spezifische **Entropie** s , die man ebenso wie das spezifische Volumen v frei einstellen können muss. (Deswegen ist die Messapparatur doch 'mehr' als eine Luftpumpe, mit der man nur das Volumen einstellen kann). Die Vorgabe von s geschieht nicht über Kolbenverschiebungen, sondern über Heizen oder Kühlen von außen durch eine wärmedurchlässige Wand hindurch. So wie Kolbenverschiebungen (physikalisch gesehen) Volumen - Austauschprozesse zwischen dem Gassystem und dem Umgebungs-System sind, so entsprechen die Erwärmungen bzw. Abkühlungen Entropie - Austauschprozessen.

Ausblick: In Kapitel 4 werden wir sehen, dass man die in diesem Kapitel herzuleitende algebraische **Zustandsgleichung idealer Gase** um zwei relativ einfache thermodynamische Differentialgleichungen und um nur eine hydrodynamische Vektor-Differentialgleichung für den Wind ergänzen muss, um das berühmte Modell der Ideal-Atmosphäre zu formulieren. Dieses Modell ist im Rahmen der Thematik dieses Buches extrem wichtig, denn es ist gewissermaßen das 'letzte' Modell, welches noch zuverlässige Vorhersagen ermöglicht, aber leider nur für die Ideal-Atmosphäre, in der es noch nicht einmal regnen kann, nicht für die reale Atmosphäre. Jeder weitere

Schritt in Richtung zunehmender Komplexität verhindert zunächst die *zuverlässige* Vorhersage (an Wetterberichten für die nächsten Tage oftmals abzulesen) oder sie verhindert die **Vorhersagbarkeit** überhaupt. Dass dem so ist, erkennt man am besten, wenn man vorher erkannt hat, aus welchen Gründen die Ideal-Atmosphäre noch vorhersagbar ist. Dann merken auch Laien, warum diese Gründe in komplexeren Modellen verloren gehen. Das ist der Grund dafür, dass wir im anstehenden Kapitel zur Zustandsgleichung idealer Gase die diesbezügliche Physik ziemlich ausführlich darstellen werden.

Es gibt nicht nur die im vorigen Kapitel beschriebenen Beeinflussungen der hydrodynamischen Variablen durch die thermodynamischen (und umgekehrt), sondern auch Beeinflussungen bestimmter thermodynamischer Variablen durch bestimmte andere. Diese 'thermodynamisch-internen' Wechselwirkungen sind der Gegenstand dieses Kapitels. Natürlich gibt es auch Beeinflussungen hydrodynamischer Variablen durch andere hydrodynamische Variable. Aber solange wir uns wie hier mit dem idealen Gas beschäftigen, hält sich der Erklärungsbedarf *dazu* in Grenzen. Hier gibt es als hydrodynamische Variable nur die drei Komponenten v_x , v_y , v_z des Windvektors \mathbf{v} , und wenn ein Südwind zum Westwind dreht, dann besteht die Vernetzung natürlich darin, dass sich (bei 'üblicher' Orientierung des Achsensystems) die Komponente v_x auf Kosten der Komponente v_y vergrößert.

Mithilfe der Erkenntnisse, die wir bei der Diskussion der Wechselwirkungen zwischen nur thermodynamischen Variablen gewinnen, lässt sich auch die Grenze zwischen Vorhersagbarkeit und Nichtvorhersagbarkeit besser verstehen, wie sich später bei der Diskussion der Vorhersagbarkeit des Klimas erweisen wird: Wir werden sehen, dass Wechselwirkungen innerhalb eines idealen Gases 'exakt' vorhersagbar sind, innerhalb eines realen Gases aber nicht. Das ideale Gas ist im Wesentlichen dadurch gekennzeichnet, dass auf seine Moleküle nur dann Kräfte wirken, wenn sie untereinander oder mit Wänden kollidieren. Wenn Wasserdampf in der Luft enthalten ist, so kann sie schon deswegen kein ideales Gas mehr sein, weil z.B. beim Kondensieren von Wasserdampf zu Wolkentröpfchen molekulare Bindungskräfte vorhanden sein müssen. Oder anders ausgedrückt, bei **realem Gas** besteht die innere Energie *nicht nur* aus thermischer Energie, der Bewegungsenergie der Moleküle.

Die zunächst wichtigsten Variablen des idealen Gases sind seine *Temperatur* T , sein Druck p und sein spezifisches Volumen v . (Später kommen wir nicht umhin, noch die Entropie s einzuführen). Je 'glatter', je 'stetiger' die dreidimensionalen Temperatur- und Druckfelder sind, je kleiner also die Luftpäckchen sind, desto kleiner ist auch der

Fehler, pro Luftpäckchen nur eine einzige Angabe zur Temperatur und zum Druck zu machen. Andererseits dürfen diese Luftpäckchen nicht allzu klein sein, denn es müssen so viele Luft-Moleküle in ihnen enthalten sein, dass man über das Verhalten dieser Moleküle sinnvoll mitteln kann. Dass hier ein Kompromiss tatsächlich möglich ist, besagt das Gesetz vom **stabilen lokalen thermodynamischen Gleichgewicht**. Was heißt das?

Halten wir uns noch einmal das molekulare Chaos vor Augen, das in einer 4-Liter Box herrscht, in die die 10^{23} (100 Trilliarden) Moleküle des Luftpäckchens von Seite 44 eingeschlossen sind, von denen jedes pro Sekunde $5 \cdot 10^9$ (5 Milliarden) mal mit anderen zusammenstößt. Da diese Kollisionen vom bloße Zufall regiert werden, sie also gewissermaßen die Molekülansammlung ständig 'durchmischen', muss man wohl annehmen, dass sich jedem kleinen (infinitesimalen) Teilvolumen dV der Box etwa die gleiche Anzahl von Molekülen aufhält, die zusammengenommen die Masse dm haben. Nun ist aber der Quotient dm/dV gerade die **Massendichte**, $\rho = dm/dV$ (\rightarrow Seite 123), so dass wir soeben aus der molekular-kinetischen Anschauung heraus vermuten konnten, dass die **Dichte** im ganzen Gas-Volumen konstant ist. Ganz ähnlich kann man argumentieren, dass auch der **Druck** p (als Mittelwert über die molekularen Impulsänderungen) überall konstant ist, und ebenso die Temperatur (als variierender Parameter von Funktionen, die die Wahrscheinlichkeiten für molekulare Geschwindigkeiten regelt, wie die Skizze von Seite 80 veranschaulicht). Die so beschriebene räumliche Homogenität all dieser Größen hat ihren physikalischen Grund in der Stabilität des sogenannten **thermodynamischen Gleichgewichtes**.

Gleichgewichte können stabil oder labil sein: Eine Kugel in einem Eierbecher ist im Gleichgewicht, eine Kugel oben auf der Spitze eines Eies aber auch. Nur ist das Gleichgewicht im ersten Beispiel stabil, denn die Kugel wird nicht wegrollen. Aber im zweiten Fall kann die Kugel sehr leicht wegrollen: ihre Lage ist labil (d.h. instabil), denn schon die kleinste Störung - das kleinste 'Antippen' - beendet den Gleichgewichts-Zustand! Die Kugel fällt herunter, weil die Störung eine forttriebende Kraft (Schwerkraft) ins Spiel gebracht hat. Eine Störung der Kugel im Inneren des Eierbechers hätte zwar auch die Gravitationskraft ins Spiel gebracht, aber diese Kraft hätte ja die Kugel zum Gleichgewichtspunkt zurück gebracht, und nicht von ihm fortgetrieben. Das ist ein Beispiel für ein sehr wichtiges allgemeines Prinzip, das sogar auf komplexe Systeme wie die Atmosphäre angewendet werden kann und muss! In einer etwas gehobenen, aber präzisen Fachsprache lautet diese Verallgemeinerung folgendermaßen:

Ein Gleichgewichtszustand eines beliebigen physikalischen Systems ist dann und nur dann stabil, wenn Störungen dieses Zustandes Prozesse einleiten, die den alten Zustand wieder herstellen

Ist also unser thermodynamisches Gleichgewicht stabil oder nicht? Eine Störung dieses Zustandes liegt vor, wenn sich in einem kleinen Volumen dV mehr Moleküle befinden als im Durchschnitt. Dann wird die Masse dm , also auch $\rho = dm/dV$ an dieser Stelle etwas größer, das homogene Gleichgewichts-Dichtefeld wäre gestört. Wird diese Störung anwachsen wie beim labilen Gleichgewicht, oder wird sie 'stabilisiert', also zurückgehen? Natürlich letzteres, denn wegen der *zusätzlichen* Moleküle im gestörten Teilbereich dV setzen sich aufgrund der Zufallsbewegungen im Mittel auch mehr nach außen ab, und es werden auch mehr Moleküle *von* außen getroffen, so dass mehr Moleküle als vor der Störung aus dV 'herausgeschossen' werden.

Und was war mit dem '*lokalen*' thermodynamischen Gleichgewicht gemeint? Dieser Begriff soll die Tatsache beschreiben, dass das stabile 'normale' thermodynamische Gleichgewicht auch in sehr kleinen - infinitesimalen - Luftpäckchen noch herrscht, wobei der Begriff 'infinitesimal' dafür steht, dass die Sprünge der Werte von ρ , p und T von Luftpäckchen zu Luftpäckchen so klein sind, dass man von stetigen thermodynamischen Feldern sprechen kann.

Man kann die Charakterisierung des idealen Gases durch die Dichte ρ natürlich auch ersetzen durch das **spezifische Volumen** $v = V/m$. Später kommt zu unseren Betrachtungen aber noch eine *wirklich* neue Variable hinzu, die schon zwei Seiten früher angekündigt haben, die (**spezifische**) **Entropie** mit dem Symbol s . 'Spezifisch' heißt allerdings nicht *immer* 'auf die *Masse* bezogen'. Z.B. ist ja das berühmte spezifische Gewicht ein 'auf das *Volumen* bezogenes' Gewicht:

$$\text{Spezifisches Gewicht} = \text{Gewicht} / V$$

Und um die Verwirrung noch zu steigern: Auch die Dichte selbst ist eine spezifische Größe, denn

$$\rho = m/V$$

besagt ja, dass auch die Dichte eine 'auf das Volumen bezogene' Größe ist. Die Masse und das Gewicht (der Masse m) unterscheiden sich nur durch den Faktor *Schwerebeschleunigung*, auch *Fallbeschleunigung* genannt, das meist mit dem Symbol g abgekürzt wird (was wiederum an 'Gravitation' erinnert). Wie dem auch sei, wichtig für uns ist nur, dass das spezifische Volumen das Reziproke der Dichte ist, was wir noch einmal festhalten:

$$\rho = 1/v$$

Wenn man also v hat, hat man auch ρ , und umgekehrt. Man muss ja nur den jeweiligen Kehrwert nehmen! Falls soeben Verwirrung erzeugt wurde, können wir sie hoffentlich doch noch beseitigen, indem wir folgendermaßen zusammenfassen:

*Die Dichte $\rho = m/V$ ist die **volumenspezifische Masse**.*

*Das spezifisch Volumen $v = V/m$ ist das **massenspezifische Volumen**.*

Man kann also die Charakterisierung des idealen Gases durch die Dichte ρ auch ersetzen durch das **spezifische Volumen**. Später kommt zu unseren Betrachtungen aber noch eine *wirklich* neue Variable hinzu, die **spezifische Entropie** mit dem Symbol s .

Wenn *nur* von 'spezifisch' die Rede ist, meinen wir immer *massenspezifisch*, so dass auch in Zukunft der Begriff 'spezifisches Volumen' erlaubt bleibt. Allerdings ist der so verstandene Begriff 'spezifische Masse' sinnlos: 'Masse pro Masse' entspricht der Zahl '1', $m/m = 1$!

Wir werden in diesem Buch noch viele spezifische Größen kennenlernen, und immer wenn es 'geht', unterscheiden wir die ursprüngliche von der spezifischen Größe dadurch, dass wir statt des großen den kleinen Buchstaben verwenden. Genau so haben wir es ja in $v = V/m$ gehalten. Bezeichnen wir z.B. die **Energie** mit dem Symbol E , dann ist die spezifische Energie $e = E/m$.

In der Mechanik ist die Gesamtenergie die Summe aus zwei **Energiearten**, der **kinetischen** und der **potentiellen Energie**, symbolisch $E = K+P$. Die spezifische kinetische Energie ist also $k = K/m$. Aber für die spezifische potentielle Energie kann man schwerlich $p = P/m$ schreiben, denn das Symbol p ist für den Druck schon vergeben! Man schreibt 'ersatzweise' $\phi = P/m$, und so lautet die Aufspaltung der spezifischen Energie: $e = k+\phi$. Wenn man Thermodynamik betreibt, kommt noch eine dritte **Energieart** ins Spiel, die **innere Energie** mit dem Symbol U : $E = K+P+U$. Hier 'klappt' wieder die übliche Symbolik für den Übergang zu spezifischen Größen: $u = U/m$ und $e = k + \phi + u$.

Hier dienen die Energiearten nur als Beispiele für die formale Bildung spezifischer Größen. Was sie physikalisch *bedeuten*, wird uns noch häufig beschäftigen, beginnend mit Kap. 2.8.

Wie drückt sich nun die behauptete Vernetzung zwischen T , p und z.B. v aus? Dazu müssen wir einen kleinen Vorgriff auf die sogenannte **Ideal-Atmosphäre** machen. Sie ist ein sehr einfaches **Modell** des realen Systems Atmosphäre. Ein Modell ist

zwar *immer* eine Vereinfachung der Realität, aber die Ideal-Atmosphäre ist eine besonders starke. Wir beschreiben es genauer - zusammen mit dem *noch* einfacheren Flachwasser-Modell - in Kap 4. An dieser Stelle müssen wir jedoch ein wenig vorgehen: Die Ideal-Atmosphäre hat nur sechs Variable. (Allerdings sind es Feldvariable, wie wir sie auf Seite 59 beschrieben haben). Das sind zum einen die drei schon genannten thermodynamischen Größen *Temperatur* T , *Druck* p und *spezifisches Volumen* v . Die drei weiteren Variablen sind hydrodynamischer Natur, es sind schlicht und einfach die drei Komponenten v_x , v_y und v_z des Windvektors \mathbf{v} .

Für die Berechnung der zeitlichen Verhaltensweisen der 6 Feldvariablen des dynamischen Systems ***Ideal-Atmosphäre*** werden wir in Kapitel 4 Modell-Gleichungen plausibel machen. Fünf dieser Feldgleichungen - diejenigen zur Bestimmung von v_x , v_y , v_z , v und T - sind ***Differentialgleichungen***. Wie in Kap. 3.2 besprochen wird, sind das Gleichungen, die eine Prognose der jeweiligen Variablen ermöglichen, wenn die jeweiligen Vernetzungen mit allen Variablen des Modells in Form sogenannter ***Einflussfunktionen*** bekannt sind. Für die Ideal-Atmosphäre *sind* sie bekannt, wie wir in Kapitel 4 plausibilisieren werden, und *daher* ist die Ideal-Atmosphäre vorhersagbar. Woher die dafür *auch noch* erforderliche sechste Gleichung kommt, ohne die p nicht bestimmbar wäre, ist das 'eigentliche' Thema des aktuellen Unterkapitels.

Die noch fehlende Gleichung zu einem geschlossenen System heißt ***Zustandsgleichung idealer Gase***. Wir werden sie uns experimentell 'erarbeiten'. (Manche nennen sie auch schlicht 'Gasgleichung', was aber eine sehr unzulängliche Bezeichnung ist, weil sie den wichtigen Unterschied zu den realen Gasen, die auch eine 'Gasgleichung' haben, ignoriert. Interessierte Leserinnen und Leser mit Vorkenntnissen finden hierzu näheres in [Lan02] bzw. unter [www.hajolange.de / Kap.05 Die feuchte Atmosphäre.pdf](http://www.hajolange.de/Kap.05%20Die%20feuchte%20Atmosphäre.pdf), dort in Unterkapitel 5.5). Aber - und da wiederhole ich mich gerne - vorhersagbar ist nur die jeweilige *Modellatmosphäre*, nicht die *Atmosphäre*! Für die Differentialgleichungen der Realatmosphäre wird man die Einflussfunktionen wohl auch in 100 Jahren noch nicht kennen. Der Name Ideal-Atmosphäre rührt natürlich daher, dass die Luft dieser Modellatmosphäre die Eigenschaft des idealen Gases haben muss, was aber nur für (fast) trockene Luft eine 'erlaubte' Vereinfachung ist. In diesem Modell kann es also z.B. nicht regnen! Andererseits markiert dieses Modellsystem bereits die Grenze der Vorhersagbarkeit der Atmosphäre. Natürlich kann man auch Modelle konstruieren, die eine größere Annäherung an die 'echte' Atmosphäre darstellen, sogenannte Modelle der ***Realatmosphäre***. Wie erfolgreich diese höchstens sein *können*, können wir an den auf meist nur zwei Tage begrenzten und dennoch gelegentlich falschen täglichen Wettervorhersagen abschätzen.

Wir sagten schon in Kap. 2.6, dass man Messungen zur Auswirkung einer Kompression eines Luftpäckchens (das ist eine Verkleinerung von v , also eine Vergrößerung der Dichte $\rho=1/v$) wohl einfacher in einer Luftpumpe durchführen könne als durch 'Mitschwimmen' mit dem Lagrange-Teilchen in der komprimierenden Strömung. Wir ermitteln also die Zustandsgleichung idealer Gase experimentell, indem wir ein Lagrange'sches Luftpäckchen in einer Luftpumpe einsperren, so dass wir mithilfe von Kolbenbewegungen sein Volumen V kontrolliert einstellen und dabei jedes Mal seine Temperatur und seinen Druck messen können. Der Experimentator, der die Kolbenverschiebung durchführt, übernimmt gewissermaßen die Rolle der hydrodynamischen Strömung, deren Konvergenz das Luftpäckchen genauso zusammendrücken kann wie der Kolben der Luftpumpe. Da es bei der Volumenänderung nicht darauf ankommt, ob sie durch Geschwindigkeitskonvergenz oder durch Richtungskonvergenz der Strömung zustande kommt - den beiden im vorigen Kapitel auch grafisch dargestellten Strömungstypen - kann man das so machen. Dabei ist es natürlich geschickt, als Variablen-Tripel nicht ρ, p, T , sondern v, p, T auszuwählen, denn die Kolbenstellungen definieren ja wegen $v = V/m$ nicht nur V , sondern eindeutig auch v , schließlich bleibt ja die Masse m in Lagrange'schen Luftpäckchen immer konstant - in der Luftpumpe allerdings nur dann, wenn man das Ventil immer schön 'zu' hält oder es anderweitig verschließt.

Noch ein Hinweis zur Vermeidung eines naheliegenden Missverständnisses: Eigentlich war ja unser orts- aber nicht massenkonstantes Eulersches Luftpäckchen dasjenige, welches sich nicht bewegt, und umgekehrt war ja das massenkonstante aber nicht ortskonstante Lagrange'sche Luftpäckchen dasjenige, welches sich *bewegt*. Unser Luftpäckchen in der Luftpumpe kann sich als Ganzes ebenfalls nicht bewegen, und es ist trotzdem kein Eulersches, sondern ein Lagrange'sches Luftpäckchen: Es bleibt ja massenkonstant, und es wird an seiner Bewegung nur durch mechanische Wände gehindert. Die nun experimentell herzuleitende algebraische Zustandsgleichung idealer Gase ist gewissermaßen das Vernetzungs-Gesetz, welches die Vernetzung der von einer Differentialgleichung nicht bedachten Variablen p mit den übrigen thermodynamischen Variablen v und T beschreibt. Gerade *weil* hier keine Differentialgleichung zu ermitteln ist, deren grundsätzliche Beschreibung erst in Kapitel 3.2 erfolgen soll, können wir das schon hier erledigen.

Eigentlich haben wir schon dann eine thermodynamisch interne Vernetzungs-Formel 'im Kopf', wenn wir die Vermutung äußern, dass mit einer Verkleinerung von v , also mit einer Kompression des Luftpäckchens, wohl eine Zunahme von p ('Kompressionsdruck') und von T ('Kompressionswärme') verbunden sei. Als Vermutung, wie diese Vernetzung zwischen v, p und T mathematisch zu formulieren sei, könnte man

daher auf die Idee kommen, dass v umgekehrt proportional zu p und zu T wäre, dass also $v \sim 1/(pT)$ wäre. Wir haben hier das gleiche Proportionalitätszeichen ' \sim ' verwendet wie schon einmal auf Seite 79. Hier bedeutet es: Wenn p und T größer werden - der Bruch $1/(pT)$ also kleiner wird - dann könnte das mit einem dazu proportional kleineren v verbunden sein, denn eine Kompression - Verkleinerung von v - *macht* ja p und T größer! Man könnte sagen, mit der Formel $v \sim 1/(pT)$ haben wir eine **Theorie** aufgestellt, und nun prüfen wir mit einer Mess-Reihe von voreingestellten v -Werten und gemessenen dazugehörigen p - und T -Werten, ob diese Theorie Bestand hat oder ob sie falsifiziert wird. Und die sogleich zu beschreibenden Messungen zeigen, dass sie falsifiziert wird! Also merken Sie sich die Formel bitte nicht, sie ist falsch! Richtig ist hingegen $v \sim p/T$. Das ist, mit dem Proportionalitätsfaktor R , der sogenannten **Gaskonstante** nichts Geringeres als die **Zustandsgleichung idealer Gase**:

$$v = RT/p \quad (\text{oder auch } pv = RT \quad \text{oder } p = R\rho T \text{ mit } \rho = 1/v)$$

Diese Formel, und nicht das 'anschauliche' $v \sim 1/(pT)$, konnte experimentell validiert werden. Aber was hat das mit unserem Thema 'Klimatheorie' zu tun? Entscheidend viel, denn die Atmosphäre lässt keine **Falsifizierungsexperimente** zu, jedenfalls dann nicht, wenn man verantwortungsvoll mit ihr umgehen möchte. Dazu später mehr, wenn wir feststellen müssen, dass das sogenannte 'geo-engineering' gedanklich auf dem Vormarsch ist (s.u., Seite 223), und dass sich dahinter eben doch Experimente mit der Atmosphäre verbergen. Jedoch bedeutet der Verzicht auf atmosphärische Falsifizierungs-Experimente auch den Verlust, Theorien wie die 'CO₂-Klimazielformel' (hier allerdings in einer noch *sehr* vorläufigen, algebraischen, Form. Für die 'richtigere' Differentialgleichung s.u., Kapitel 3.3):

$$\text{Globaltemperatur} \sim \text{anthropogenes CO}_2 \quad \text{oder kurz} \quad T_{\text{global}} \sim \text{CO}_2$$

zu falsifizieren, obwohl sie ja ähnlich simpel ist wie $v \sim 1/(pT)$ oder $v \sim T/p$. Sie ist darüber hinaus auch monokausal, und das bleibt auch so, wenn man die Proportionalität, d.h. ja die durch einen Proportionalitätsfaktor A ausgedrückte Linearität

$$T_{\text{global}} = A \cdot \text{CO}_2 \quad \text{durch} \quad T_{\text{global}} = f(\text{CO}_2)$$

mit einer nichtlinearen Funktion f ersetzt. Der Unterschied ist, dass die simple Formel $v = RT/p$ ein **einfaches System** valide beschreibt, und die ebenso simplen Formeln $T_{\text{global}} = A \cdot \text{CO}_2$ oder $T_{\text{global}} = f(\text{CO}_2)$ der 'Rest' ist, der übrig bleibt, wenn man schier unendlich viele andere Einflussgrößen eines **komplexen Systems** einfach weglässt. Da sich aber $T_{\text{global}} = A \cdot \text{CO}_2$ oder $T_{\text{global}} = f(\text{CO}_2)$ auf das komplexe Klimasystem beziehen, müsste man auch Falsifizierungsexperimente an ihm durchführen.

Nebenbei gesagt, muss nach einem 'zweiten Nachdenken' $v \sim T/p$ auch nicht mehr als 'unanschaulich' gelten. Wir finden dann, dass gemäß dieser Formel das Volumen v *doch* abnehmen kann, obwohl T zunimmt! Nur muss p 'stärker' zunehmen als T ! Oder anders gesagt: Das zunehmende p im Nenner muss den Ausdruck T/p stärker nach unten ziehen, als ihn die Zunahme von T nach oben ziehen 'will'! Fachsprachlich drückt man das so aus: p muss den Einfluss von T auf das Verhalten von T/p *überkompensieren*.

Die Experimente, die auf diese Zustandsgleichung des idealen Gases führten, wurden um die Jahrhundertwende zwischen dem 17. und 18. Jahrhundert von Boyle, Mariotte, Amontons und Gay-Lussac vorgenommen. Sie haben Messungen durchgeführt, in denen sie jeweils den Druck p , das spezifische Volumen v oder die Temperatur T durch 'geschicktes' Experimentieren konstant hielten. Immer wenn sich *überhaupt* Variablen von Systemen verändern, spricht man von **Prozessen**, und Prozesse, bei denen der Druck p oder das spezifische Volumen v oder die Temperatur T konstant bleiben, nennt man in dieser Reihenfolge **isobare**, **isochore** bzw. **isotherme Prozesse**. Gemeinsam haben sie auch den Namen **polytrophe Prozesse**. Die obengenannten vier Wissenschaftler haben sich der Untersuchung dieser drei polytropen Prozesse folgendermaßen angenommen (\sim heißt wieder 'proportional zu'):

- | | |
|---|-------------------------------|
| Gay-Lussac: Isobarer Prozess ($p = p_0 = \text{const}$). | <u>Ergebnis:</u> $v \sim T$ |
| Boyle & Mariotte: Isothermer Prozess ($T = T_0 = \text{const}$). | <u>Ergebnis:</u> $v \sim 1/p$ |
| Amontons: Isochorer Prozess ($v = v_0 = \text{const}$). | <u>Ergebnis:</u> $p \sim T$ |

Unsere Zustandsgleichung $v = RT/p$ bzw. $p v = RT$ stimmt mit allen drei Ergebnissen überein, denn da die Größe R *immer* konstant ist, kann man sie mit der jeweils konstant gehaltenen Variablen (p_0 bzw. T_0 bzw. v_0) zusammenfassen:

- | | |
|------------------------------|--|
| Gay-Lussac (isobar): | $v = RT/p_0 = (R/p_0) \cdot T = \text{const} \cdot T$ |
| Boyle & Mariotte (isotherm): | $v = RT_0/p = \text{const} / p$ |
| Amontons (isochor): | $v_0 = RT/p \quad \underline{d.h.} \quad p = (R/v_0) \cdot T = \text{const} \cdot T$ |

M.a.W., die thermische Zustandsgleichung idealer Gase $p v = RT$ fasst die Gesetze von Gay-Lussac, von Boyle & Mariotte und von Amontons zu einem einzigen Gesetz zusammen!

Das mag ja sehr schön sein, aber es muss Ihnen, liebe Leserin, lieber Leser, noch immer rätselhaft vorkommen, wie z.B. das 'geschickte' Experimentieren von Gay-

Lussac ausgesehen hat, bei dem trotz Verkleinerung von v der 'Kompressionsdruck' vermieden werden konnte, so dass $p = p_0$ konstant blieb. Und wie konnten Boyle & Mariotte trotz Verkleinerung von v die 'Kompressionswärme' vermeiden, um so den polytropen isothermen Prozess (mit $T = T_0$) zu realisieren. Und noch rätselhafter erscheint es, dass Amontons überhaupt einen isochoren polytropen Prozess realisieren konnte. Wenn er $v = v_0$ nicht verändern durfte, wieso gab es dann überhaupt irgendeinen Prozess?

Nun wird es Zeit, zuzugeben, was wir schon hier und da angedeutet hatten, dass nämlich v , p und T oder ρ , p , und T nicht die einzigen Variablen des idealen Gases sind. Hinzu kommt noch eine weitere Variable, es ist - haben Sie es geahnt? - die **Entropie** S . Aber ebenso, wie wir bisher nicht mit dem Volumen V gearbeitet haben, sondern mit dem spezifischen Volumen $v = V/m$, arbeiten wir auch nicht mit der Entropie S , sondern mit der **spezifischen Entropie** $s = S/m$. Und jetzt wird es spannend: Ebenso wie man Prozesse durch willkürliche Änderungen von v in Gang setzen kann, kann man das auch durch willkürliche Änderungen von s tun. Für den isochoren, also v -konstanten Versuch von Amontons ist das offenbar sogar die *einzig* Möglichkeit, überhaupt einen Prozess auszulösen. Und das 'geschickte' Experimentieren zur Realisierung von isobaren und isothermen Prozessen wird erst im Zusammenspiel von vorgegebenen v - und s - Änderungen möglich!

Dieses s ist für Sie, liebe Leserin, lieber Leser aus dem 'blutigen' Laien-Lager, bisher kaum mehr als nur ein Buchstabe. Sagen Sie sich einfach folgendes: Eine neue manipulierbare Größe *muss* es ja noch geben, da man Dinge wie polytrope Prozesse allein durch v -Manipulationen nicht erreichen kann. Na gut, geben wir dieser notwendigen, aber vorerst noch vollkommen unbekanntem Systemvariablen zunächst einmal einen Namen (spezifische Entropie) und ein Symbol (s). Mehr als das habe ich bisher noch gar nicht sagen wollen.

Aber auf eines sollte ich noch hinweisen, weil wir es in Kapitel 2.8 benötigen werden. Die vier Variablen v , s , p , T des idealen Gases kann man in zwei Klassen einteilen: Das spezifische Volumen v und die spezifische Entropie s gehören zur Klasse der **potentiell-extensiven** Variablen, der Druck p und die Temperatur T aber zur Klasse der **intensiven** Größen. Was bedeutet das nun schon wieder?

Stellen Sie sich *zwei* gleiche Luftpäckchen vor, jedes mit gleichem Druck, Volumen und gleicher Temperatur. Und nun möchten Sie die beiden Systeme zu einem einzigen System zusammenfassen. Bei dieser Zusammenlegung betrachten wir vorübergehend nicht das spezifische Volumen $v = V/m$ und die spezifische Entropie $s = S/m$, sondern V und S selbst. Wie verhalten sich dabei unsere Variablen V , S , p , T ? Der

Druck und die Temperatur sind im verdoppelten Gesamtsystem offenbar die gleichen wie in den Teilsystemen, aber das Volumen verdoppelt sich natürlich! Und auch die Entropie verdoppelt sich, (was Sie mir zunächst glauben müssen, weil Sie ja noch nicht wissen, was Entropie überhaupt ist). *Daher* nennt man p und T **intensive Größen**, und V und S **extensive Größen**! Extensive Größen sind letztlich **massenproportionale Größen**: Wenn das Volumen eine extensive Größe ist, dann deshalb, weil das verdoppelte Volumen auch eine verdoppelte Masse enthält. Entsprechendes gilt für die Entropie (bitte glauben), aber Druck und Temperatur sind ja *nicht* massenproportional. Sonst könnte man bei einer Außentemperatur von 5 Grad eine Zimmertemperatur von 20 Grad auf 25 Grad erhöhen, indem man das Fenster öffnet und so Außenluft in das Zimmer 'hineinlässt'.

Hoffentlich verwirrt es Sie nicht allzu sehr, wenn Sie nun hören, dass nur das Volumen V eine extensive Größe ist, das spezifische Volumen $v = V/m$ aber nicht: Das Volumen $v = V/m$ verdoppelt sich deswegen *nicht* bei der Systemverdopplung, weil sich dabei sowohl V als auch m verdoppeln, so dass sich der Faktor '2' aus Zähler und Nenner herauskürzt! Man kann auch sagen, die Division einer extensiven Größe wie V oder S durch m beseitigt ihre Eigenschaft der Massenproportionalität. Und dennoch bleibt ein Unterschied zwischen p oder T einerseits und v oder s andererseits bestehen: Eine Multiplikation von v oder s mit m macht 'Sinn', denn sie rekonstruiert die extensive Größe V oder S . Eine Multiplikation von p oder von T mit m macht keinen 'Sinn'. Jedenfalls ergibt sich dabei keine interpretierbare Größe. Man könnte sagen, p und T sind 'von Haus aus' intensive Größen, und v oder s sind aus V oder S nach Division durch m 'künstlich erzeugte' intensive Größe, die aber jederzeit durch Multiplikation mit m wieder zu einer echten extensiven Größe transformiert werden können. Da mir kein besseres Wort eingefallen ist, habe ich sie **potentiell-extensiv** genannt.

Den physikalischen Hintergrund der Entropie kann ich Ihnen nicht in wenigen Sätzen erklären. Die Entropie ist eine so schillernde Größe, dass ich mich manchmal dabei ertappe, ein Buch *nur darüber* schreiben zu wollen, obwohl ich mich - oder *weil* ich mich - nach 30 Jahren Lehre im Umkreis Entropie-relevanter Themen manchmal frage, ob ich sie selbst verstanden habe. Die Anzahl der unterschiedlichen Definitionen von Entropie ist groß, sie reicht von ihrer Zunahme auf dem berühmten nicht aufgeräumten Schreibtisch, über Begriffe aus Thermodynamik, Informationstheorie, schwarzen Löchern, Kosmologie, Wahrscheinlichkeiten von Mikrozuständen, Alterungsforschung, Wärmekraftmaschinen bis hin zum Antriebsmotor für das Klima. Nicht alle diese Themen werden in diesem Buch 'drankommen', aber schrittweise doch diejenigen, die zum Themenkreis dieses Buches gehören.

Nachdem wir nun akzeptiert haben, dass wir es bei der Beschreibung der Physik des idealen Gases nicht nur mit den drei Variablen v , p und T zu tun haben, sondern zusätzlich mit der - wenn auch vorerst noch nicht näher beschriebenen - Variablen s , widmen wir uns am besten wieder dem Lagrange'schen Luftpäckchen, das in einer Luftpumpe eingeschlossen ist. Vielleicht bekommen wir eine Idee, welche Rolle die 'neue' Variable s hier spielen könnte. Bisher haben wir nur das spezifische Volumen geändert, indem wir den Kolben bewegt haben. Es ist ja sehr anschaulich, dass sich bei einer Verkleinerung des Volumens der 'Gegendruck' immer mehr erhöht, aber leider auch die Temperatur. So einfach ist also ein isothermer Prozess gar nicht realisierbar. So kommen wir beinahe zwangsläufig auf die Idee, dass man mithilfe einer Änderung von s die Temperatur so verändern können müsste, dass ihre Erhöhung durch Kompressionswärme *kompensiert* werden kann. Umgekehrt müsste man bei reiner Volumenvergrößerung - bei Expansion des Gases - die dann stattfindende Abkühlung durch zusätzliche 's-Maßnahmen' verhindern können, die hier auf eine Erwärmung von außen hinauslaufen müssen.

Die 's - Maßnahmen' zur Herstellung eines isothermen Prozesses trotz Erwärmung durch Kompression bzw. trotz Abkühlung durch Expansion müsste also einfach in einem Abkühlen bzw. Beheizen der Luft in der Luftpumpe von außen bestehen. Und schon haben wir etwas Konkretes über die 'merkwürdige' Entropie in der Hand: Abkühlung von außen ist verknüpft mit einem Entropieaustausch durch die Wand der Luftpumpe hindurch von innen nach außen, also gewissermaßen ein 'Absaugen' von Entropie. Mit einem solchen Entropie-Export - aus der Sicht der Luftpumpe - kann man die durch Kompression erfolgende Erwärmung kompensieren, den Prozess also isotherm gestalten. Ebenso kann man durch Entropie-Import eine Abkühlung durch Expansion kompensieren.

Übrigens kann man Kompressionen oder Expansionen des Luftpäckchens ebenfalls als Export oder Import einer Größe interpretieren, nämlich des Volumens! Tatsächlich bedeutet ja eine Kompression, dass man dem Lagrange'schen Luftpäckchen einen Teil seines ursprünglichen Volumens (nicht seiner Masse!) entzieht: Ein Teil des Systemvolumens gehört nach der Kompression nicht mehr zum System Luftpäckchen, sondern zu seinem Umgebungs-System. Man kann also sagen:

Eine Kompression entspricht einem Volumenexport des physikalischen Systems 'Lagrange'sches Luftpäckchen', eine Expansion entspricht einem entsprechenden Volumenimport.

Nun wissen wir also, worin das 'geschickte Experimentieren' zur Erreichung isothermer Prozesse besteht: Ein **Volumen-Export** (mit der damit verbundenen Kompressionswärme) wird durch einen **Entropie-Export** kompensiert, und ein **Volumen-Import** (mit der damit verbundenen Expansions-Kälte) wird durch einen **Entropie-Import** kompensiert. Durch Entropie-Importe oder Volumen-Exporte wird es in der Luftpumpe wärmer, durch Entropie-Exporte oder Volumen-Importe wird es hier kälter. Natürlich kann man zur Darstellung dieser Sachverhalte auch Fachbegriffe verwenden, die Sie, liebe Leserin, lieber Leser, auch kennen müssen, wenn Sie zum gleichen Thema auch andere Darstellungen lesen möchten:

*Eine durch **Volumenaustausch** verursachte Temperatur-Änderung nennt man einen **adiabatischen Prozess**.*

*Eine durch **Entropieaustausch** verursachte Temperatur-Änderung nennt man einen **diabatischen Prozess**.*

Das 'geschickte Experimentieren' bestand also in einer diabatischen Kompensation adiabatischer Effekte. So liest man das in Fachbüchern!

Eine diabatische Erwärmung z.B. passiert nicht mittels Kompression - das wäre ja eine adiabatische Erwärmung - sondern mittels Entropie-Import durch die Begrenzungswände des Systems hindurch. Ein solches 'Heizen' von außen (etwa durch Anhalten einer Kerze an den Luftpumpenzylinder), oder ein Kühlen (etwa durch Anlegen von Eis) funktioniert natürlich nur, wenn die Begrenzungswände auch 'wärmedurchlässig' sind. (Eigentlich müsste man sagen, die Wände müssen 'entropiedurchlässig' sein!). Daher wird das Begriffspaar adiabatisch-diabatisch auch zur Charakterisierung von *Wänden* verwendet, oder vornehmer ausgedrückt, zur Charakterisierung von **Randbedingungen**: Diabatische Wände lassen Entropie hindurch, adiabatische Wände nicht!

"Warum spricht man statt von Entropie-Export und Import nicht gleich von Wärme-Export und Import, wenn es doch dabei kälter bzw. wärmer wird", werden Sie mich nun fragen, liebe Leserin, lieber Leser. Diese Frage von Ihnen habe ich befürchtet, weil Sie damit in ein Wespennest gestochen haben, wie ich es allerdings auch selbst getan habe, als ich soeben schrieb "Eigentlich müsste man sagen, die Wände ..."

Nach einer im Volksmund, aber leider auch in der Wissenschaft weit verbreiteten Terminologie bringt man Heizen und Kühlen *tatsächlich* mit dem Austausch, mit Import und Export von Wärme in Verbindung. Aber der Begriff 'Wärme' in einer solchen Verwendung ist leider sehr problematisch. Z.B. gibt es eine **Clausius'sche Wärme**, eine *fiktive Wärme*, eine *nichtkompensierte Wärme*, einen **Wärmestrom**, eine *umgangssprachliche Wärme* usw. Diese unschlüssige Begriffsbildung ist Mitschuld da-

ran, dass das Thema Thermodynamik insgesamt 'knifflig' ist. Sie ist zwar mathematisch einfacher zu formulieren, aber physikalisch ist sie anspruchsvoller als die Hydrodynamik. Und dann gibt es ja auch noch eine '**Erderwärmung**', wiederum (fast) ohne nähere Erläuterungen. Zu all diesen Definitionen müsste man tatsächlich einiges Zusätzliche sagen, was ich in [Lan02] resp. in [www.hajolange.de / Kap.01 Thermodynamische Grundlagen.pdf](http://www.hajolange.de/Kap.01_Thermodynamische_Grundlagen.pdf) auch getan habe. Auf mögliche Missverständnisse bei der Verwendung des Wärmebegriffs habe ich auch an anderer Stelle meiner Homepage hingewiesen. Z.B. in einem Vortrag, nachzulesen unter [www.hajolange.de / 2002 Zur Wissensbasis der Wetter- und Klimatheorie.html](http://www.hajolange.de/2002_Zur_Wissensbasis_der_Wetter-_und_Klimatheorie.html), dort Punkt (10): Wieso beschreiben Lehrbücher *entweder* eine 'Thermodynamik der Hauptsätze' oder eine 'Gibbs'sche Thermodynamik'?

Aber ich muss zugeben, dass es bei der ungeheuren Verbreitung des Wärmebegriffs in unterschiedlichsten Zusammenhängen kaum möglich ist, diese Terminologie ganz zu vermeiden. Diese traditionelle Sprechweise in der gängigen Praxis zu ändern, würde wahrscheinlich eine ähnliche Anstrengung erfordern wie die letzte Rechtschreibreform. Daher werde ich auch in diesem Buch - wenn auch widerstrebend - Begriffe wie '*Wärmeaustausch*', '*Wärmefluss*', '*Wärmezufuhr*' usw. ebenfalls verwenden, obwohl hier überall der Wortteil 'Wärme' durch Entropie ersetzt werden müsste. Ich begnüge mich damit, hier wenigstens auf die Probleme dieser Terminologie hingewiesen zu haben, und schreibe ab jetzt diese Begriffe immer in 'Hochkommata'.

Allerdings darf man den Begriff Wärme nicht kompromisslos verwenden, manchmal sind korrigierende Zusatzbemerkungen unausweichlich. Diese bewirken zwar ebenfalls, dass die Thermodynamik 'knifflig' ist, aber sie verhindern wenigstens, dass die Darstellungen falsch werden. Die in unserem aktuell diskutierten Fall nötigen Zusatzbemerkungen könnten z.B. damit beginnen, dass wir beschreiben, an welcher Stelle der Begriff Wärme *ursprünglich* und in *korrekter* Weise eingeführt wurde. Dazu 'sortieren' wir zunächst die - in ihrer Anzahl auf 4 angewachsenen - Variablen v , s , p , T des idealen Gases.

Wir hatten ja gerade v und s als *potentiell-extensiv* sowie p und T als *intensiv* klassifiziert. Und wir wissen auch schon, dass man v bzw. s zwischen dem System und seiner Umgebung austauschen kann, und dass man mit diesen Austauschprozessen die Temperatur des Systems adiabatisch bzw. diabatisch (in dieser Reihenfolge) verändern kann. Da fragt man sich doch unwillkürlich, wozu man nun noch die beiden intensiven Größen T und p braucht? Ich sage es Ihnen, aber passen Sie gut auf:

Wenn man die ausgetauschte spezifische Entropie s mit der Temperatur T multipliziert, dann beschreibt man tatsächlich genau den Prozess, den man *korrekt Wärme*

nennen darf. Und: Wenn man das ausgetauschte spezifische Volumen v mit dem negativen Druck p multipliziert, dann beschreibt man den Prozess, den man **Arbeit** nennt! Arbeit und Wärme sind also gar keine Zustandsgrößen wie v , s , p oder T . Sie beschreiben keine Variablen, die den Zustand eines Systems definieren, sondern sie beschreiben Zustands-Veränderungen, auch Prozesse genannt. Kurz gesagt:

Arbeit und Wärme sind keine Zustandsgrößen, sondern Prozessgrößen!

Wenn man also von 'Wärmeaustausch' spricht, dann sollte einem bewusst bleiben, dass man Wärme 'eigentlich' gar nicht austauschen kann, denn das wäre ein Austausch eines Austausches: die Wärme selbst beschreibt ja schon einen Austausch, den mit T multiplizierten s -Austausch! Noch einmal: Wärme beschreibt keinen Systemzustand, sondern einen Systemprozess. Schon die Bezeichnung des Prozesses 'Klimawandel' als Zunahme der globalen 'Wärme' ist terminologisch falsch. Gegenwärtig - nach nun schon 17 Jahren Stagnation der Erderwärmung (Stand 2015) - 'sucht' man danach, wo sich die Wärme 'versteckt' habe (Favorit: im Ozean). Man sollte - wenn man schon meint, die Erde müsse sich erwärmt haben - ($\text{CO}_2!$) - nach der Entropie suchen!

Zugegeben, dass ein mit p multiplizierter v -Export ein Arbeits-Prozess ist, ist anschaulicher als die Tatsache, dass ein mit T multiplizierter s -Export ein Wärme-Prozess ist: Es macht tatsächlich 'Arbeit', den Kolben der Luftpumpe in das Luftpäckchen hineinzudrücken, um sein Volumen zu verkleinern. Die Formel

Arbeit = Druck mal Volumenänderung

passt sogar zu der Formel

Arbeit = Kraft mal Weg,

die wir in Schulzeiten gelernt haben. Der Druck ist nämlich eine Kraft pro Fläche, und die Volumenänderung entspricht dem Weg, den die Kolben-Fläche zurückgelegt hat, sie ist also gerade das Produkt Fläche mal Weg. Das ergibt für die erste Formel

Arbeit = Druck mal Volumenänderung = (Kraft/Fläche) mal (Fläche · Weg),

M.a.W., die Fläche kürzt sich heraus, und das Produkt 'Kraft mal Weg' bleibt vom Produkt 'Druck mal Volumenänderung' übrig.

Wenn wir sagen, dass eine Volumenverkleinerung mit Arbeit verbunden ist, weil es natürlich Arbeit 'macht', den Kolben gegen den Druck des Luftpäckchens herunterdrücken zu müssen, dann ist nicht die Arbeit des Luftpäckchens gemeint, sondern eine Arbeit, die die *Umgebung* (hier der Experimentator) am Luftpäckchen leisten muss. Stellen Sie sich vor, dass der Kolben oben als kleine tellerartige Tischplatte

endet, auf der sich lauter kleine Gewichte befinden. Wenn der Experimentator die Anzahl dieser Gewichte erhöht, wird der Kolben unter der zunehmenden Last das Luftpäckchen zusammendrücken, als hätte der Experimentator (der Akteur der Umgebung des Luftpäckchens) diese Kompressionsarbeit selbst geleistet. Wenn man Gewichte entfernt, wird aber der Teller immer leichter, das Volumen des Luftpäckchens vergrößert sich, d.h. es leistet nun Arbeit (eine Hebearbeit) *an* der Umgebung.

Der Unterschied zwischen der Arbeit der Umgebung am System und der Arbeit des Systems an der Umgebung ist äußerst wichtig, denn er entscheidet darüber, ob die **Energieänderung** des Luftpäckchens positiv oder negativ zählt. Die Arbeit zählt positiv, wenn durch sie *die Energie des Systems 'Luftpäckchen' erhöht* wird, wenn also die Umgebung Arbeit am System leistet. Das ist dann der Fall, wenn Volumen vom System **exportiert** wird. Das System gibt aber Energie an die Umgebung ab, wenn es selbst (Hebe-) Arbeit leisten muss, wenn also Volumen **importiert** wird:

Volumen-Import ist Arbeit des Systems, die negativ zählt

Volumen-Export ist Arbeit am System, die positiv zählt

Bei der Wärme ist die Vorzeichenfrage leichter zu beantworten: *Entropie-Import* zählt als positive Wärme, denn, mit T multipliziert, erwärmt er das Luftpäckchen und erhöht daher seine Energie, und umgekehrt:

Entropie-Import ist 'Wärmezufuhr' zum System, die positiv zählt

Entropie-Export ist 'Wärmeabfuhr' vom System, die negativ zählt

Nun kommen wir zurück zu den Experimenten zur experimentellen Validierung (eigentlich zur hoffentlich fehlschlagenden Falsifizierung) der idealen Gasgleichung. Wir erinnern noch einmal an die Teilergebnisse von Seite 138:

Gay-Lussac (isobarer Prozess): $v = RT/p_0 = (R/p_0) \cdot T = \text{const} \cdot T$

Boyle & Mariotte (isothermer Prozess): $v = RT_0/p = \text{const} / p$

Amontons (isochorer Prozess): $v_0 = RT/p$ d.h. $p = (R/v_0) \cdot T = \text{const} \cdot T$

Bei allen isobaren Prozessen in idealen Gasen bleibt also nicht nur p, sondern auch v/T konstant, bei isothermen Prozessen bleibt nicht nur T, sondern auch $v \cdot p$ konstant, und bei isochoren nicht nur v, sondern auch p/T .

Boyle und Mariotte mussten also in ihren Experimenten an dem eingesperrten Luftpäckchen nicht nur (mithilfe des beweglichen Kolbens in der Luftpumpe) willkürliche v-Änderungen durchführen, die im ersten der beiden obigen Zweizeiler (Volumen Import und Export) beschrieben sind, sondern sie mussten auch die im zweiten Zweizeiler (Entropie Im- und Export) beschriebene s-Änderung ermöglichen, was mit dem Kolben der Luftpumpe nicht 'geht'. Sie mussten also die Luftpumpe etwas

umbauen: Die bisher 'wärmeisolierende' (Fachbegriff: **adiabatische**) Zylinder-Außenwand musste durch eine 'wärmedurchlässige' (pardon - durch eine s-durchlässige, Fachbegriff: **diabatische**) Wand ersetzt werden. Dann erst konnten sie z.B. die bei v -Export erfolgende Kompressionserwärmung durch Wärme-Export (pardon - durch s-Export) kompensieren. Und bei v -Import konnte die dann erfolgende Expansionsabkühlung durch eine Erwärmung mittels s-Import kompensiert werden. Natürlich müssen die Ex- bzw. Importe von v und s genau aufeinander abgestimmt sein, wenn sich die gewünschte Isothermie des Prozesses einstellen soll. Nun haben Boyle und Mariotte nach jeder auf T-Konstanz abgestimmten Veränderung von v und s die Werte von p gemessen, also die einzige Variable, über die im Experiment nicht verfügt worden war. Und dabei stellten sie fest, dass kein einziges Messergebnis, trotz Veränderungen aller Variablen außer T, eine Veränderung des Produktes pv ergeben hatte. In diesen Experimenten haben sie also die Gleichung $pv = \text{const}$ in allen **isothermen** Zustandsänderungen experimentell gefunden.

Man kann aber auch auf eine direkte, vom Experimentator vorgenommene Veränderung der Kolben-Einstellung, also des spezifischen Volumens v , verzichten. Wenn man *dennoch* das eingeschlossene Gas von außen erwärmt, (wenn man s importiert), dann wandert der Kolben gewissermaßen 'von allein' nach oben, denn T steigt und das erwärmte Gas dehnt sich aus. *Weil* sich der Kolben 'frei' bewegen kann, bleibt der Druck konstant! Natürlich werden die Gewichte auf dem Teller am oberen Ende des Kolbens diesmal *nicht* verändert, und das entspricht einem unveränderten Gasdruck. Offenbar haben wir hiermit das 'geschickte' Experimentieren von Gay-Lussac beschrieben, bei dem sich alle Variablen außer p ändern. Dennoch zeigen die Messungen nach jedem 'portionsweisen' s - Austausch, dass sich der Quotient v/T dabei nicht ändert. Daher haben wir die Gleichung $v/T = \text{const}$ als *Gesetz von Gay-Lussac* für **isobare** Zustandsänderungen bezeichnet.

Und wie ging Amontons vor, um sein Gesetz $p/T = \text{const}$ für **isochore** Zustandsänderungen durch 'geschicktes Experimentieren' zu finden? Diesmal musste v unbedingt konstant bleiben, d.h. v darf sich weder verändern durch direkte Kolbenverschiebung bei veränderten Gewichten auf dem Teller, noch durch **diabatische** Erwärmung bei s -Austausch. Da aber ein s -Austausch unbedingt stattfinden muss, weil ja sonst *gar kein* Prozess stattfinden würde, musste Amontons den Kolben fixieren, absolut unbeweglich machen, z.B. durch 'Festschrauben'.

Nun wurde nach jedem 'portionsweisen' s -Austausch p und T gemessen, und Amontons stellt fest, dass der Quotient p/T nach keiner dieser Messungen verändert war. (Das Gesetz $p/T = \text{const}$ bei $v = \text{const}$ wird allerdings gelegentlich auch 'zweites

Gesetz von Gay-Lussac' genannt, der etwa zeitgleich mit Amontons ganz ähnliche Messungen durchgeführt hatte).

Alle drei Polytropen-Gesetze, Noch einmal:

- (1) $p/T = \text{const}$ bei $v = \text{const}$ (Amontons),
- (2) $v/T = \text{const}$ bei $p = \text{const}$ (Gay-Lussac),
- (3) $p \cdot v = \text{const}$ bei $T = \text{const}$ (Boyle & Mariotte)

sind auch physikalisch plausibel, wenn man sich das statistische molekulare Verhalten veranschaulicht. In den nächsten drei Absätzen möchte ich diese Übereinstimmung zwischen den drei Messungen und solchen statistisch-theoretischen Überlegungen darstellen. Diese drei Absätze können also auch überschlagen werden, denn sie bringen kein neues Wissen, sondern 'nur' eine Vertiefung des bisherigen Wissens.

(1): Wie in Kap. 2.3 ausführlich beschrieben, ist ja die Temperatur ein statistisches Maß für die Wahrscheinlichkeiten, mit der bestimmte Geschwindigkeiten der Moleküle eingenommen werden. Auch der Druck beschreibt ein statistisches molekulares Verhalten, nämlich die mittleren Änderungen der Impulse (der mit den Massen multiplizierten Geschwindigkeiten) der Moleküle bei Kollisionen. Dass diese Änderungen dann größer, 'heftiger' sind, wenn die Geschwindigkeiten selbst schon größer sind, kann man wohl einsehen. Und das ist auch schon der statistische Hintergrund des Gesetzes von **Amontons**: 'Der Druck ist proportional zur Temperatur', dann ist p/T einfach der konstante Proportionalitäts-Faktor!

(2): Wenn aber **Boyle und Mariotte** die Temperatur festhalten, das Volumen jedoch verringern, haben die im Mittel 'gleich schnell' gebliebenen Moleküle natürlich weniger Platz, und daher gibt es pro Wandfläche zwar keine heftigeren Kollisionen, aber diese Kollisionen sind zahlreicher geworden. Auf eine Fläche wird also im Mittel insgesamt eine größere Kraft ausgeübt - der Druck ist ja nichts anderes als diese Kraft, *dividiert* durch die Fläche. Ein isotherm verkleinertes Volumen bedeutet also einen größeren Druck, ein vergrößertes Volumen bedeutet einen kleineren Druck (weil es zwar noch immer gleich heftige, aber *weniger* Impulsänderungen pro Fläche gibt), so dass auch das Gesetz 'Volumen mal Druck = konstant' bei Isothermie statistisch-physikalisch verständlich ist.

(3): Wenn schließlich Gay-Lussac den Druck p - also die Summe aller Impulsänderungen pro Fläche - festhält, aber doch das Volumen verringert, so dass nun *mehr* Moleküle mit der Fläche kollidieren, kann das nur dann funktionieren, wenn die Heftigkeiten der einzelnen Molekül-Kollisionen im Mittel geringer geworden sind. D.h. ihre Geschwindigkeiten müssen im Mittel langsamer geworden sein, und das entspricht einer Geschwindigkeits-Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einem kleineren Pa-

parameter 'Temperatur'. Ein isobar verkleinertes (vergrößertes) Volumen bedeutet eine niedrigere (höhere) Temperatur. Somit ist auch das Gesetz $v/T = \text{const}$ bei $p = \text{const}$ statistisch-physikalisch verständlich geworden.

Das Schönste ist aber, dass man sich die drei Gesetze gar nicht merken muss. Es reicht aus, sich die ideale Zustandsgleichung $p v = R T$ oder $p v / T = R$ zu merken, denn diese fasst alle drei zusammen: Man muss nur T oder p oder v als konstant ansehen (R ist sowieso konstant), und schon ist $p \cdot v / T = R$ identisch mit dem isothermen $p \cdot v = \text{const}$, bzw. mit dem isobaren $v / T = \text{const}$ bzw. mit dem isochoren $p / T = \text{const}$. (Natürlich ist die Konstante 'const' jedes Mal anders, weil R jedes Mal mit einem anderen konstanten Faktor - T_0 , p_0 bzw. v_0 - verbunden ist).

All diese Messungen und ihre molekulartheoretischen Bestätigungen sind kein *Be-
weis* für die Gültigkeit der Zustandsgleichung $p v / T = R$. Im Grunde genommen haben wir Falsifizierungsexperimente beschrieben, die alle 'nicht geklappt' haben. Damit ist die Formel nicht bewiesen, aber doch *validiert* worden, wie man sagt. Wir sind sehr davon überzeugt, dass auch weitere Falsifizierungsversuche scheitern werden.

Das ist irgendwie zu vergleichen damit, dass das Einschalten eines Fernsehgerätes 'eigentlich' auch als Falsifizierungsexperiment der Theorie der Elektrodynamik und anderer physikalischen Theorien gedeutet werden kann, die zur Konstruktion eines Fernsehgerätes angewendet wurden. Wenn das TV-Bild ausfällt, wird man aber kaum glauben, soeben diese Theorien falsifiziert zu haben, sondern man wird den Fehler in einem Stromausfall oder einem anderen technischen Defekt suchen.

Es gibt also trotz der prinzipiellen Unbeweisbarkeit physikalischer Theorien viele Theorien, die 'so gut wie sicher' sind. Dazu gehören alle Theorien, die eine technische Anwendung gefunden haben und somit millionenfache Falsifizierungsexperimente überstanden haben. Dazu gehören auch die hier ausführlich beschriebenen Gesetze des idealen Gases. Insbesondere wollte ich am Beispiel des idealen Gases das Verständnis dafür fördern, dass man das Verhalten einfacher Systeme, zu denen auch das ideale Gas gehört, *vorhersagen* kann, *weil* durch zahlreiche Messungen und auch theoretische Schlussfolgerungen (durch die in (1) bis (3) erfolgten molekulartheoretischen Fundierungen) Zweifel und Vorbehalte an diesen physikalischen Aussagen kaum noch möglich sind.

Und da dieses ideale Gas auch das Fluid des Modells 'Ideal-Atmosphäre' ist, waren wir bei der ganzen Diskussion nie vom Thema des Buches abgewichen: Ohne die hier gegebenen Hinweise auf die Vorbedingungen, auf die Fundamente, auf denen Systemvorhersagen für einfache System möglich sind, könnte ich bei der späteren Erörterung komplexer Systeme nicht darauf hinweisen, dass diese Vorbedingungen

dort fehlen. Wir haben somit schon hier vorbereitet, diese Unterschiede nicht nur aufzuzählen, sondern sie auch in einer - hoffentlich für Laien nachvollziehbaren Weise - zu konkretisieren und zu präzisieren.

Warum war im vorigen Absatz von 'den Gesetzen' des idealen Gases die Rede, wo wir doch nur von dem *einen* Gesetz $p \cdot v / T = R$ gesprochen haben, der Zustandsgleichung idealer Gase? Weil wir noch nicht die *ganze* Geschichte erzählt haben! Sie, liebe Leserin, lieber Leser, können noch nicht *ganz* zufrieden sein! Wahrscheinlich ist ihnen aufgefallen, dass wir zwar von *vier* Variablen p , T , v , s des idealen Gases gesprochen haben, aber nur von *drei* polytropen Prozessen, bei denen nur jeweils eine der *ersten drei* Variablen konstant ist. Müsste es nicht einen vierten polytropen Prozess geben, bei dem die vierte Variable, die spezifische Entropie s konstant ist? Wo wir doch sogar schon einen Namen (den Namen '**adiabatisch**') für einen Prozess vergeben haben, bei dem sich die Entropie nicht ändert, *jedenfalls nicht durch Import oder Export!*

Damit die Sache 'nicht zu einfach' wird, was bei der schillernden Größe 'Entropie' laut Vorankündigung sowieso nicht zu erwarten war, muss ich leider ankündigen, dass sich die Entropie eines Systems *auch auf andere Weise* als durch Import oder Export ändern kann. Sie kann auch 'entstehen', sozusagen aus dem 'Nichts', z.B. wenn Reibung im Spiel ist! Das kennzeichnet man fachsprachlich dadurch, dass die Entropie keine **Erhaltungsgröße** sei. Die Energie hingegen kann nicht einfach entstehen oder ins 'Nichts' verschwinden, sie *ist* nach dieser Terminologie also eine Erhaltungsgröße. Übrigens sind die Aussagen, dass die Energie eine globale Erhaltungsgröße ist, die Entropie aber nicht, nichts anderes als Ultrakurzfassungen des ersten und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, die uns im nächsten Kapitel noch ausführlich beschäftigen werden.

Wenn im Gas-System Entropie produziert wird, dann ist dieser Prozess **irreversibel**, d.h. er kann nicht mehr rückgängig gemacht werden *in dem Sinne*, dass die 'ganze Welt' wieder genauso aussieht wie vor der Entropieproduktion. Allerdings kann dafür gesorgt werden, dass sich 'nur im Gas-System' die Entropie nicht ändert. Grundsätzlich nennt man einen Prozess, bei dem sich die Entropie nicht ändert, einen **isentropen Prozess**. Bisher mussten Sie, liebe Leserin, lieber Leser davon ausgehen, dass ein isentroper Prozess mit einem adiabatischen Prozess identisch ist: Wenn Entropie weder importiert noch exportiert wird, dann wird sie ja wohl konstant bleiben. Und nun der Schock: Entropie kann auch aus dem Nichts entstehen! Wie also kann man auch dann, wenn solche irreversiblen Prozesse passieren, für Isentropie sorgen? Natürlich dadurch, dass man die im Gas-System produzierte Entropie-Menge in das Umgebungs-System diabatisch exportiert!

Es gibt also zwei Arten von Isentropie in einem Teilsystem: erstens eine **reversibel-adiabatische Isentropie**: Entropie wird dort weder erzeugt noch ausgetauscht. und zweitens die soeben beschriebene **irreversibel-diabatische Isentropie**: Entropie wird im Teilsystem zwar erzeugt, aber gleichzeitig von dort exportiert.

Im idealen Gas kann man eine reversibel-adiabatische Isentropie dadurch erreichen, dass man alle Prozesse sehr langsam ablaufen lässt, **quasistatisch**, wie man sagt. In **realen Prozessen** kann aber Isentropie nur irreversibel-diabatisch erreicht werden, also durch einen Export der in realen Prozessen *immer* erzeugten Entropie. Die Isentropie, die irreversibel-diabatisch zustande kommt, ist ein ganz entscheidendes Thema im Zusammenhang mit Strukturbildungen, wie sie auch in der Atmosphäre vorkommen.

Liebe Leserin, lieber Leser, schwirrt Ihnen der Kopf? Dann machen Sie sich keine Sorgen. In Kap. 2.8 versuchen wir noch einmal, die Rolle der Entropie zu beschreiben, dort aber systematisch und 'von vorne', nicht wie hier als 'Nebenbemerkung'. Aber wenn Sie die folgenden zusammenfassenden Sätze dennoch 'schaffen', dann müssen Sie in Kap. 2.8 nicht 'alles auf einmal' neu lernen:

*Ein Prozess ist **adiabatisch**, wenn er innerhalb adiabatischer Wände abläuft, wenn also Entropie nicht nach außen exportiert oder von außen importiert werden kann. Oder kürzer: Ein Prozess ist adiabatisch, wenn Entropie nicht mit der System-Umgebung ausgetauscht wird. Sonst ist er **diabatisch**.*

*Ein Prozess ist **reversibel**, wenn Entropie nicht erzeugt wird, was im idealen Gas dadurch erreicht werden kann, dass die 'Prozessführung' quasistatisch ist - ein Idealfall. Sonst - in **realen Prozessen** also - ist der Prozess **irreversibel**. (Vernichtet werden kann Entropie sowieso nicht, das ist die Aussage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik → Kap. 2.8).*

*Ein Prozess ist **isentrop**, wenn die Entropie konstant bleibt. Das kann auf zwei Arten geschehen:*

*Erstens: Entropie wird weder erzeugt noch ausgetauscht. Das ergibt eine **adiabatisch-reversible Isentropie** (realisiert in adiabatisch eingeschlossenen quasistatisch veränderlichen Systemen).*

*Zweitens: Entropie wird erzeugt, aber ihr Anwachsen wird durch Export genau kompensiert. Das ergibt eine **diabatisch-irreversible Isentropie** (realisierbar in realen **offenen Systemen**).*

Der zweite Typ von Isentropie spielt eine Schlüsselrolle in allen komplexen Systemen und eine ganz besondere Rolle bei Wetter und Klimaprozessen. Er ist auch der Kern der I. Prigogine'schen Theorie der Strukturbildung, [GP71] und [NP77], und das spontane Auftauchen von selbstorganisierten Strukturen ist wiederum ein Hauptgrund dafür, dass man Klima 'eigentlich' gar nicht als rein mathematisches Mittel über Wetter definieren darf: Das Mittel wird nach Strukturbildungen nicht mehr durch eine statistisch beschreibbare Vielfalt bestimmt, sondern durch wenige individuell abgrenzbare Strukturen. Der *Unterschied* der beiden Isentropie-Typen wird sich im weiteren Verlauf dieses Buches immer mehr erweisen als einer der wichtigsten Unterschiede zwischen einfachen, vorhersagbaren und komplexen, nicht vorhersagbaren Systemen.

Leider werden - sogar in der Fachliteratur - diese Begriffe häufig falsch benutzt. Ein Beispiel von sehr vielen ist der folgende Text: "Entropieerhaltende Prozesse bezeichnet man auch als adiabatische oder isentrope ... Prozesse". Dieses ist ein Zufallszitat, weil ich es am heutigen Tag (am 21. Oktober 2013) beim 'googeln' zufällig gesehen habe, kurz vor dem Schreiben eben der vorstehenden Zeilen. Quelle: <http://www.top-wetter.de/lexikon/e/entropie.htm>. Hätte man im obigen Text statt "adiabatische oder isentrope" nur "isentrope" geschrieben, wäre alles richtig gewesen. Aber die Autorin oder der Autor dieser Zeilen ist deshalb entschuldigt, weil der Fehler in dieser Terminologie ebenso verbreitet ist wie der Fehler, von 'Wärmeaustausch' statt von Entropieaustausch zu reden. Und ich strecke die Waffen auch hier: auch ich nenne die vierte Polytrope - die wir ja als Ergänzung zur Isotherme, Isobare und Isochore noch suchen - nicht Isentrope, (wie es richtig wäre), sondern 'Adiabate', ergänze aber öfter, dass es eigentlich eine 'reversible Adiabate' ist, so dass wenigstens die *eine* Möglichkeit für Isentropie zum Ausdruck kommt.

Auffällig bei all dem ist, dass in der 'allgemeinen' Zustandsgleichung $p\nu=RT$ von s gar nicht die Rede ist! Sie *enthält* gar keine Variable s , die man konstant halten *könnte*, um die noch ausstehende vierte polytrope Gleichung abzuleiten. Umso mehr sollte man versuchen, die Frage nach der vierten Polytrope experimentell zu beantworten. In diesem Zusammenhang ist eine falsche Verwendung des Begriffs '*Adiabategleichung*' auch in der Fachwelt geradezu Gang und Gebe. Denn:

Zur Herleitung der - sogenannten - Adiabategleichung muss man angeblich 'nur' während des Experimentes auf einen s -Austausch *verzichten!* Die dann ablaufenden adiabatischen Prozesse laufen innerhalb **adiabatischer Wände** ab: die Zylinderwände der Luftpumpe müssen wärmeisoliert sein wie die Wände einer 'idealen' Thermoskanne. Man muss also '*nur*' durch Kolbenbewegung einen schrittweisen ν -Aus-

tausch vollziehen und in den gemessenen Werten von p , T und v einen formelmäßigen Zusammenhang suchen! *Aber:* Die sich experimentell ergebende - Adiabaten-gleichung genannte - Formel ist eine andere, wenn die Kolbenbewegungen zwischen den Messungen schnell erfolgen, als wenn sie quasistatisch erfolgen!

Zur Erinnerung: Die experimentelle Herleitung der Zustandsgleichung $pυ=RT$ durch Boyle, Mariotte, Gay-Lussac und Amontons gelang ja durch *drei* Mess-Serien, und *jedes Mal* musste dabei ein s -Austausch durchgeführt werden! Hätte man auf diesen sorgfältig auszutrierenden s -Austausch verzichtet, wäre - wie besprochen - kein Prozess möglich gewesen, bei dem T , p oder v konstant bleibt. Aber den Prozess, bei dem s konstant bleibt, hätte man 'umsonst' bekommen, wenn man einfach auf den s -Austausch verzichtet hätte - und natürlich die Versuche quasistatisch durchgeführt hätte.

Warum also haben Boyle, Mariotte, Gay-Lussac und Amontons nur über die *komplizierteren* Messungen berichtet, über die einfachere Messung ohne s -Austausch aber nicht? Ich vermute, der Grund liegt darin, dass die isothermen, isobaren oder isochoren Messungen zwar messtechnisch komplizierter sind als die adiabatisch-reversiblen Messungen, dass aber die Ergebnisse dieser Messungen einfacher zu interpretieren sind, und dass diese Interpretation einfacher formelmäßig zu erfassen sind, eben in der einfachen Formel $pυ=RT$. Das Ergebnis der einfacheren reversibel-adiabatischen Messungen in einer Formel zusammenzufassen gelang erst etwa 20 Jahre später, (im Jahre 1822), als S.D. Poisson die folgende Gleichung präsentierte:

$$pυ^κ = \text{const} \quad (\kappa \approx 1,4)$$

Sie heißt **Poissongleichung**. Da aber Poisson auch andere wichtige Gleichungen hergeleitet hat, kam es zu der missverständlichen - im Grunde *falschen* alternativen Namengebung **Adiabatengleichung** - was wie gesagt zumindest ein unvollständiger Name ist, weil die Messungen zur Validierung dieser Formel nicht nur einer adiabatischen, sondern eben auch einer reversiblen (quasistatischen) Prozess-Führung bedürfen.

Für Neugierige sei noch erwähnt, dass der Wert 1,4 von κ identisch ist mit dem Quotienten der spezifischen Wärme-Kapazitäten bei isobaren bzw. isochoren Prozessen. Wenn Sie mit dieser Aussage nichts anfangen können, sagen Sie bitte 'aha' und kümmern sich nicht weiter darum. Das Verständnis des Klimasystems wird darunter nicht leiden.

Also: Man muss *nur* v - damit automatisch aber auch p und T - durch beliebige Stellungen des Kolbens quasistatisch verändern und auf einen s -Austausch verzichten,

und immer bleibt diese merkwürdige Größe pv^κ konstant! Da muss man erst mal drauf kommen! (Wer sich unter $v^{1,4}$ nichts vorstellen kann, dem sei ein wenig geholfen mit dem Hinweis darauf, dass $v^1 = v$ bedeutet, $v^2 = v \cdot v$, $v^3 = v \cdot v \cdot v$, usw. Also liegt der Wert von $v^{1,4}$ irgendwo zwischen v und v^2 . Eine genauere mathematische Definition von 'nicht ganzzahligen Exponenten' schenken wir uns, sie ist relativ aufwendig und sie fördert das Verständnis des Klimas auch nur wenig.

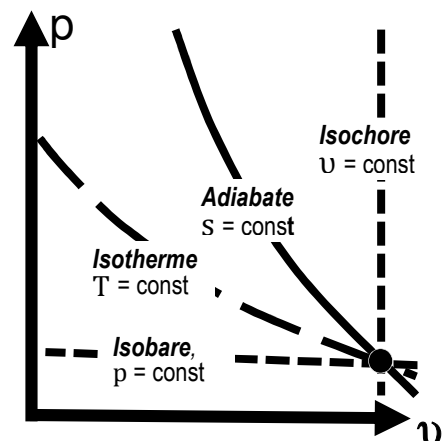
Vermutlich hat Poisson sein Ergebnis erst unter Mitwirkung theoretischer Überlegungen erhalten, wie ich sie in [Lan02] bzw. auch in [www.hajolange.de / Kap.03 Atmosphärische Gleichungen.pdf](http://www.hajolange.de/Kap.03%20Atmosph%C3%A4rische%20Gleichungen.pdf), Abschnitte 3.6 bis 3.9 zusammengefasst habe. Für Laien ist die dortige Darstellung allerdings kaum geeignet. Daher versuche ich hier noch auf andere Weise, ein physikalisches Verständnis für die *Konstanz* von pv^κ im adiabatischen, entropiekonstanten Prozess zu vermitteln:

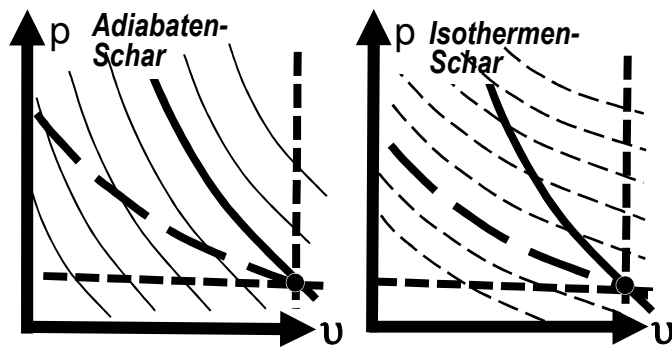
Vergleichen wir die (reversible) *Adiabate* $pv^\kappa = \text{const}$ mit der Gleichung $pv = \text{const}$, also mit der idealen Zustandsgleichung für *isotherme* Prozesse. *Beide* Gleichungen besagen, dass p abnehmen *muss*, wenn v zunimmt (wenn also das Gas expandiert wird) und umgekehrt. Um die unterschiedlichen Steilheiten dieses p -Abfalls bei v -Zunahme besser beurteilen zu können, stellen wir die Gleichungen nach p um. Dann verlangt die (reversible) Adiabate eine Proportionalität von p zu $1/v^\kappa$, die Isotherme eine Proportionalität zu $1/v$, - *den Zusatz 'reversible' Adiabate lasse ich ab sofort, den üblichen Gepflogenheiten folgend, auch weg* - in Formeln also:

$$p \sim 1/v^\kappa, \quad \kappa \approx 1,4 \quad \text{für die } \mathbf{Adiabate},$$
$$p \sim 1/v \quad \text{für die } \mathbf{Isotherme}$$

Da κ größer als 1 ist, fällt der Druck p bei v -Zunahme auf der **Adiabate** steiler ab als auf der **Isotherme**. Genau das zeigt das Bild, welches in einem pv -Achsenkreuz noch einmal alle vier besprochenen **Polytropen** wiedergibt. (Die beiden Achsen treffen sich hier allerdings *nicht* bei $p=0$ und $v=0$). Von jedem Punkt der **Isobaren** ausgehend ist die Projektion auf die p -Achse natürlich gleich - deswegen

ist ja diese Polytrope eine Isobare! Und aus einem entsprechenden Grund müssen auch alle Projektionen von der (ebenfalls kurz gestrichelten) Isochore auf die v -Achse gleich sein. Zwischen diesen beiden achsenparallelen Polytropen liegen die Adiabate und die Isotherme, wobei wie gesagt die erstere steiler ist.





Die beiden nächsten Handskizzen zeigen ganze Scharen dieser Polytropen. In dieser Schar bewegt man sich von links unten nach rechts oben zu höheren Entropien bzw. zu höheren Temperaturen - was sprachlich wohl eingängiger wäre, wenn wir die 'Adiabate' 'Isentrope' genannt hätten. Dennoch

sieht man hier sehr deutlich, dass beim isothermen Druckanstieg entlang der *langgestrichelten* Polytrope die Adiabaten in Richtung niedrigerer Entropie durchkreuzt werden. Und beim adiabatischen Druckanstieg (entlang der *durchgezogenen* Polytrope) werden die Isothermen in Richtung höherer Temperaturen durchkreuzt: auf jeder neu durchquerten Isotherme ist ja das Produkt $p v = RT$ größer geworden (wie man erfährt, wenn man an jedem Kreuzungspunkt die Projektionen auf die p - und v -Achsen sucht und miteinander multipliziert).

Das ist natürlich kein 'Wunder', denn da die Temperatur *dann* konstant ist, wenn $p v$ konstant ist, kann T nicht konstant sein, wenn $p v^{\kappa}$ konstant ist, wenn man also auf der durchgezogenen Polytrope nach oben wandert! Entsprechende Isobaren- und Isochoren-Scharen verlaufen natürlich im *wörtlichen* Sinne parallel zu der jeweiligen *kurzgestrichelt* eingezeichneten Polytropen.

Nicht ganz verstanden, liebe Leserin, lieber Leser? Dann noch einmal, nur ausführlicher (doppelt hält besser - und dass die Thermodynamik mathematisch einfach, physikalisch aber schwierig ist, sagte ich ja schon):

Auf jeder einzelnen der vielen Isothermen des rechten Bildes ist das Produkt $p v$ (also das Produkt der aus den Projektionen auf die Achsen zu ermittelnden Werte von p und v) jeweils gleich und entspricht dem Wert der linearen Funktion RT . Geht man aber zu weiter 'rechts-oben' liegenden Isothermen, dann wird offensichtlich das auch hier gleichbleibende Produkt $p v$ von Mal zu Mal größer, und damit auch die Temperatur T . Wendet man entsprechende Überlegung auch auf die Adiabaten-Schar an, (\rightarrow linkes Teilbild), so findet man, dass hier das Produkt $p v^{\kappa}$ und damit der Entropiewert ebenfalls immer größer wird, je weiter der Weg zur 'rechts-oben liegenden' Adiabaten gewesen ist.

Die Temperatur *muss* sich im adiabatischen Prozess ändern. Bei **Kompression** nimmt sie zu, bei adiabatischer **Expansion** nimmt sie ab. Das entspricht natürlich unserem bereits vorhandenen Vorwissen, aber nun können wir es auch aus den Dar-

stellungen in der pv -Ebene entnehmen, die übrigens schon ein - wenn auch nur zweidimensionaler - Phasenraum (auch **Phasenebene** genannt) ist, wie wir ihn spätestens in Kapitel 5 anwenden werden, dann aber höherdimensional.

Von der *einen* speziellen Isotherme in der obersten der drei Skizzen kommt man zur ganzen Isothermen-Schar in der unteren Skizze, wenn man im Boyle & Mariotte-Gesetz $pv = \text{const}$ die Konstante durch RT ersetzt, also durch eine *lineare Funktion* von T , und dann *verschiedene*, aber jedes Mal unveränderliche Temperaturwerte einsetzt. Nun war ja die Poisson'sche Adiabaten-Gleichung $pv^\kappa = \text{const}$ kennzeichnend dafür, dass sie einen Prozess beschreibt, bei dem s konstant bleibt. Aber auch diese Konstante hatten wir durch andere konstante s -Werte ersetzt und so eine ganze **Adiabaten-Schar** erzeugt.

Die konstante rechte Seite der Poisson-Gleichung $pv^\kappa = \text{const}$ ist nämlich *auch* nur ein spezieller Wert einer dort *eigentlich* stehenden Funktion von s . Wir bezeichnen sie mit $g(s)$. Diese Entropiefunktion $g(s)$ ist aber keine lineare Funktion wie die Temperaturfunktion $f(T) = RT$ auf der rechten Seite der Boyle & Mariotte-Gleichung $pv = \text{const}$. Vielmehr ist $g(s)$ eine Exponentialfunktion, und s taucht dort im Exponenten der Eulerschen Zahl e auf. 'Experten' können diese Funktion und ihre Herleitung in [Lan02] oder in [www.hajolage.de / Kap.03 Atmosphärische Gleichungen.pdf](http://www.hajolage.de/Kap.03%20Atmosph%C444rische%20Gleichungen.pdf), Seite 161 finden. Dort sind auch die Symbole und die Herleitung der folgenden Gleichung genauer erklärt, und auch die Tatsache, dass es sich bei den dort auftretenden 'Null-Indizes' um Integrationskonstanten handelt, was Laien aber als Nebensache betrachten können:

$$pv^\kappa = g(s) = e^{(s-s_0+c_v \ln p_0+c_p \ln v_0)} \quad (\kappa = c_p/c_v \approx 1,4)$$

Diese Darstellung von $pv^\kappa = g(s)$ (anstelle von $pv^\kappa = \text{const}$) wird **verallgemeinerte Adiabaten-Gleichung** (oder besser **verallgemeinerte Poisson-Gleichung**) genannt. c_p/c_v ist der auf Seite 152 angesprochene Quotient der spezifischen Wärme-Kapazitäten bei isobaren bzw. isochoren Prozessen (für Laien ebenfalls unwichtig). Ebenso könnte man die **Zustandsgleichung idealer Gase** $pv = f(T) = RT$ eine **verallgemeinerte Isothermen-Gleichung** nennen.

Wir haben also gefunden, dass die Boyle-Mariotte-Gleichung $pv = \text{const}$ aus der allgemeinen Zustandsgleichung $pv = f(T) = RT$ einfach dadurch entsteht, dass das Funktionsargument T konstant gesetzt wird - so dass man nur noch isotherme Zustandsänderungen im Auge haben kann, und dass die Poissonsche Adiabaten-Gleichung $pv^\kappa = \text{const}$ aus der verallgemeinerten Poissonschen $pv^\kappa = g(s)$ einfach dadurch entsteht, dass das Funktionsargument s konstant gesetzt wird - so dass man

nur noch adiabatische Zustandsänderungen im Auge haben kann, wobei man allerdings noch 'im anderen Auge' behalten muss, dass man damit sogar nur noch Prozesse betrachtet, bei denen nicht nur adiabatische, sondern auch reversible (quasistatische) Zustandsänderungen stattfinden.

Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

Die Vernetzung zwischen den Variablen eines Systems - neben der Nichtlinearität das zweite Merkmal für komplexe Systeme - wird sowohl durch Differentialgleichungen als auch durch algebraische Gleichungen erzeugt. Wir steuern auf die Beschreibung der Ideal-Atmosphäre zu. Das ist ein stark vereinfachtes Modell der Atmosphäre, dessen Fluid aus idealem Gas besteht. Die Variablen dieses Modellsystems sind die hydrodynamischen Größen (Windkomponenten) v_x, v_y, v_z und die thermodynamischen Größen T, ν und p . Für die ersten fünf dieser Variablen werden Differentialgleichungen zur Verfügung stehen (\rightarrow Kapitel 4). Ein Hauptanliegen dieses Kapitels war es, den Druck p mit den Variablen Temperatur T und dem spezifische Volumen ν zu vernetzen. Das geschah mithilfe einer algebraischen Gleichung, der Zustandsgleichung idealer Gase:

$$p\nu = f(T) = RT,$$

die wir hier experimentell hergeleitet haben, deren Validität wir aber auch durch eine plausible - hoffentlich laienverständliche - molekular-theoretische Veranschaulichung aufgezeigt haben. In gewisser Hinsicht ist das Modell der Ideal-Atmosphäre sogar einfacher als das ideale Gas als solches, denn letzteres ist durch die drei thermodynamischen Variablen T, ν und p noch gar nicht vollständig beschrieben. Es fehlt noch die Variable 'Entropie' S , in spezifischer Form mit dem Symbol s versehen. Ein zweites Hauptanliegen dieses Kapitels war es, eine zweite algebraische Gleichung herzuleiten, die auch s einbezieht - wiederum experimentell und mit veranschaulichenden theoretischen Überlegungen. Das Ergebnis war die verallgemeinerte Poisson-Gleichung, die nicht p, ν und T miteinander in Beziehung setzt, sondern p, ν und s :

$$p\nu^\kappa = g(s) = e (s-s_0 + c_\nu \ln p_0 + c_p \ln \nu_0) \quad (\kappa = c_p/c_\nu \approx 1,4)$$

Dass wir diese Gleichung zur Beschreibung des idealen Gases, aber nicht für die Ideal-Atmosphäre 'aus' idealem Gas benötigen, liegt daran, dass die letztere als Modellgleichung die reale Atmosphäre so stark vereinfacht, dass gar keine

irreversiblen Prozesse beschrieben werden, die ihrerseits die Entropie durch Erzeugung verändern würden. Die im Haupttext ebenfalls beschriebene Entropieänderung durch s -Import oder Export ist keine Erzeugung, sondern nur ein Ortswechsel der Entropie: Zunahmen im System werden durch Verluste der System-Umgebung ausgeglichen, und umgekehrt.

Ein drittes Anliegen dieses Kapitels habe ich im Haupttext noch gar nicht erwähnt. Es hat auch mehr mit späteren Erörterungen zum **Phasenraum** der Systemtheorie zu tun als mit der gegenwärtigen Thematik. Andererseits kann dieser Phasenraum gerade mithilfe der gegenwärtigen Thematik sehr gut motiviert werden. Somit 'passt' dieses Anliegen in diese Zusammenfassung des aktuellen Kapitels, die ja wie stets auch 'Ergänzungen einschließen 'darf':

Schon hier hatten wir uns die Aussagen der Zustands-Gleichung $p v = f(T)$ des idealen Gases, und auch Aussagen der verallgemeinerten Poisson-Gleichung $p v^\kappa = g(s)$ in einer Ebene veranschaulicht, die von einer v -Achse und einer p -Achse 'aufgespannt' wurde, (\rightarrow Skizzen auf Seite 153). Dieser zweidimensionale ' $p v$ -Raum' ist aber bereits ein Phasenraum, denn von jedem Punkt in einer solchen $p v$ -Ebene ausgehend kann man ja Projektionen auf jede dieser beiden Achsen bilden, (das sind senkrecht auf diese Achsen zulaufende gedachte Hilfslinien), die jedem Punkt in der Ebene einen eindeutigen p - und v -Wert zuordnen. Das heißt aber, dass jeder Punkt dieser Ebene einen **Zustand** des physikalischen Systems **Ideales Gas** verschlüsselt: Der Zustand ist zwar erst dann bekannt, wenn man nicht nur die beiden direkt an den Achsen des zweidimensionalen **Phasenraumes** ablesbaren Variablen p und v kennt, sondern auch die beiden Variablen T und s , aber diese kann man ja aus den beiden algebraischen Gleichungen $p v = f(T)$ und $p v^\kappa = g(s)$ ermitteln. Somit ist der zweidimensionale Phasenraum alles was man braucht, um alle möglichen Zustände des idealen Gases durch jeweils einen einzigen Punkt zu kennzeichnen. Deshalb kann der Phasenraum auch - völlig gleichwertig - **Zustandsraum** genannt werden.

Wie Sie wissen, heißen die vier Größen p , v , T und s Variable des idealen Gas-Systems. Offenbar entspricht die Dimensionszahl eines Zustandsraumes *nicht* der Zahl der Variablen des Systems. Unser Beispiel 'ideales Gas' hat ja demonstriert, dass zwei voneinander unabhängige algebraische Gleichungen zwischen diesen Variablen die Dimensionszahl des Phasenraumes um zwei verringern. Übrigens hätten wir für das ideale Gas nicht unbedingt die $p v$ -Zustandsebene verwenden müssen. z.B. hätten wir auch eine $p T$ -Ebene verwenden können, und die *nun* fehlenden Größen v und s hätte man sich aus den gleichen algebraischen Gleichungen verschaffen können. Ebenso hätten wir auch noch die Dichte ρ als fünfte Variable zur

Beschreibung des idealen Gases aufnehmen können. Dann würde aber die Dimensionszahl des Phasenraumes *nicht* ansteigen, denn wir hätten ja eine weitere algebraische Gleichung zur Verfügung, die Gleichung $p = 1/v$ (→ Seite 133). Das Prinzip kann auf beliebige Systeme verallgemeinert werden: Jede algebraische Gleichung zwischen irgendwelchen der **Variablen** des Systems verringert die Dimensionszahl des Zustandsraumes um 'eins', und die Variablen, die dann noch zu 'Beschriftung' der Achsen dieses Raumes übrig bleiben, bekommen den 'Zusatznamen' **Freiheitsgrade**

'Anschaulich' ist das aber wohl nur in Zustandsräumen, die bis zu drei Dimensionen haben. Daher heißt ja der ganz normale, uns umgebende dreidimensionale 'Orts-Raum' auch 'Anschauungs-Raum'. Aber in der Mathematik sind höherdimensionale Räume kein Problem - man kann sogar einen **Phasenraum für ein Klimamodell** mit ungeheuer vielen Variablen bilden. Damit mutiert eine Klimaprognose zur Prognose der Bewegung eines einzigen Punktes in einem Zustandsraum der Atmosphäre, der allerdings ungeheuer viele Dimensionen hat. Die Klimaprognose wird daher nicht 'einfacher', aber 'irgendwie' übersichtlicher, denn man hat ja einfach die ungeheure Vielfalt der atmosphärischen Freiheitsgrade auf die Koordinatenachsen des Phasenraumes 'verschoben', in dem zu jedem Zeitpunkt nur ein einziger Punkt von Bedeutung ist. Wenn auch die Prognose nicht *einfacher* geworden ist, so ist doch z.B. die Möglichkeit zur Beurteilung der Vorhersagbarkeit besser geworden (→ Kapitel 5).

Ein Beispiel: Man kann natürlich auch von jedem Punkt des dreidimensionalen Orts-Raumes die Projektionen auf die Achsen bilden. Dann erhält man z.B. die drei Ortskoordinaten eines Wolkentröpfchens. Man erhält aber nicht die Information darüber, welche Temperatur dieses Tröpfchen hat, wohin und wie schnell es sich gerade bewegt, ob es viel oder wenig CO₂ enthält. Man erhält auch keine Information über alle anderen Tröpfchen in dieser Wolke, keine Information über die anderen Wolken der Atmosphäre, auch nicht über die Gewitter, über die Wirbelstürme usw. Aber all diese Informationen sind in einem Punkt des **atmosphärischen Phasenraumes** eben doch verschlüsselt, wenn er soviel Dimensionen hat, dass jede dieser zusätzlichen Freiheitsgrade eine eigene Koordinatenachse bekommt, auf denen man diese Informationen ablesen kann, indem man die 'Ankunft' der vielen vom Zustandspunkt ausgehenden Projektion bestimmt.