2.4 Korrelationen - und warum sie oft unter- oder überschätzt werden

Worum geht es?

Systeme, in denen die sogenannten Reynolds'schen Postulate gelten, sind 'handlicher' als solche in denen das nicht gilt. $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$ bedeutete ja auch, dass dritte, vierte Mittelungen usw. ***lineare Gleichungen*** unverändert ließen! M.a.W., der Übergang von fein- zu grobkörnigen Theorien könnte einfacher nicht sein. Die Gleichungen für die Mikro-Turbulenz, für mesoskalige Prozesse, für Wetter und für alle Klimaskalen wären alle miteinander identisch. Das *'einzige'* Problem: für die Atmosphäre *gibt* es keine linearen Gleichungen. Die 'schöne' lineare Welt wird in ***nichtlinearen Gleichungen*** dadurch gestört, dass sich die Gleichungen für unterschiedliche Körnungsgrade nicht nur dadurch unterscheiden, dass über die jeweiligen Variablen unterschiedlich oft gemittelt wurde, sondern auch dadurch, dass sich die Gleichungen selbst ebenfalls verändert haben: es sind zusätzliche Terme hinzugekommen, sogenannte ***Korrelationen***. Bei Gültigkeit des ***Reynolds'schen Postulats*** sind das die einzigen neu auftauchenden Terme, andernfalls kommen noch weitere hinzu, sogenannte ***Kreuz-*** und ***Leonard-Terme***. Letzteres ist außer im ersten Schritt unserer vereinfachten Körnungsleiter (→ Seite 26) häufig der Fall. Aber auch, wenn die Reynolds-Postulate immer gültig *wären*, würden Mehrfach-Mittelungen - sogar schon auf der vereinfachten Körnungsleiter - zu 'unfassbarer' Komplexität führen, wie ich anhand einer Arbeit von H. Fortak, [For68], am Ende dieses Kapitels demonstrieren möchte.

Da mindestens die Korrelationen als zusätzliche Unbekannte in den gemittelten prognostischen Differentialgleichungen auftreten, und da es wegen des sogenannten ***Schließungsproblems*** letztlich unmöglich ist, auch für diese Korrelationen Differentialgleichungen aufzustellen, muss man sie ***parametrisieren*** (→ Seiten 23 oder 65). Das ist zwar unvermeidlich, aber wenn man sie als objektive und stimmige Modellierung bezeichnet, hat man die Korrelationen als Verhinderungsfaktor der Klima-Vorhersagbarkeit maßlos unterschätzt.

Es gibt aber auch Korrelationen, die Messgrößen sind und die in den Prognose-Gleichungen gar nicht vorkommen. Wenn man nun *gemessene* Korrelationen zwischen zwei Variablen einen hohen prognostischen Wert zumisst, was leider oft geschieht, dann überschätzt man sie ebenso maßlos, wie man Korrelationen als unbekannte Variable in einem Gleichungssystem unterschätzt. Das bekannteste Beispiel hierfür ist natürlich, dass man eine Korrelation zwischen dem CO_2-Gehalt und der globalen Mitteltemperatur als Prognosefaktor für die Klimaentwicklung in 30Jahren betrachtet.

Zur Komplexität des Systems Atmosphäre trägt ganz wesentlich bei, dass der Mittelwert von Produkten zweier ***Variablen*** - sagen wir x und y - sich vom Produkt der Mittelwerte unterscheidet! Wenn wir die Mittelbildung durch einen Querstrich kennzeichnen und die Ungleichheit durch das Symbol '$\neq$', dann können wir diese Aussage folgendermaßen als Formel schreiben:

$$\overline{x \cdot y} \neq \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Darüber kann man schon staunen, zumal der Mittelwert einer Summe der Variablen x und y *gleich* der Summe der Mittelwerte *ist*, in Formeln:

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$$

Andererseits wird hier schon deutlich, wieso - neben der Vernetzung - die Nichtlinearität eine so große Bedeutung für die Komplexität hat. Nichtlinear sind Gleichungen ja dann, wenn sie Produkte von Variablen enthalten. Und genau solche Terme verändern sich bei Mittelungen! Wenn man also die folgenden drei 'frei erfundenen' Gleichungen

Lineare Gleichung: $z = x+y$

Nichtlineare Gleichungen: $z = a\,x{\cdot}x \equiv ax^2$ *und* $z = x \cdot y$

Term für Term mittelt, bleibt nur die Struktur der ersten, linearen Gleichung unverändert, man erhält einfach $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$. *Was* sich bei den nichtlinearen Gleichungen bei Mittelung verändert, werden wir sofort erfahren. Wir sprechen hier nur von sogenannten ***algebraischen Gleichungen***, mit denen man keine Vorhersagen machen kann, denn dazu benötigt man sogenannte ***Differentialgleichungen***, die wir später erklären, die sich aber beim Mitteln ebenso verhalten wie die hier zu beschreibenden algebraischen Gleichungen! Variablen werden - wie oft, so auch hier - mit Buchstaben vom Ende des Alphabets bezeichnet (hier x, y, z), und konstante Größen, sogenannte ***Parameter,*** mit Buchstaben vom Anfang des Alphabets (hier a). Die lineare Formel, $z = x+y$, könnte z.B. beschreiben, dass die Variable ***mechanische Energie*** (z) die Summe aus ***kinetischer Energie*** (x) und ***potentieller Energie*** (y) ist.

Die erste *nichtlineare* Formel, $z=ax^2$, könnte die Aussage verschlüsseln, dass sich die kinetische Energie (z) aus dem Quadrat (daher nichtlinear!) der Geschwindigkeit (x) errechnet, welches noch mit der halben Masse $m/2$ multipliziert werden muss (so dass $a = m/2$ ist). Diese und die zweite nichtlineare Formel sind die denkbar einfachsten Prototypen von Gleichungen, die sich nach Mittelung nicht nur dadurch ändern, dass statt der ungemittelten nun gemittelte Variablen 'dastehen', sondern auch dadurch, dass zusätzliche Terme hinzukommen, wie wir gleich sehen werden.

Sei x eine ungemittelte Variable und $\overline{\mathrm{x}}$ der Mittelwert. Dann ist die Differenz zwischen ihnen eine sogenannte ***Schwankung***, auch statistische Schwankung genannt. Man bezeichnet sie mit dem Symbol x':

$$\mathrm{x}' = \mathrm{x} - \overline{\mathrm{x}} \qquad \textit{oder auch} \qquad \mathrm{x} = \overline{\mathrm{x}} + \mathrm{x}'$$

Diese Schwankungen sind sehr wichtig. Zunächst stellen wir fest, dass sie nichts anderes sind als Turbulenzelemente unterhalb der Mittelungsskala (→ Seite 31). Ich verrate schon jetzt, dass die Veränderung, die bei der Mittelung von Produkten durch die Ungleichung $\overline{\mathrm{x\,y}} \neq \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}$ angekündigt wurde, darin besteht, dass ein zusätzlicher Term entsteht, der ein Mittelwert des Produktes der entsprechenden turbulenten Schwankungen ist! Somit wird die Ungleichung $\overline{\mathrm{x\,y}} \neq \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}}$ zur Gleichung:

$$\overline{\mathrm{x\,y}} = \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}} + \overline{\mathrm{x}'\mathrm{y}'}$$

Der Zusatzerm $\overline{\mathrm{x}'\mathrm{y}'}$ heißt ***Korrelation*****,** oft auch ***Reynolds-Term*** oder ***Reynolds-Korrelation*** genannt. Im Gegensatz dazu gilt die Summenformel $\overline{\mathrm{x}+\mathrm{y}} = \overline{\mathrm{x}} + \overline{\mathrm{y}}$ ganz allgemein, und statt auf die Summe $\mathrm{x+y}$ kann man sie natürlich auch auf die Summe $\overline{\mathrm{x}} + \mathrm{x}' = \mathrm{x}$ anwenden. Dann hat man

$$\overline{\mathrm{x}} = \overline{\overline{\mathrm{x}} + \mathrm{x}'} = \overline{\overline{\mathrm{x}}} + \overline{\mathrm{x}'}$$

Auch das ist also eine gültige Gleichung. Sie *kann* - muss aber nicht - durch das Gleichungspaar $\overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\mathrm{x}}$ und $\overline{\mathrm{x}'} = 0$ erfüllt werden: Natürlich können auch andere Werte von $\overline{\overline{\mathrm{x}}}$ und $\overline{\mathrm{x}'}$ die gleiche Summe $\overline{\mathrm{x}}$ ergeben, etwa die Werte $\overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\mathrm{x}} - 1$ und $\overline{\mathrm{x}'} = 1$. *Dass* es aber dennoch die 'einfacheren' Werte

$$\overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\mathrm{x}} \quad \text{und} \quad \overline{\mathrm{x}'} = 0$$

sein sollen, ist gerade die Forderung, die man ***Reynolds'sches Postulat*** nennt. Die Gültigkeit dieses Postulates wird bei atmosphärischen Modellierungen in der Regel vorausgesetzt. Manchmal wird *nur* $\overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\mathrm{x}}$ *oder nur* $\overline{\mathrm{x}'} = 0$ als Reynolds'sches Postulat ausgegeben, was auch korrekt ist, weil sich ja unter der Voraussetzung $\overline{\mathrm{x}} = \overline{\overline{\mathrm{x}}} + \overline{\mathrm{x}'}$ (die Gleichung zuvor) $\overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\mathrm{x}}$ und $\overline{\mathrm{x}'} = 0$ gegenseitig *bedingen*. Aber diese Werte von $\overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\mathrm{x}}$ und $\overline{\mathrm{x}'} = 0$ sind natürlich nicht die einzigen, die in der Summe $\overline{\mathrm{x}}$ ergeben, wie soeben gezeigt. *Physikalisch* gesehen, kann $\overline{\mathrm{x}'}=0$ dann *nicht* gelten, wenn das Mittelungs-Intervall zu klein ist, was wir auf eine zu kleine oder sogar ganz fehlende 'Energielücke' zwischen der jeweiligen Fein- und Grobkörnung zurückgeführt haben (→ Seite 46). Wenn aber $\overline{\mathrm{x}'} = 0$ *nicht* gilt, dann kann auch $\overline{\overline{\mathrm{x}}} = \overline{\mathrm{x}}$ nicht gelten!

Aber *wenn* das Reynolds'sche Postulat gilt, ist das Mitteln 'einfacher', denn lineare Bildungen aus bereits einmal gemittelten Größen verändern sich ja nicht mehr, und

Mittelwerte über lineare Schwankungs-Größen verschwinden. Wir werden im späteren Verlauf noch mehrfach darauf zurückkommen. Wegen der Wichtigkeit des Themas kann es aber nichts schaden, es noch hier etwas weiter zu verfolgen, den bisherigen Kenntnisstand zu festigen und ihn anhand von Beispielen zu vertiefen.

Dazu knüpfen wir noch einmal beim Würfelexperiment an, denn das ist ja ein Beispiel für das bequeme Ergebnis $\overline{x'} = 0$ bzw. $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$, also für die Erfüllung des Reynolds-Postulates. Im Würfel-Experiment ist ja $\overline{x} = 3{,}5$, so dass die sechs möglichen Schwankungsgrößen $x' = 2{,}5 / 1{,}5 / 0{,}5 / -0{,}5 / -1{,}5 / -2{,}5$ ersichtlich den Mittelwert Null haben. Aber wir sagten schon, wenn man mehrere Sechsen hintereinander würfelt und dann 'zu früh' den Mittelwert aller Schwankungen als Abweichung von 3,5 bildet - ein zu kurzes Mittelungs-Intervall wählt - kommt *nicht* Null heraus!

> *Das können wir nun zu der Aussage präzisieren, dass dann sowohl $\overline{x'} \neq 0$ als auch $\overline{x} \neq \overline{\overline{x}}$ ist, d.h. das dann das Reynolds-Postulat nicht gilt!*

Erst wenn man *lange* Würfelreihen veranstaltet, kann das Reynolds'sche Postulat hinreichend genau erfüllt werden. Dass *dann* auch $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$ ist, kann man sich folgendermaßen klar machen: Wenn man *mehrere* und jeweils *hinreichend lange* Wurfserien durchführt, erhält man *stets* das Ergebnis $\overline{x} = 3{,}5$. Und um nun $\overline{\overline{x}}$ zu ermitteln, muss man den Mittelwert über die Zahlenreihe 3,5 3,5 3,5 usw. ermitteln, und da kommt - oh Wunder - 3,5 heraus.

Es ist nicht ganz unplausibel, die dazu erforderlichen Mittelungsintervalle beim Würfeln mit der Zeitskala zu vergleichen, über die man die *atmosphärischen* Schwankungen mitteln sollte. Der Unterschied ist aber, dass in der Atmosphäre *mehrere* Zeitskalen gleichzeitig vorhanden sind, einige, die zum Mitteln ein kürzeres, andere, die ein längeres Mittelungsintervall benötigten.

> *Die Forderung nach 'Energielücken' entspricht der Forderung nach Skalen-Bereichen, für die es möglichst wenige (ideal wäre gar keine) atmosphärische Prozesse gibt.*

Solche Energielücken bilden dann die 'natürlichen' Grenzen zwischen einer jeweiligen fein- und grobkörnigen Physik, also zwischen den Skalenbereichen, in denen die Atmosphäre ihre jeweiligen Verhaltensweisen unterschiedlich organisiert. Aber nur wenn ein gewisser 'Abstand' zwischen diesen Skalenbereichen existiert - eine 'Energielücke' eben - nur dann kann man die Prozesse auf der kleinerskaligen Seite dieser Lücke 'sinnvoll' mitteln, d.h. nur dann kann man 'wirklich' eine Skalentrennung dadurch erreichen, dass man die Organisationsformen der Atmosphäre in der feinkörnigen Skala in gemittelter Form, die Organisationsform in der grobkörnigen Skala aber in ungemittelter Form beschreibt. Wenn die Energielücke zu klein ist, kann man nämlich nicht vermeiden, dass man ungewollt auch schon über Schwankungen mittelt, die zum Beginn der grobkörnigen Skala gehören.

Der Begriff 'Energielücke' ist eigentlich zu speziell, denn mit diesem Wort spricht man eigentlich nur an, dass es in diesem Übergangs-Bereich zwischen den Skalen eine Lücke von Strömungs-Bewegungen geben sollte, die dort für kinetische Energie sorgen würden. Zur vollen Gewährleistung des Reynolds'schen Postulats dürfen jedoch keine Schwankungen *irgendwelcher* atmosphärischer Variablen zwischen den Sprossen der Körnungsleiter auftreten.

So ist es wohl plausibel, dass der Skalen-Bereich zwischen den Skalen, über die 'hinweggemittelt' wird, und den Skalen, die durch diese Mittelung nicht verändert werden sollen, möglichst voneinander getrennt sein muss, d.h. dass es möglichst keine Schwankungen *irgendwelcher* atmosphärischer Variablen geben sollte, deren Größenordnungen in diesem Übergangs-Skalenbereich liegen. Nicht nur eine Lücke von Schwankungen der Bewegungsenergie ist hier gefragt. Eine strengere Forderung als $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$ bzw. $\overline{x'} = 0$ (nennen wir sie Reynolds I) ist die folgende:

$$\overline{\overline{x} \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

(nennen wir sie Reynolds II). Wenn y eine Konstante ist - die sich beim Mitteln ja nicht ändert ($\overline{y} = y$) - dann kann man das y auf der rechten Seite der obigen Gleichung aus dem Mittelungsstrich 'herausziehen' und dann die ganze Gleichung durch y dividieren. Das ergibt $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$, also auch $\overline{x'} = 0$ und somit Reynolds I. Andererseits kann man aus Reynolds I nicht direkt auf $\overline{\overline{x} \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ schließen. *Daher* ist Reynolds II die etwas *allgemeinere* Formel. Wenn aber die angesprochene Energielücke existiert, sind beide Versionen des Reynolds-Postulats erfüllt, also auch diese etwas allgemeinere, die wir demnächst 'benötigen' werden.

Dass ein Mittel über eine Summe das Gleiche ist wie *die Summe* der Mittelwerte, ein Mittel über ein Produkt aber nicht das Gleiche wie das Produkt der Mittelwerte (weil hier noch ***Korrelationen*** als zusätzliche Terme hinzukommen, → Seite 90!) ist so wichtig, dass wir uns an diese Regeln anhand eines einfachen Zahlenbeispiels näher herantasten sollten.

<u>Beispiel</u>: es liegen je drei Schwankungswerte x' und y' der Variablen x und y vor, über die gemittelt wird (bitte nachrechnen):

$$x = \{1, 2, 6\} \;\rightarrow\; \overline{x} = 3 \;\rightarrow\; x' = \{-2, -1, 3\} \;\rightarrow\; \overline{x'} = 0$$
$$y = \{4, 1, 1\} \;\rightarrow\; \overline{y} = 2 \;\rightarrow\; y' = \{2, -1, -1\} \;\rightarrow\; \overline{y'} = 0$$

Nun können wir direkt überprüfen, ob in diesem Beispiel die Regeln $\overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y}$ bzw. $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ gelten oder nicht:

$x+y = \{5, 3, 7\} \;\rightarrow\; \overline{x+y}$ = (5+3+7)/3 = 5; $\bar{x}+\bar{y}$ = 3+2 = 5 *(also <u>Ja</u>!)*

$x \cdot y = \{4, 2, 6\} \;\rightarrow\; \overline{x \cdot y}$ = (4+2+6)/3 = 4; $\bar{x} \cdot \bar{y}$ = 3·2 = 6 *(also <u>Nein</u>!)*

Jetzt berechnen wir 'spaßeshalber' einmal das mittlere Schwankungs-Produkt: Wir hatten ja schon hergeleitet $x' = \{-2, -1, 3\}$ und $y' = \{2, -1, -1\}$, so dass

$x' \cdot y' = \{-4, 1, -3\} \;\rightarrow\; \overline{x' \cdot y'}$ = (-4+1-3)/3 = -2

Wir hatten schon die Ergebnisse $\overline{x \cdot y} = 4$ und $\bar{x} \cdot \bar{y} = 6$! Damit haben wir das 'glorreiche' Ergebnis bekommen:

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \overline{x' \cdot y'},$$

die sogenannte ***Reynolds'sche Aufspaltung***! Ist das Zufall? Haben wir das Beispiel so *konstruiert*, dass das 'zufällig so herauskommt', oder ist das immer so? *Es ist immer so!* Den Zusatzterm $\overline{x' \cdot y'}$, der aus der Ungleichung $\overline{x \cdot y} \neq \bar{x} \cdot \bar{y}$ eine Gleichung macht, wie schon auf Seite 90 behauptet und nun auch 'fast bewiesen' ist, wurde schon dort ***Korrelation genannt***. Aber bevor ich Ihnen nun den Tipp gebe, sich viele andere Zahlenbeispiele auszudenken, um die Regel

Das Mittel über ein Produkt ist gleich dem Produkt der Mittelwerte der Faktoren plus der entsprechenden ***Korrelation***

zu erhärten, verlassen wir die Zahlenbeispiele und argumentieren allgemeingültig: Wir berechnen den Term $\overline{x \cdot y}$, *nachdem* wir die Aufspaltungen $x = \bar{x} + x'$ und $y = \bar{y} + y'$ gemacht haben. Wir mitteln also über den Term

$$x \cdot y = (\bar{x} + x')(\bar{y} + y') = \bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}y' + x'\bar{y} + x'y'$$

Wir mussten jeden Term in der linken Klammer mit jedem Term der rechten Klammer multiplizieren. (Dass man den Multiplikationspunkt '·' wahlweise verwenden kann oder nicht, haben Sie vermutlich schon selbst gemerkt). Bei der nun folgenden Mittelung setzen wir voraus, dass die Forderung Reynolds II, $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, erfüllt ist, (→ Seite 92: Die etwas schwächere Forderung Reynolds I reicht hier nicht aus, bzw. der Rechengang würde damit länger, und er erforderte weitere - wenn auch plausible - Voraussetzungen). Wenn der zweite Term $\bar{x}y'$ der rechten Seite zu mitteln ist, ersetzen wir also y durch y' und finden gemäß Reynolds II

$\overline{\bar{x} \cdot y'} = \bar{x} \cdot \overline{y'} = 0$ (wegen $\overline{y'} = 0$)

Auch der dritte Term der rechten Seite verschwindet auf diese Weise, denn wir können $x'\bar{y}$ wie $\bar{y}x'$ behandeln. Und die Mittelung des ersten und vierten Terms ergibt gerade das Resultat $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y} + \overline{x'y'}$, also das obige 'glorreiche' Ergebnis. Nun erst haben wir wirklich bewiesen, dass die ***Korrelation*** der Term ist, der als Zusatzterm die ungemittelte Gleichung verändert, und zwar auch dann, wenn die berühmte Energielücke, über die wir so viel gesprochen haben, wirklich existiert, was 'eigentlich' nur im ersten Schritt auf unserer (bereits vereinfachten) atmosphärischen Körnungsleiter (→ Seite 17) der Fall ist. Beim zweiten Schritt, von der hydro-thermodynamischen Skala zur Wetter-Skala, können z.B. ***mesoskalige Phänomene*** (→ Seite 30) die Energielücke verhindern. Da dann die Reynolds'sche Aufspaltung nicht mehr gültig ist, müssten wir bei der Mittelung von

$$x \cdot y = (\bar{x} + x')(\bar{y} + y') = \bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}y' + x'\bar{y} + x'y'$$

so vorgehen (eine Vorgehensweise, die meines Wissens nicht praktiziert wird):

$$\overline{x \cdot y} = \overline{\bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}y' + x'\bar{y} + x'y'} = \overline{\bar{x}\,\bar{y}} + \overline{\bar{x}y'} + \overline{x'\bar{y}} + \overline{x'y'}$$

Hier addieren wir aus 'taktischen' Gründen den 'Null-Term' $\bar{x}\,\bar{y} - \bar{x}\,\bar{y}$, und wir verändern die Reihenfolge der sonstigen Terme:

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x}\,\bar{y} + \overline{x'y'} + \overline{\bar{x}y'} + \overline{x'\bar{y}} + \overline{\bar{x}\,\bar{y}} - \bar{x}\,\bar{y}$$

Wenn diese Gleichung nach dem zweiten Term der rechte Seite 'zu Ende' wäre, also nach dem ***Reynolds-Term***, den wir mit dem Symbol R abkürzen:

$\overline{x'y'} = R,$

dann 'hätten' wir wieder die Reynolds'sche Aufspaltung erhalten, $\overline{x \cdot y} = \bar{x}\,\bar{y} + R$, die man bei Gültigkeit des Reynolds'schen Postulates verwenden dürfte. Andernfalls müsste man in den Modellen noch die vier Terme $\overline{\bar{x}y'} + \overline{x'\bar{y}} + \overline{\bar{x}\,\bar{y}} - \bar{x}\,\bar{y}$ 'mitschleppen', (was aber bei Klimavorhersagen nicht geschieht). Die beiden ersten Terme, die ja Mittelungen über Schwankungen *und* Mittelwerte umfassen, fasst man zu einem sogenannten ***Kreuzterm*** K zusammen:

$\overline{\bar{x}y'} + \overline{x'\bar{y}} = K$

Und die beiden restlichen Terme zu einem sogenannten ***Leonard-Term*** L:

$\overline{\bar{x}\,\bar{y}} - \bar{x}\,\bar{y} = L$

Somit muss - müsste - man beim Fehlen einer Energielücke die Reynolds'sche Aufspaltung $\overline{x \cdot y} = \bar{x}\,\bar{y} + R$ ersetzen durch die Aufspaltung

$\overline{x \cdot y} = \bar{x}\,\bar{y} + R + K + L$

Von den drei Testgleichungen von Seite 89 haben wir die zweite nichtlineare Gleichung $z = ax^2$ noch nicht betrachtet. Zur Vereinfachung setzen wir $a=1$, so dass $z = x^2$ zu betrachten ist, also gerade ein Sonderfall der schon behandelten Gleichung $z = x\,y$ mit $y=x$. Somit geht die gemittelte Form $\overline{z} = \overline{x\,y} = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x'y'}$ über in

$$\overline{z} = \overline{x^2} = \overline{x}^2 + \overline{x'^2}$$

Auch hier kommen bei fehlender 'Energielücke' noch Kreuz- und Leonard-Terme hinzu. Jedem, der die Klimadiskussion ein wenig verfolgt, ist wohl aufgefallen, dass hier der Begriff 'Korrelation' fast immer eine ganz wesentliche Rolle spielt. Typisch ist der folgende, in dieser oder ähnlicher Form häufig wiederholte Satz: "Die AGW (das 'anthropogenic global warming) ist Fakt, denn die gemessene Korrelation zwischen CO_2 und Temperatur ist nicht mehr wegzudiskutieren. Damit Laien, meine Haupt-Adressaten in diesem Buch, auch das 'Beweismittel' Korrelationen nicht einfach hinnehmen müssen, sollten wir uns einmal überlegen, wieso und wann bestimmte Werte dieser Korrelationen, dieser gemittelten Schwankungsprodukte, *überhaupt* zustande kommen.

Am einfachsten ist es, wenn wir zuerst den Term $\overline{x'^2}$ diskutieren, der uns auf Seite 95 begegnet ist, denn das ist eine Art 'Selbst-Korrelation', d.h. die Korrelation $\overline{x'y'}$ für $y=x$. Während x' nach dem Mitteln verschwindet, tut das der Term x'^2 nicht: $\overline{x'}$ ist ja deswegen Null, weil die turbulenten Schwankungen x' zu gleichen Teilen positiv und negativ sind und sich so im Mittel zu Null kompensieren. Quadrate reeller Zahlen werden aber niemals negativ, auch nicht das Quadrat zweier negativer Zahlen. (Sie erinnern sich noch an den Merksatz 'Minus mal Minus ist Plus' aus der Schule)? Hier liegt einer der Gründe für die Probleme, die die Nichtlinearität des Systems 'Atmosphäre' mit sich bringt:

Quadrate von negativen Schwankungen können Quadrate positiver Schwankungen bei der Bildung von Mittelwerten nicht kompensieren!

Damit hat sich die Hoffnung zerschlagen, die Übergänge zu größeren Skalen auf dem Weg zum Klima jemals dadurch meistern zu können, die jeweils neu gemittelten Variablen immer wieder in die 'alten' Gleichungen einsetzen zu dürfen. Das würde nur für lineare Systeme funktionieren, (oder für nichtlineare Systeme, die man durch lineare Gleichungen modelliert, was bei der 'Klimaziel-Formel', geschieht).

Wegen der Nichtlinearität unserer Gleichung müssen wir aber auch Produkte von Schwankungen *verschiedener* Variablen bilden, wofür die *zweite* nichtlineare Beispielgleichung $z = x \cdot y$ von Seite 89 ein Beispiel ist. Unser Argument, dass Schwankungs-Produkte im Mittel nie verschwinden können, weil Quadrate nie negativ sein können, kommt im hier entstehenden *gemischten* Produkt der turbulenten Schwankungen, der ***Korrelation*** $\overline{x'y'}$, nicht zum Tragen. Sind *beide* Faktoren dieses Produktes positiv oder negativ, ist der Beitrag zum Mittelwert $\overline{x'y'}$ natürlich positiv. Aber es kann ja auch sein, dass eine der beiden Schwankungsgrößen positiv ist und die andere negativ! Dann ergeben sich negative Beiträge zu diesem Mittelwert! Die insgesamt vier möglichen Fälle verdeutlichen wir durch die Symbole (++), (--), (+-), (-+): In den beiden ersten Fällen erhält man positive Beiträge, in den beiden letzten Fällen erhält man negative Beiträge zur Korrelation.

Kompensieren sich also alle vier Fälle doch wieder zu Null, also $\overline{x'y'} = 0$? Die Gleichung $\overline{x\,y} = \bar{x}\,\bar{y} + \overline{x'y'}$ von Seite 95 im Auge, hätte man in diesem Falle doch wieder $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$! *Bleiben also Gleichungen, deren Nichtlinearität sich nicht in Quadraten der Variablen ausdrückt, sondern in Produkten verschiedener Variablen, doch unverändert bei Mittelung?*

Das wäre sicher so, wenn man zwei Zahlenfolgen x und y aus zwei hinreichend langen Würfel-Serien verwenden würde. Dann verschwände nicht nur der Kreuz- und der Leonard-Term, sondern eben auch die Reynolds-Korrelation $\overline{x'y'}$. Die beiden Würfelserien hätten nichts 'miteinander zu tun'. Sie wären nicht ***korreliert***. Für zwei atmosphärische Variablen x und y im Klimasystem wäre es allerdings nur dann so, wenn die Würfelanalogie [Lat04] richtig wäre, wenn sich also eine Vorhersagbarkeit des Klimas als Mittelwert über Wetter ebenso begründen ließe wie die tatsächliche Vorhersagbarkeit von Mittelwerten über Würfelergebnisse. Die gleiche Behauptung ist 2008 in einem Focus-Interview noch einmal wiederholt worden, [Lat-in], wobei sogar ergänzt wurde, dass alle, die das anders sehen, 'nichts von der Physik des Klimas verstehen' - *so im Wortlaut!*

Ich hoffe sehr, dass Sie, liebe Leserin, lieber Leser, mein Buch weiterlesen, trotz dieser Abwertung meiner Kompetenz bei den Begründungen der Fehlerhaftigkeit der Würfelanalogie (→ Seite 50). Ich möchte Ihnen nun Beispiele dafür zeigen, in denen Korrelationen $\overline{x'y'}$ zwischen Variablen tatsächlich zustande kommen können, trotz der oben durch die Symbole (++), (--), (+-), (-+) veranschaulichten Möglichkeit der Kompensation *aller* Schwankungen zu Null. Es lohnt sich, dieses wichtige Thema genau zu studieren, denn nur dann kann man manche kritikwürdige Beiträge in der Klimadiskussion durchschauen. Gehen wir Schritt für Schritt voran.

Nehmen wir zur Veranschaulichung zunächst einen (im wahrsten Sinne des Wortes) 'weit hergeholten' Fall an: Hinter einer Serie von x'-Werten verbergen sich Temperaturschwankungen an einem Tag des Jahres 2000 in Berlin, und y' seien ebenfalls Temperaturschwankungen, aber an einem Tag des Jahres 1900 in Tokyo. Da die Temperaturwerte vor 100 Jahren in Tokyo und die 100 Jahre späteren Temperaturwerte bei uns kaum etwas miteinander 'zu tun' haben, kann man sagen, dass alle vier oben symbolisch angedeuteten möglichen Fälle von positiven und negativen Schwankungen $x'y'$ gleich wahrscheinlich sind. Da die Fälle (++) und (- -) positive, Fälle (+ -) und (- +) negative Beiträge zu $\overline{x'y'}$ liefern, ist das Ergebnis $\overline{x'y'} = 0$ zu erwarten.

Nun aber verringern wir den zeitlichen und den räumliche Abstand der beiden Temperatur-Reihen deutlich. Je geringer diese Abstände sind, desto 'ähnlicher' werden sich die Schwankungen aus beiden Reihen. Es wird immer wahrscheinlicher, dass beide Schwankungen das gleiche Vorzeichen haben. M.a.W., die 'positiven' Fälle (++) oder (--) werden immer wahrscheinlicher, und die 'negativen' Fälle (+-) oder (-+) immer unwahrscheinlicher. Die Korrelation $\overline{x'y'}$ wird nun kaum noch verschwinden. Man kann sich das auch dadurch veranschaulichen, dass ja bei *gänzlich* verschwindenden räumlichen und zeitlichen Abständen die beiden Schwankungsreihen miteinander identisch werden, so dass die Korrelation $\overline{x'y'}$ in die nie verschwindende 'Selbstkorrelation' $\overline{x'^2}$ übergeht!

Das Thema 'Korrelationen' beschränkt sich nicht nur auf die Zusatzterme, die bei Mittelungen von quadratisch nichtlinearen Gleichungen entstehen, sondern auch auf Schwankungsprodukte von Größen, die in keiner bekannten Gleichung auftauchen, wie z.B. die bisher besprochenen Produkte von räumlich oder zeitlich versetzten, *sonst aber gleichen* atmosphärischen Variablen, in unserem Beispiel die Temperatur. Man studiert Korrelationen zeitlich auseinanderliegender Variablen, um etwas zu erforschen, das man 'Beharrungsvermögen' atmosphärischer Zustände nennen könnte, oder einfach ihr 'Gedächtnis'. Letztendlich erkundet man durch solche Studien die zeitliche Größenskala atmosphärischer Prozesse. Und die dazugehörige räumliche Größenskala kann man durch das Studium räumlicher Korrelationen erkunden.

Betrachten wir nun aber den vielleicht interessanteren Fall, dass $\overline{x'y'}$ das mittlere Schwankungs-Produkt von zwei *verschiedenen* Variablen am *gleichen* Ort und zur gleichen Zeit ist. Nun kann eine positive Korrelation $\overline{x'y'} > 0$ nicht mehr durch eine große zeitliche und/oder räumliche Nähe erklärt werden, x und y müssen auf andere Weise etwas 'miteinander zu tun' haben. Eine festgestellte positive Korrelation zwischen x und y muss durch physikalische Wechselwirkungen zwischen ihnen - durch ihre ***Vernetzung*** - entstanden sein!

Ich muss aber schon hier einem weit verbreiteten Missverständnis vorbeugen, nämlich dem, dass diese Korrelation bedeuten würden, dass zwischen x und y *direkte* Wechselwirkung stattfänden, dass dadurch eine monokausale Wechselwirkung, eine *ausschließliche* Ursache-Wirkungs-Beziehung nachgewiesen wäre - die es übrigens in komplexen Systemen sowieso nicht gibt. Eine Korrelation $\overline{x'y'} > 0$ kann selbst dann entstehen, wenn *gar keine* wechselseitigen physikalischen Einflussnahmen zwischen x und y vorliegen. Das berühmteste Beispiel hierzu ist wohl die vorhandene Korrelation zwischen Geburtenraten und Storch-Populationen. Das - bei falscher Interpretation - Zustandekommen solcher irreführenden Korrelationen $\overline{x'y'} > 0$ im atmosphärischen Geschehen zu erläutern, ist eine meiner wichtigsten Aufgaben in diesem Buch, denn hier handelt es sich um eine Schlüssel-Erkenntnis zum Verständnis auch des Klimasystems - und aller anderen komplexen Systeme!

Auch hier gehen wir behutsam Schritt für Schritt voran. Betrachten wir zunächst Beispiele. x sei entweder der Luftdruck (Symbol p) oder der atmosphärische CO_2-Gehalt (Symbol C) der Luft. y sei in *beiden* Fällen die Temperatur (T). Wir fragen also nach den Korrelationen von Luftdruck und Temperatur $\overline{p'T'}$ einerseits und von CO_2-Gehalt und Temperatur $\overline{C'T'}$ andererseits.

Es gibt kalte Hochdruckgebiete (kurz: 'kalte Hochs'), aber auch 'warme Hochs'. Es gibt auch 'kalte Tiefs' und 'warme Tiefs': Im Sommer ist es bei Hochdruck-Wetterlagen bekanntlich eher warm, bei Tiefdruck eher kalt. Im Winter ist es meist umgekehrt. Warme Hochs und kalte Tiefs verkörpern ja die Fälle $(++)$ und $(--)$ für positive Korrelationen $\overline{p'T'} > 0$, während kalte Hochs und warme Tiefs die Fälle $(-+)$ und $(+-)$ für negative Korrelationen verkörpern. Offenbar kann man in der Vielfalt des atmosphärischen Geschehens so schnell keine Regel erkennen, nach der - *klimatologisch* gesehen, d.h. bei einer Mittelung über die so vereinbarten 30 Jahre - die Vorzeichen von Druck- und Temperaturschwankungen bevorzugt gleiche oder unterschiedliche Vorzeichen haben.

Das muss nicht heißen, dass die Korrelation $\overline{p'T'}$ *exakt* Null ist, aber sie wird sicherlich kleiner sein als z.B. der Term $\overline{C'T'}$: Die Vorzeichen der T-Schwankungen und der C-Schwankungen sind häufig gleich, was man bekanntlich durch einen ***Treibhauseffekt*** begründet, der in der öffentlichen Klima-Diskussion dermaßen im Vordergrund steht, dass ich mich frage, ob ich ihn hier überhaupt noch erklären muss. Worauf ich sicher noch zurückkommen werde, ist die Tatsache, dass das atmosphärische Treibhaus überaus komplexer ist als z.B. ein Gewächshaus, so dass es manche AGW-Kritiker nicht mehr als 'Treibhaus' wiedererkennen und dann behaupten, es *gäbe* gar keinen atmosphärischen Treibhauseffekt. Vorerst beschränke ich mich auf einen Hinweis auf meine Darstellungen in www.hajolange.de / Kap.07 Strahlung und atmosphärische Energetik.pdf, Seiten 390ff. All das heißt aber nicht, dass die Korrelation $\overline{C'T'} > 0$ nicht unter erheblicher 'Mitwirkung' auch anderer Wechselwirkungen zwischen C, T und sehr vielen anderen atmosphärischen Variablen zustande gekommen wäre.

Allgemeiner ausgedrückt, muss eine hohe Korrelation zwischen zwei Variablen x und y *keinesfalls* dadurch verursacht worden sein, dass es nur *einen* relevanten direkten physikalischen Einfluss von x nach y gibt, was wir hier symbolisch durch $x \rightarrow y$ kennzeichnen wollen. Den Fall $x \rightarrow y$ verbalisiert man oft mit den Bezeichnungen, x sei ein ***Klimafaktor*** und y ein ***Klimaelement***. (Mit a→b, b→c usw. haben wir auch schon *Schritte auf der 'Körnungsleiter'* gekennzeichnet. Also bitte nicht verwechseln mit der hier verwendeten 'Pfeil-Symbolik' zur Kennzeichnung von *Ursache-Wirkungs-Beziehungen*).

Die gegenwärtige Klimadiskussion wird jedoch von der Behauptung der AGW-Vertreter beherrscht, dass *doch* bewiesen sei, dass der physikalische Einfluss $C \rightarrow T$ der einzige relevante für die Klimaentwicklung sei. Das könnte man noch als 'ungeschickte Formulierung' hinnehmen, wenn die *Wahrscheinlichkeit* für die Richtigkeit dieser Behauptung hoch wäre. Dagegen sprechen aber, im wahrsten Sinne des Wortes, *viele* Gründe: Für *sehr viele* weitere Freiheitsgrade - nennen wir sie x_n, ($n = 1,2,...$) - gilt ebenfalls $x_n \rightarrow T$! Sie beeinflussen ebenfalls die Temperatur des Klimasystems! Zwar sind sicherlich viele der entsprechenden Korrelationen $\overline{x_n' T'}$ kleiner als die Korrelation $\overline{C' T'}$, *aber nicht wenige sind es nicht!*

Das allein reicht ja schon aus, die Behauptung der 'Klimaziel-Formel', *nur* der Einfluss $C \rightarrow T$ sei relevant, zu widerlegen. Darüber hinaus kann auch eine starke Beeinflussung der Art $T \rightarrow C$ (also nicht 'CO_2 erwärmt die Atmosphäre', sondern eine 'anders verursachte Erderwärmung vermehrt das CO_2') zu einer hohen Korrelation $\overline{C'T'}$ führen! Für $T \rightarrow C$ gibt es konkrete Beispiele - z.B. eine verstärkte CO_2 Ausgasung aus erwärmten Gewässern. Die physikalischen Beeinflussungen $T \rightarrow C$ vertauschen hier ihre Rollen als ***Klimafaktor*** und ***Klimaelement****!* Offenbar sind diese Begriffe nicht sinnvoll für die atmosphärisch-internen Variablen. Noch viele Beispiele in diesem Buch werden das untermauern. Es werden alles Beispiele dafür sein, dass im Grunde genommen alle atmosphärischen Variablen miteinander vernetzt sind im Sinne echter Wechsel-Wirkungen, und nicht im Sinne einseitig gerichteter Wirkungen. Übrigens ist *jede* Variable, die Mitglied einer Rückkopplungs-Schleife ist, trivialerweise gleichzeitig Klimafaktor und Klimaelement. Auch dazu werden noch Beispiele folgen.

Auf $C \rightarrow T$ zu pochen und $T \rightarrow C$ zu ignorieren, ist ein Beispiel dafür, statt von 'echten' Vernetzungs-Pfaden zwischen Variablen auszugehen einseitig gerichtete Wirkungen anzunehmen. Und wenn man auch sonstige Beeinflussungen $x_n \rightarrow T$ ignoriert, macht man aus 'Einbahnstraßen-Vernetzungen' auch noch ***monokausale*** Beziehungen. M.a.W., in der aktuellen Klimadiskussion, in der es ja *nur* noch um die 'Reduzierung' des einen Effektes $C \rightarrow T$ geht - z.B. durch CO_2-reduzierende Energie-Maßnahmen - wird die Komplexität ignoriert, und, wie schon mehrfach betont, das rächt sich!

Ein weiteres Beispiel: Schon mehrfach wurden positive Korrelationen zwischen der Sonneneinstrahlung (Symbol S) und der Temperatur T gefunden, die größer sind als die zwischen C und T. Diese Korrelation $\overline{S'T'}$ scheint ja mehr als plausibel zu sein, beschreibt sie doch die einfache Tatsache, dass die Sonne die Erde beheizt. Dennoch wäre diese Interpretation ein Trugschluss - wieder einmal hätte sich die Nichtbeachtung der Komplexität gerächt - weil die Erhöhung der solaren Einstrahlung so minimal ist, dass sie für messbare direkte Temperaturschwankungen nicht ausreicht. Die physikalischen Ursachen für die *tatsächlich gemessenen* hohen Korrelationen $\overline{S'T'}$ sind ein weiteres Mal komplexer als gedacht:

An die Stelle einer *direkten Erwärmung* durch positive Schwankungen von S könnte nach der sehr plausiblen Theorie von H. Svensmark (2008) eine *Reduzierung der Abkühlung* treten, die von einer verringerten Bildung von Kondensationskeimen für kühlende niedrige Wolken verursacht wird. [SC08]. Der komplexe Vernetzungspfad, der hier angesprochen wird, schließt tatsächlich *auch* die solare Einstrahlung mit ein, aber eben nicht auf dem direkten Weg der unmittelbaren 'Erwärmung durch mehr Strahlung', sondern auf mannigfachen Umwegen: Die erhöhte Solarstrahlung hängt zusammen mit der Sonnen-internen Konvektion, diese mit der solaren magnetischen Aktivität, diese mit der Anzahl der Sonnenflecken, und diese mit dem sogenannten Sonnenwind. Dieser Sonnenwind wiederum drängt den Anteil der kosmischen Strahlung zurück, der von Super-Novae-Explosionen stammt und daher so hochenergetisch ist, dass er ohne den 'Sonnenwind-Schutz' noch stärker in die unteren atmosphärischen Schichten eindringen würde und dort Kondensations-Keime bilden würde, die ihrerseits kühlende Wolken entstehen lassen.

(Oh je, lange Ursache-Wirkungs-Ketten animieren offenbar auch zu langen Wortketten, mit denen man sie beschreiben möchte). Positive Schwankungen der Solarstrahlung führen also tatsächlich zu positiven Temperatur-Schwankungen, zwar nicht durch direkte Erwärmung, aber durch 'Rückdrängung' von Abkühlungsprozessen, die mit Wolkenbildungen verbunden sind. Dazu gehören die kurzfristigen Abkühlungen durch Abschattung der direkten Sonneneinstrahlung und durch die Reflexion der

Sonneneinstrahlung an der weißen Wolken-Obergrenze (die sogenannte ***Albedo***), aber auch die Reduzierung einer längerfristigen Abkühlung durch regenbedingtes Auswaschen des Treibhausgases CO_2.

Es gibt unermesslich viele weitere Vernetzungspfade innerhalb der vielen atmosphärischen Variablen, die zu 'allen möglichen' sonstigen Korrelation führen können. Z.B. können Wolken auch zur Erwärmung statt zur Abkühlung beitragen. Das trifft aber eher auf höherliegende Wolken zu. Die hier wirksamen Vernetzungspfade zwischen den atmosphärischen Variablen berücksichtigen z.B., dass auch der Wasserdampf in den Wolken ein Treibhausgas ist, und dass bei Regen nicht nur das Gas CO_2 ausgewaschen wird, sondern auch SO_2, welches durch Verringerung der Albedo für Abkühlung sorgt, und dass bei Verbrennung fossiler Brennstoffe ebenso entsteht wie CO_2.

Ehe wir uns in unzähligen weiteren Beispielen für kaum oder gar nicht vorhersagbare atmosphärische Vernetzungspfade verlieren, sollten wir nun einen systematischeren Weg einschlagen zur Erklärung der Bedeutung von Korrelationen. Meistens werden Beispiele angeführt, um die ***AGW-Theorie,*** hier verkürzt formuliert:

$$\mathrm{C}\rightarrow\mathrm{T} \quad \textit{ist die alleinige relevante Ursache für} \quad \overline{\mathrm{C'T'}} > 0$$

entweder zu beweisen oder zu widerlegen. Hier soll aber gezeigt werden, dass es solche Beweise oder Widerlegungen nicht geben kann, einfach weil die Anzahl der 'Konkurrenten' von $\mathrm{C}\rightarrow\mathrm{T}$ zu groß (und 'zu unbekannt') ist, um genau untersucht werden zu können. Vielleicht deutete sich ja in den Beispielen schon an, dass die Einwirkungen der Art $x_n\rightarrow\mathrm{T}$ nicht einmal die einzigen 'Konkurrenten' sind:

Wenn zwei Variablen x und y korreliert sind, so wie z.B. T und C, und wenn auch ein physikalischer Mechanismus bekannt ist, der diese Korrelation erklären könnte, so wirkt das fast wie ein Beweis für die AGW -Theorie, in unserem allgemeinen Fall also für eine Beeinflussung $x \rightarrow y$ oder $y \rightarrow x$. Aber es *ist* kein Beweis! Da es so viele vernetzte atmosphärische Variablen gibt, reicht die menschliche Phantasie gar nicht aus, alle weiteren potentiellen Vernetzungspfade aufzuzeigen, die ebenfalls eine Korrelation $\overline{x'y'} > 0$ ergeben können, sogar dann, wenn eine Beeinflussung $x \rightarrow y$ oder $y \rightarrow x$ *überhaupt nicht* stattfindet. Die einfachste Möglichkeit hierzu ist die, dass irgendeine dritte Variable u die beiden Variablen x und y in gleicher oder ähnlicher Weise so beeinflusst, so dass diese sich sehr ähnlich werden, und die Produkte ihrer turbulenten Schwankungen häufiger mit den Vorzeichen (++) oder (- -) als mit den gemischten Vorzeichen (+ -) oder (- +) versehen sind. Das Resultat ist dann ein positiver Mittelwert dieser Schwankungsprodukte, also wie behauptet $\overline{x'y'} > 0$, sogar dann, wenn sich x und y gegenseitig rein gar nicht beeinflussen würden. Dieser Vorgang kann symbolisiert werden durch

$u \to x$ *und* $u \to y$

Eine weitere Möglichkeit wäre

$u \to x \leftarrow v$ *und* $u \to y \leftarrow v$

Hier werden x und y jeweils von zwei Variablen u und v beeinflusst, was auch zu einer Korrelation $\overline{x'y'} > 0$ führen könnte, ohne dass $x \to y$ oder $y \to x$ stattfindet. So oder so ähnlich entsteht wohl auch die Korrelation zwischen Geburtenraten und Storchpopulationen, *ohne* dass - wenn ich mich recht erinnere - der Storch die Kinder bringt. Denkbar ist aber auch der besonders interessante Fall

$x \to y \leftarrow u$

wo der Einfluss von u auf y einen *doch* vorhandenen direkten Einfluss von x auf y so maskieren könnte, dass die aus einem isolierten Einfluss $x \to y$ erwachsende Korrelation zum Verschwinden gebracht wird. Wir wussten ja schon, dass eine Korrelation zwischen zwei Variablen nicht beweist, dass es direkte physikalische Beeinflussungen zwischen ihnen gibt. Und nun sehen wir, dass auch das Fehlen einer Korrelation nicht beweist, dass es *keine* direkte physikalische Beeinflussung zwischen ihnen gäbe!

Noch ein Beispiel: Beeinflussungen z.B. von x werden von sehr vielen Variablen ausgehen, wie etwa im folgenden Fall: Eine Variable q beeinflusst vor ihrer 'Ankunft' bei x auf langen Wegen viele andere Variable, was so symbolisiert werden kann:

$q \to r \to s \to t \to u \to v \to w \to x$

Eine solche ***kausale Kette*** von Beeinflussungen ist eigentlich nichts Besonderes, sondern eher der Normalfall. Eigentlich war auch unsere Kürzel $C \to T$ für das dominierende Thema der öffentlichen Klimadiskussionen nur eine Abkürzung für solche Wirkungsketten: Das CO_2 erwärmt ja die Luft nicht direkt wie ein Feuer, sondern erst nach einer kausalen Kette von Wechselwirkungen, welche kurzwellige solare Strahlung, langwellige terrestrische Strahlung, Reflektionen, Emission und Absorption von Strahlungen am Erdboden, an Wolken und an Luftbestandteilen (Aerosolen) und vieles mehr umfassen.

Oft - eigentlich fast immer - werden auch zusätzliche Pfeile an bestimmten Stellen einer Kausalkette wie der obigen abzweigen, als Beginn einer anderen Kausalkette, oder es werden auch völlig andere Kausalketten an bestimmten Stellen dieser Kausalkette - eigentlich an allen - einmünden. So entsteht ein regelrechtes, äußerst dichtes Netzwerk aus Kausalketten. Sehr berühmt sind Kausalketten, die an irgendeiner Stelle starten und zu derselben Variablen wieder zurückkommen. Solche geschlossenen Wirkungsschleifen nennt man ***Rückkopplungen,*** engl. 'feedback'. Diese Rückkopplungen können bewirken, dass turbulente Schwankungen der Ausgangsvariable verstärkt oder abgeschwächt werden. Im ersten Fall spricht man von ***positiver*** oder von ***labilisierender*** oder von ***entstabilisierender*** Rückkopplung, im zweiten Fall von ***negativer*** oder von ***stabilisierender*** Rückkopplung.

Und nun können sie in eigener Regie weitermachen, liebe Leserin, lieber Leser. Nehmen sie sich ein großes Blatt Papier, schreiben Sie in die Mitte die beiden Buchstaben C und T, streuen sie auf dem gesamten Blatt alle Buchstaben des lateinischen, griechischen und sonstiger Alphabete aus, und zeichnen Sie sehr viele Pfeile zwischen all diesen Buchstaben, aber nicht nur zwischen den auf dem Papierblatt *benachbarten* Buchstaben. Je mehr Buchstaben und Pfeile Sie zeichnen, ein desto besseres Abbild des Komplexitätsgrades der Atmosphäre haben Sie erreicht: Die Buchstaben sind ja nichts anderes als die Variablen der Atmosphäre, zu denen z.B. auch der Tau auf den Pflanzen und der Atem der Menschen und Tiere gehört, und die Pfeile stehen für die wechselseitigen physikalischen Beeinflussungen, also für die ***Vernetzung*** der Variablen.

Letztendlich bestimmt dieses Netzwerk der wechselseitigen physikalischen Beeinflussungen darüber, ob zwischen irgendwelchen Variablen, wie z.B. zwischen C und T, stärkere Korrelationen aufgebaut werden oder nicht. Korrelationen sind also tatsächlich immer physikalisch bedingt, allerdings in einer vollkommen unüberschaubaren Weise!

Wieso ist dieses Netzwerk so dicht? Weil streng genommen in der Atmosphäre jede Variable von jeder abhängt. Ein Beispiel: Wenn es regnet, werden Pflanzen (Zimmerpflanzen ausgenommen) unbestreitbar nass. Aber wenn man die Pflanzen mit einer Gießkanne bewässert, steigt auch die Regenwahrscheinlichkeit: Die Verdunstung befördert zusätzlichen Wasserdampf in die Atmosphäre, der dann die Regenwolken verstärkt! Sie müssten also eigentlich *jeden* Buchstaben auf ihrem Papier mit *jedem* anderen verbinden! Aber das Regen-Beispiel macht auch deutlich, dass nicht alle physikalischen wechselseitigen Beeinflussungen zwischen den Variablen gleich stark sind. Sie dürfen also den Pfeil von der Variablen 'Benetzungsgrad einer Pflanze' zur Variablen 'Niederschlag' zur Not auch weglassen.

Aber selbst bei der Beurteilung äußerst kleiner, unbedeutender Wirkungen ist Vorsicht geboten: Wir haben es hier nicht nur mit Vernetzung zu tun, sondern auch mit

Nichtlinearität, dem zweiten Charakteristikum für Komplexität. Und wenn Nichtlinearität im Spiel ist, ist unter Umständen auch die von Lorenz begründete Chaostheorie mit ihrem Schmetterlings-Effekt nicht mehr fern, und dann sind die kleinen Variablen gar nicht mehr klein [Lor63]. In der Sprache der Synergetik nach H. Haken können in nichtlinearen Systemen einige wenige 'eigentlich unbedeutende' Variablen zu ***Ordnern*** werden, die dann alle anderen Variablen ***versklaven*** und dann nahezu das gesamte nichtlineare System dominieren, [Hak82], also auch die Korrelationen entsprechend verändern. Dafür mag die befeuchtete Pflanze als Auslöser eines Dauerregens ein schlechtes Beispiel sein, aber es veranschaulicht, dass es schon schwer ist, die 'ordnerfähigen' Variablen überhaupt zu finden, geschweige denn ihre Entwicklung zu prognostizieren, wie es für eine Vorhersagbarkeit des nichtlinearen Systems aber nötig wäre.

Genau genommen, müsste man für eine Übersicht über die Vernetzungen aller atmosphärischen Variablen mit dicken und dünnen Pfeilen arbeiten, und die Dicke dieser Pfeile müsste auch noch zeitabhängig sein, wie aus dem ***Schmetterlingseffekt*** der ***Chaostheorie*** *und* aus dem ***Ordner-Effekt*** der ***Synergetik****.* Aber ist Ihr tolles Bild, liebe Leserin, lieber Leser, auch ohne solche 'Feinheiten' nicht schon unübersichtlich genug? Sie sehen ja kaum noch die Buchstaben C und T in der Bildmitte, und die kleine Pfeilkette von C nach T sehen Sie auch kaum noch, auch wenn ihre Pfeile dicker sind als viele andere Pfeile. Und vielleicht staunen Sie nun darüber, wie gewagt die Behauptung der AGW-Vertreter ist, dass diese in der riesigen Menge anderer dicker und dünner Pfeile fast untergetauchte Pfeilkette als einzige bestimmen soll, wie die klimatische Entwicklung der Atmosphäre verlaufen wird.

Wenn 'nahezu unendlich' viele solcher verzahnter Wirkungsketten Korrelationen zwischen zwei Variablen aufbauen können, so ist es schon abenteuerlich, aufgrund einer durch Messung gefundenen Korrelation zu behaupten, man wüsste, dass diese von nur einer einzigen dieser Ketten 'gemacht' wird, nämlich diejenige, die die beiden Variablen direkt, monokausal, und in der Wirkungsrichtung als 'Einbahnstraße' ausgebildet, miteinander verbindet. Auf einer 'so' vorhergesagten Verursachung basieren aber Milliarden-Investitionen, mit denen man meint, die vermeintlichen Entwicklungen aufhalten zu müssen und zu können. Das sind Geld-Beträge, die wohl besser dafür eingesetzt wären, konkretere Gefahren abzuwehren, wie globalen Hunger und Krankheit, globale Bildungs-Defizite und Armut mit all ihren Nebenwirkungen, z.B. auch mit der Nebenwirkung eines ganz *anderen* globalen Anstiegs, nicht der Temperatur, sondern des Terrorismus.

Korrelationen sind also ein denkbar schlechtes Hilfsmittel, wenn man Indikatoren für Zusammenhänge zwischen den verschiedensten ausgewählten atmosphärischen

Variablen sucht. Andererseits tauchen Korrelationen auch in den gemittelten nichtlinearen einfachen Beispiel-Gleichungen auf, wie wir gesehen haben. Sie treten auch in Differentialgleichungen auf, welche die zeitliche Veränderung gemittelter Variablen in Abhängigkeit von anderen gemittelten Variablen beschreiben. Differentialgleichungen sind sozusagen das mathematische Hilfsmittel, mit dem man die bisher nur durch eine 'Pfeil-Symbolik' beschrieben Wechselwirkungen zwischen den Variablen wirklich berechnen kann. Z.B. lautet die Differentialgleichung, welche die durch die Symbolik $x \rightarrow y \leftarrow u$ zum Ausdruck kommende Veränderungsphysik berechnet, in verbaler Form:

Zeitliche Änderung von y = *eine* ***Einflussfunktion****, die von* x und von u abhängt.

(Die symbolische - mathematische - Schreibweise dieser Gleichung lernen wir in Kapitel 3.2 kennen). Diese Gleichung enthält noch keine Korrelationen. Diese entstehen ja erst nach Mittelung der Gleichung, und auch nur dann, wenn die Einflussfunktion nichtlinear ist, weil erst dann die durch notwendige Mittelungen neue unbekannte Zusatzterme erzeugt werden. Diese Bedingung ist aber in atmosphärischen Gleichungen immer erfüllt. Die Einflussfunktionen enthalten also nicht nur unterschiedliche Variablen, sondern auch *Produkte* von Variablen, und - ganz wichtige Wiederholung - jedes Mittel über ein solches Produkt ergibt das Produkt der Mittelwerte plus die entsprechende Korrelation, wie wir ab Seite 90 ausführlich beschrieben haben. Inzwischen unterhalten wir uns aber nicht mehr über das formale Ergebnis der Mittelung eines Produktes *irgendwelcher* Variablen, sondern über das Ergebnis der Mittelung eines Produktes von Variablen, die in so einer Differentialgleichung vorkommen können. Das sind gar nicht sehr viele. Woran liegt das?

Der physikalische Hintergrund einer Differentialgleichung liegt meist in der Bilanzierung irgendwelcher ***quantitativer Größen*** - auch ***Mengengröße*** oder ***extensive Größe*** genannt - für ein Eulersches Luftpäckchen (→ Kap. 2.2). Eine quantitative Größe eines Menschen ist z.B. sein Gewicht. Dieses kann man Bilanzieren, anhand von Nahrungsaufnahme, Kalorienverbrauch bei Sport usw. (Die entsprechende Differentialgleichung dafür ist allerdings höchst komplex). Eine ***qualitative Größe*** dagegen - auch ***intensive Größe*** genannt - ist z.B. seine Augenfarbe. Quantitative Größen des Eulerschen Luftpäckchens sind z.B. sein Energiegehalt oder seine Masse. Temperatur und Druck sind hier qualitative Größen. Das verdeutlicht sich in einem Gedanken-Experiment: Wenn man zwei gleiche Eulersche Luftpäckchen zu einem einzigen zusammenfasst, dann ändern sich der Druck und die Temperatur nicht, während sich die Masse, die Energie und andere quantitative Größen dabei verdoppeln. Aber auch ohne Systemvergrößerungen können sich die quantitativen Größen eines Luftpäckchens ändern. Jedoch gibt es dafür nur zwei Möglichkeiten:

1) Die betreffende Größe wird im Inneren des Luftpäckchens erzeugt oder vernichtet

2) Die betreffende Größe wird durch die Grenzen des Luftpäckchens hindurch nach innen oder nach außen transportiert.

Wenn Sie sich, liebe Leserin, lieber Leser, noch an den in Kap. 2.2 beschriebenen Unterschied zwischen Eulerschen und Lagrange'schen Luftpäckchen erinnern, werden Sie mir zustimmen, dass zumindest Massen-Importe und Massen-Exporte in Lagrange'schen Luftpäckchen nicht möglich sind, denn diese sind ja dadurch definiert, dass sie immer aus den gleichen Luft-Molekülen und Atomen bestehen. Daher finden in diesen Luftpäckchen auch keine Importe oder Exporte von Größen statt, die an die Masse gekoppelt sind: Wenn wärmere Luft in ein Eulersches Luftpäckchen einströmt, wird dieses natürlich ebenfalls erwärmt, also nicht nur bei Wärmeleitung oder Wärmestrahlung von außen. In der Fachsprache ausgedrückt:

*Es gibt keine **konvektiven Transporte** durch die Grenzen von Lagrange'schen Luftpäckchen.*

Lagrange'sche Luftpäckchen 'schwimmen' ja mit der Strömung mit, und sie werden daher nicht 'durchströmt', im Gegensatz zu den ortsfesten Eulerschen Luftpäckchen. Ein 'Durchströmen' der letzteren ist natürlich mit konvektiven Importen *und* Exporten verbunden, und wenn z.B. der Import größer ist als der Export, wirkt sich das positiv aus auf die Änderung der transportierten Größe.

Betrachten wir als einfachstes Beispiel einen konvektiven Massentransport. In der Bilanz-Differentialgleichung für die Masse des Eulerschen Luftpäckchens *muss* die *Einflussfunktion* (→Seite 105) nichtlinear sein, denn sie muss das Produkt der beiden Variablen Massendichte und Geschwindigkeit enthalten: Der Massentransport ist natürlich umso größer, je größer die Massendichte ist (das ist die Masse pro Volumen), und je größer die Transportgeschwindigkeit ist. Geben wir diesen beiden Variablen die Symbole ρ für die Dichte bzw. $\mathbf{v}$ für die Geschwindigkeit - der Fettdruck '$\mathbf{v}$' soll darauf hinweisen, dass die Geschwindigkeit ein Vektor ist - dann enthält die Einflussfunktion der Differentialgleichung irgendwo das nichtlineare Produkt $\rho\mathbf{v}$. Und wenn die Differentialgleichung gemittelt wird, dann wird auch dieses Produkt gemittelt. Das Resultat dieser Mittelung (unter der Voraussetzung der Existenz der entsprechenden Energielücke und der daraus folgenden Anwendbarkeit des Reynolds'schen Postulates, → Seite 90) kennen wir schon von dort:

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = \bar{\rho}\,\bar{\mathbf{v}} + \overline{\rho'\mathbf{v}'}$$

Nun haben wir ein konkretes Beispiel, wo die Symbole etwas Konkretes bedeuten und nicht, wie bei der Behandlung des Produktes xy, *irgendwelche* Variablen sind. Noch einmal zur Verdeutlichung: $\overline{\rho\mathbf{v}}$ ist der gemittelte Massentransport durch den ***Wind*** (wie man die Luftströmung ja auch nennen kann). Dagegen ist $\bar{\rho}\,\bar{\mathbf{v}}$ der Transport der gemittelten Masse durch den gemittelten Wind, und beides ist nicht das gleiche, denn diese beiden Transporte unterscheiden sich durch Transporte, die auch von den turbulenten Schwankungen der Massendichte und des Windes herrühren! Daher nennt man $\overline{\rho'\mathbf{v}'}$ auch einen mittleren ***turbulenten Transport***.

Sowohl der mittlere als auch der turbulente Windanteil sind Vektoren, also Zusammenfassungen von drei Raumkomponenten v_x, v_y, v_z des Windes, z.B. nach Osten, nach Norden und nach oben. Wir beschränken uns in der folgenden Veranschaulichung des turbulenten Transportes auf die Windkomponente v_x nach Osten. Wir verwenden wieder die Schwankungsvorzeichen (++), (- -), (+ -), (- +) von Seite 96: Z.B. bedeutet (+ +) eine positive Schwankung der Massendichte, d.h. $\rho' > 0$ und auch eine positive Schwankung der Geschwindigkeit nach Osten, d.h. $v_x'>0$.

Wir betrachten also einen Fall höherer Massendichte als im Durchschnitt, die sich gerade im Rahmen einer Windschwankung $v_x' > 0$ nach Osten bewegt. Wenn sich aber die Luft gerade dann, wenn sie dichter ist als im Durchschnitt, 'zufällig' etwas schneller nach Osten bewegt als im Durchschnitt, dann ist das wohl ein Beitrag der Schwankungsgrößen - der turbulenten Strömung - zum Massentransport nach Osten!

Die übrigen drei Fälle kann man sich ebenso veranschaulichen, so dass unsere Korrelation $\overline{\rho' v_x'}$ zu einem physikalisch anschaulich zu interpretierenden Term wird, in der Zusammenfassung:

(++): turbulente Massenüberschüsse fließen turbulent nach Osten
(- -): turbulente Massendefizite fließen turbulent nach Westen
(+ -): turbulente Massenüberschüsse fließen turbulent nach Westen
(- +): turbulente Massendefizite fließen turbulent nach Osten

Ein in irgendeine Richtung turbulent transportiertes turbulentes Massendefizit entspricht einem in die Gegenrichtung transportiertem Massenüberschuss. Daher entspricht der Fall (- -) ebenso einem Beitrag zum Massentransport nach Osten, wie auch der Fall (++). Analog beschreibt der Fall (- +), ebenso wie der Fall (+ -) *sowieso*, einen Beitrag zum turbulenten Massentransport nach Westen. Da die Fälle (++) und (--) positive Beiträge zum Mittelwert *aller* turbulenten Transportbeiträge sind, und weil die Fälle (+ -), (- +) negative Beiträge liefern, haben wir gefunden:

$\overline{\rho' v_x'} > 0$ bedeutet turbulente Massentransporte nach Osten

$\overline{\rho' v_x'} < 0$ bedeutet turbulente Massentransporte nach Westen

Insgesamt hat sich gezeigt, dass die wenigen Korrelationen in Differentialgleichungen physikalisch vollkommen anders zu beurteilen sind als die vielen Korrelationen, die man durch Messungen gewinnt und als statistisches Hilfsmittel verwendet, um zwischen irgendwelchen Variablen kausale Verknüpfungen 'nachzuweisen'. Während im zweiten Falle nur vage Ergebnisse herauskommen - weil z.B. völlig unterschiedliche Wirkungsketten eine gleiche Korrelation aufbauen können - haben Korrelationen in gemittelten nichtlinearen Differentialgleichungen sehr konkrete physikalische Bedeutungen.

Eine Korrelation $\overline{\rho' v_x'} > 0$ hat die gleiche prinzipielle Struktur wie der ungemittelte nach Osten gerichtete Massentransport $\rho v_x > 0$ oder wie der Massentransport $\bar{\rho}\ \overline{v_x}$ durch die gemittelten Größen. Nur sind es hier eben die turbulenten Größen, die transportieren bzw. transportiert werden. Wir können dieses Ergebnis sogar verallgemeinern:

Jede Korrelation irgendeiner Variablen mit einer Geschwindigkeit stellt einen turbulenten Transport dieser Größe dar!

Es tut mir fast leid, liebe Leserin, lieber Leser, dass ich Ihnen auf Seite 103 die frustrierende Veranschaulichung des Komplexitätsgrades der Atmosphäre in Form einer Vernetzungs-Grafik selbst überlassen habe. Aber wenn Sie keine Lust hatten, diese Grafik mit den vielen Buchstaben und Pfeilen anzulegen, biete ich Ihnen hier eine 'Ersatzlösung' an, die atmosphärische Komplexität zu veranschaulichen, nämlich einen kleinen Ausschnitt aus der auf Seite 88 angekündigten Arbeit von H. Fortak, in der er schon 1968 das hier abgelichtete Gleichungssystem entwickelt und dabei die Komplexität des Systems eindrucksvoll demonstriert hat [For68].

Es realisiert vierfache Mittelungen, an der sich auch die auf Seite 26 eingeführte vierstufige Körnungsleiter orientierte. Die Anzahl der Mittelungen wird hier durch die Zahl der Querstriche oder durch die Indizes 1-4 gekennzeichnet - oder durch eine Kombination von beiden:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_3 \overline{\frac{\mathbf{u}''^2_3}{2}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho_3 \overline{\frac{\mathbf{u}''^2_3}{2}}\,\mathbf{u}_4 + \overline{p_3\mathbf{u}''_3} - \overline{(\mathbb{F} - \rho\overline{\mathbf{u}''\mathbf{u}''} - \rho_1\overline{\mathbf{u}''_1\mathbf{u}''_1} - \rho_2\overline{\mathbf{u}''_2\mathbf{u}''_2})\cdot\mathbf{u}''_3} + \rho_3\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_3}{2}\,\mathbf{u}''_3}\right\} = Q\left\{\rho_3\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_3}{2}}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_2 \overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_2}{2}}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho_2 \overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_2}{2}}}\,\mathbf{u}_4 + \overline{\overline{p_2\mathbf{u}''_2}} - \overline{\overline{(\mathbb{F} - \rho\overline{\overline{\mathbf{u}''\mathbf{u}''}} - \rho_1\overline{\overline{\mathbf{u}''_1\mathbf{u}''_1}})\cdot\mathbf{u}''_2}} + \rho_2\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_2}{2}\,\mathbf{u}''_2}} + \rho_2\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_2}{2}\,\mathbf{u}''_3}}\right\} = Q\left\{\rho_2\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_2}{2}}}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_1 \overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_1}{2}}}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho_1 \overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_1}{2}}}}\,\mathbf{u}_4 + \overline{\overline{\overline{p_1\mathbf{u}''_1}}} - \overline{\overline{\overline{(\mathbb{F} - \rho\overline{\overline{\overline{\mathbf{u}''\mathbf{u}''}}})\cdot\mathbf{u}''_1}}} + \rho_1\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_1}{2}\,\mathbf{u}''_1}}} + \rho_1\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_1}{2}\,\mathbf{u}''_2}}} + \rho_1\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_1}{2}\,\mathbf{u}''_3}}}\right\} = Q\left\{\rho_1\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2_1}{2}}}}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho \overline{\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2}{2}}}}}\right\} + \nabla\cdot\left\{\rho \overline{\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2}{2}}}}}\,\mathbf{u}_4 + \overline{\overline{\overline{\overline{p\mathbf{u}''}}}} - \overline{\overline{\overline{\overline{\mathbb{F}\cdot\mathbf{u}''}}}} + \rho\overline{\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2}{2}\,\mathbf{u}''}}}} + \rho\overline{\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2}{2}\,\mathbf{u}''_1}}}} + \rho\overline{\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2}{2}\,\mathbf{u}''_2}}}} + \rho\overline{\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2}{2}\,\mathbf{u}''_3}}}}\right\} = Q\left\{\rho\overline{\overline{\overline{\overline{\frac{\mathbf{u}''^2}{2}}}}}\right\}$$

Lieber Laie, es geht hier natürlich nicht darum, diese Gleichungen irgendwie nachzuvollziehen oder zu verstehen. Welchen Vorteil soll es also haben, sie sich anzuschauen? Ehrlich gesagt, nur _ich_ habe einen Vorteil davon, weil ich Sie damit vielleicht doch noch beeindrucken kann, wie *groß* das Ausmaß der atmosphärischen Komplexität 'wirklich' ist, wie groß also der Abstand ist zwischen den Aussagen ...

Einerseits: man könne mit einer 'Klimaziel-Formel' berechnen, wie stark man die anthropogene CO_2-Produktion verringern müsse, um eine 'Erderwärmung' auf 2 Grad zu begrenzen, [Schell-tv1], im Wortlaut: "*Als Physiker kann ich sagen, dass meine Zahlen auf Analysen beruhen, die valide sind, die gültig sind*", (→ auch Seite 24), und

Andererseits: man müsse für solche Berechnungen mindestens Gleichungen des soeben angedeuteten 'Kalibers' lösen, wobei obendrein noch zu bedenken ist, dass selbst dieses Gleichungssystem die *wirkliche* atmosphärische Physik nur annähern kann, u.a., deswegen, weil die furchterregenden Terme noch parametrisiert werden müssen. Und jedes Gleichungssystem, welches von der Struktur her einfacher ist als dieses - und um zur Klimaziel-Formel zu kommen, benötigt man noch sehr viele solcher Vereinfachungen - entfernt sich von der Wirklichkeit noch weiter. Das zeigt sich spätestens in Kap. 5, aber auch schon am Ende dieses aktuellen Kapitels anhand eines Beispiels, nämlich einer Kurzbeschreibung des unlösbaren Turbulenz-Problems.

Wenn Sie, liebe Leserin, lieber Leser, ein sogenannter 'blutiger' Laie sind, ist für Sie dieses Kapitel nun beendet, Sie 'dürfen' mit der Zusammenfassung weitermachen (oder eine Pause einlegen). Für diejenigen, die noch immer nicht genug haben, hätte ich hier noch ein paar nützliche Bemerkungen: Wenn Sie sich einfach nur die Variablen der obigen Gleichungen anschauen, werden Sie feststellen, dass es gar nicht so viele sind:

Es kommen nur die Variablen ρ, p, **u** und **F** vor. (Die Fettdrucke von **u** und **F** sind im handschriftlichen Original durch Doppelstriche ersetzt worden). ρ und p sind uns schon als Dichte und Druck bekannt, **u** ist das, was wir sonst mit dem Symbol $\mathbf{v}$ bezeichnen, also der Windvektor. **F** ist ein sogenannter Reibungs-Tensor. (Sagen Sie bitte nur "Aha" und fragen Sie nicht weiter). Das Symbol '∂/∂t' am Anfang jeder Gleichung soll besagen, dass die zeitliche Änderung dessen gemeint ist, was in der jeweiligen nachfolgenden Klammer {...} steht. Man spricht hier von ***zeitlichen Ableitungen***. Immer wenn eine Gleichung zeitliche Änderungen enthält, handelt es sich nicht mehr um algebraische, also ***diagnostische Gleichungen***, sondern um Differentialgleichungen, d.h. um ***prognostische Gleichungen***. Analog zum Symbol '∂ / ∂t' für zeitliche Änderungen verbergen sich hinter dem Symbol '$\nabla\cdot$' ***räumliche Ableitungen***, genauer gesagt, vektorielle Zusammenfassungen der *drei* räumlichen Änderungen nach Osten, nach Norden und nach Oben. M.a.W., die vielen Terme, die in den langen Klammern {...} hinter diesem Symbol stehen, müssen in ihrer dreifachen räumlichen Veränderlichkeit betrachtet werden. Und dann haben wir auf den rechten Seiten der Gleichungen noch jeweils ein Symbol Q{...}. Hier ist jedes Q keine neue Variable, sondern ein Symbol für eine Funktion. Sie sind allesamt Abkürzungen für weitere, sehr umfangreiche mathematisch-physikalische Zusammenhänge. Hätte man diese Abkürzungen hier *nicht* verwendet, benötigte das ausgeschriebene Gleichungssystem etwa den doppelten Platz!

Wenn die Variable **u** nicht immer als **u''** geschrieben wäre, sondern als **u'**, hätten Sie gesagt, dass es sich hier wohl um turbulente Windschwankungen handelt. Das *sind* die **u"** auch, allerdings sind es hier Wind-Schwankungen, die als Abweichungen von einem *mit der Dichte gewichteten* Mittelwert definiert sind. Diese könnten in die uns bekannten 'gewöhnlichen' **u**'-Schwankungen umgerechnet werden, was aber das Gleichungssystem noch einmal erheblich komplizierter machte. Und *noch* einmal komplizierter werden sie, wenn die Gültigkeit des Reynolds-Postulates, die hier vorausgesetzt wurde, *nicht* gegeben ist, denn dann kommen ja zu den hier *ausschließlich* verwendeten Reynolds-Korrelationen noch Kreuz- und Leonard-Terme hinzu. Wenn man unbedingt *noch* 'eins draufsetzen' möchte, kann man an die Aufstellung von Seite 30 erinnern, wo beschrieben wurde, dass die hier durchgerechnete Vierfach-Mittelung noch nicht einmal ausreicht.

Auf Seite 89 hatten wir u.a. von der kinetischen Energie (m/2)$\mathbf{u}^2$ gesprochen (in den 'hiesigen' Symbolen formuliert). Teilen wir diesen Ausdruck durch das Volumen V, so erhalten wir wegen $\rho = m/V$ die volumenspezifische kinetische Energie (ρ/2)$\mathbf{u}^2$. Betrachten wir nun den Beginn der letzten der vier obigen Gleichungen, dann sehen wir, dass es sich hier um die vierfach gemittelte Gleichung für die zeitliche Änderung ($\partial/\partial t$) der kinetischen Energie der Turbulenz-Bewegung handelt!

Dass hier auch die folgenden Terme - und auch die Terme der anderen Gleichungen - tatsächlich vier Mittelungen erlebt haben, können Sie überprüfen: Jeder Zahlenindex an einer Variablen bedeutet eine entsprechende Anzahl von Mittelungen, die diese Variable bereits 'erlebt' hat. Hat eine Variable *keinen* solchen Index, werden sich über ihm vier Mittelungsstriche befinden. Hat die Variable z.B. den Index 2, befinden sich über ihm zwei Mittelungsstriche, usw.

Übrigens: der Satz "bereits gemittelte Größen verändern sich nicht mehr" - als verbale Beschreibung von $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$ (→ Seite 90) - gilt natürlich nur für eine zweite, 'nochmalige' Mittelung *gleichen* Skala! Bei dem hier dargestellten Gleichungs-System kommt das nicht zum Tragen, weil jede 'neue' Mittelung eine *andere* Mittelung ist, eine Mittelung auf der jeweiligen höheren Skala! Daher ist es hier auch *nötig*, mit mehrfachen Querstrichen zu arbeiten! Je höher das jeweilige Mittelungssymbol liegt, desto 'größerskalig' ist die Mittelung. Das war bei unserer Gleichung $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$ als Folge von $\overline{x'} = 0$ und von $\overline{x} = \overline{\overline{x} + x'} = \overline{\overline{x}} + \overline{x'}$ (→ Seite 90) *nicht* so.

Fortaks Gleichungsschema ist allgemeingültig, es ist unabhängig von einer *speziellen* Wahl der vier Größenskalen. Z.B. könnte auch hier der oberste Mittelungs-Strich das berühmte 'Klimamittel' sein. Gegenüber dieser Skala verkörpern alle 'darunterliegenden' Symbole ***Schwankungsgrößen***, sogar wenn sie noch bis zu drei weitere Mittelungs-Symbole enthalten. M.a.W., es sind tatsächlich alles Korrelationen wie $\overline{x'y'}$. Allerdings ist das Gleichungssystem *noch* komplizierter, weil es nicht nur Zweier -

Korrelationen wie $\overline{x'y'}$ enthält, sondern auch Korrelationen 'höherer' Ordnung. Das liegt daran, dass es sich hier um Energiegleichungen handelt, und dass die kinetische Energie *selbst* schon eine nichtlineare Größe ist.

Liebe Leserin, lieber Leser, auch wenn Sie ein 'fortgeschrittener' Laie sind, sehen Sie sich bitte diese Gleichungen nur 'von weitem' an, aber vielleicht doch in Verbindung mit einer Erinnerung daran, dass jede neue Korrelation eine neue Unbekannte Variable ist, und dass eine *korrekte* Beschreibung dieses vierfach gemittelten Systems - eine Beschreibung *ohne* Verwendung von Parametrisierungen also - eine neue Differentialgleichung für jede dieser Korrelationen erfordert. Das ungelöste ***Turbulenzproblem*** besteht aber darin, dass jede weitere solche Gleichung ihrerseits noch einmal neue Korrelationen enthält. Z.B. enthält eine Gleichung für eine Korrelation dritter Ordnung eine Korrelation vierter Ordnung, usw., was schließlich zu einem unendlich-dimensionalen Gleichungssystem führt, so dass auch der schnellste Computer der Welt damit nie 'fertig' wird. Man sieht also, dass die Ersatzmethode für fehlende Differentialgleichungen - die ***Parametrisierung*** mit allen ihren prinzipiellen Defiziten - ebenso unumgänglich wie problematisch ist.

Der bloße Anblick der Fülle von unlösbaren Problemen kann auch Laien die Kompetenz geben, so manche Aussage von Wissenschaftlern zu relativieren, z.B., wenn jemand behauptet, die AGW sei Fakt, wie etwa in den schon kommentierten Behauptungen in [Schell-tv1], oder wenn in [Lat09] behauptet wird: "Sie <die Ergebnisse> wurden ja von Modellrechnungen mit modernsten Hochleistungs-Computern bestätigt, mit einer Irrtums-Wahrscheinlichkeit von 2,5 % und mit einer in etwa Übereinstimmung mit Beobachtungen". Fragt sich nur, wie man Prognosen der Zukunft schon heute mit den zukünftigen Beobachtungen in eine 'in etwa Übereinstimmung' bringen kann, und wieso der Fehler dann 2,5 % betragen wird.

Was man hier wohl gemacht hat, ist eine Berechnung der Gegenwart aus Zuständen der Vergangenheit heraus. Aber das 'gilt nicht', wie schon der Physik-Nobelpreisträger von 1922, Niels Bohr, während eines Kopenhagener Seminars zum Thema Quantenphysik gesagt haben soll: "Prognosen sind schwierig, besonders wenn sie die Zukunft betreffen". Dass Bohr Recht hatte, kann man auch bezüglich des Klimasystems sagen, sogar schon aufgrund des *bisher* in diesem Buch vermittelten Kenntnisstandes: Wenn man den wahren klimatischen Verlauf kennt, was bei einer Berechnung der Gegenwart aus der Vergangenheit ja der Fall ist, dann weiß man ja auch, wie man die unbekannten, subjektiv wählbaren Parameter der unumgänglichen Parametrisierungen einstellen muss. Aber das weiß man eben *nicht*, wenn es um die heute noch unbekannte Zukunft geht!

Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

Im vorigen Kapitel 2.3 haben wir gehört, dass das Voranschreiten auf der Körnungsleiter nur dann effektiv sein kann, wenn man die rein mathematische Mittelung mit physikalisch zu ermittelnden Stabilitätsbedingungen kombiniert. Dabei erfährt man auch, über welche Skalen man überhaupt mitteln 'darf'. Im aktuellen Kapitel 2.4 haben wir nun erfahren, dass die *zunehmenden* Schwierigkeiten auf jeder neuen Stufe der Körnungsleiter zusammenhängen mit dem zunehmend schlechter erfüllten ***Reynolds'-schen Postulat***, wonach Mittelwerte über Schwankungen - Mittelwerte über die turbulenten Abweichungen vom Mittelwert - verschwinden: $\overline{x'}=0$. Der Grund für diese zunehmende Verschlechterung sind immer kleiner werdende ***'Energielücken'*** zwischen den Körnungsgraden, also zunehmend weniger Platz für die Auswahl eines Mittelungs-Intervalls, welches genug feinkörnige Schwankungen enthält, so dass eine sinnvolle Mittelung hierüber möglich wird, und dennoch nicht bereits verfälschende Mittelungen über die angrenzenden grobkörnigen Strukturen durchgeführt werden. Diese Voraussetzung ist nur im ersten Schritt auf der Körnungsleiter erfüllt, sonst höchstens näherungsweise und oft auch gar nicht.

Wir haben ebenfalls - anhand einfachster 'frei erfundener' Gleichungen - festgestellt, dass auch unter der Reynoldsschen Voraussetzung $\overline{x'}=0$ Mittelwerte über *das Quadrat* von Schwankungen *nicht* verschwinden, und auch nicht Mittelwerte über nichtlineare *gemischte* Schwankungsprodukte $\overline{x'y'}$, die sogenannten ***Korrelationen***. Das hat die Konsequenz, dass Mittelungen über nichtlineare Gleichungen diese verändern. Die hinzu gekommenen *zusätzlichen* Korrelations-Terme sind nun ebensolche grobkörnigen Variablen wie die Mittelwerte der feinkörnigen Variablen selbst. Das gilt auch für Mittelwerte von quadratischen nichtlinearen Termen wie $\overline{x'^2}$ als Sonderfall von $\overline{x'y'}$.

Aber die Anzahl der Gleichungen *des grobkörnigen Gleichungssystems hat sich durch die Mittelung nicht erhöht,* sondern *nur die Anzahl der zu berechnenden Variablen!* Die Korrelationen machen daher aus einem ***geschlossenen Gleichungs-System*** - eine lösbare Ansammlung von ebenso vielen Gleichungen wie Unbekannten - ein unlösbares, ein ***unterbestimmtes Gleichungs-System*** (→ Kap. 3.2).

Das alles geschieht schon dann, wenn das Reynolds'sche Postulat $\overline{x'}=0$ gilt. Wenn das nicht der Fall ist, kommen zu den Korrelationen noch weitere unbekannte grobkörnige Variable hinzu, sogenannte *Leonard-Terme* und *Kreuz-Terme*, aber wiederum keine weiteren Gleichungen. Aber auch ohne diesen neuerlichen Komplexitäts-Zuwachs ist der nur durch Reynolds-Terme entstehende Komplexitätsgrad einschüchternd genug, insbesondere, wenn man nicht nur eine, sondern z.B. vier Mittelungen vornimmt, wie es die auf Seite 26 beschriebene vereinfachte Körnungsleiter mit dem Ziel eines dynamisches Gleichungssystems für das Klimasystem *mindestens* verlangt. Um das zu demonstrieren, habe ich eine Arbeit von Fortak (1968) vorgestellt, in der er ein ähnliches vierfach gemitteltes energetisches Gleichungssystem in allen Details hergleitet.

Das Thema 'Korrelationen' hat aber noch einen ganz anderen Aspekt als den von Zusatztermen in gemittelten Gleichungen. Formal kann man Korrelationen auch zwischen beliebigen Variablen bilden, auch wenn sie nirgends in irgendwelchen mathematisch-physikalischen Gleichungen auftauchen. Solche Korrelationen werden öfters gemessen, um einen physikalischen Zusammenhang zwischen den beiden beteiligten Variablen zu belegen, am liebsten einen kausalen Zusammenhang.

Der mit Abstand häufigste Versuch ist es, aus der tatsächlich vorhandenen Korrelation zwischen CO_2 und Globaltemperatur in den Jahren von 1909 bis 1942 und von1978 bis 1998 auf eine anthropogen verursachte Klimaerwärmung zu schließen. Wir haben jedoch gezeigt, dass man dieses Verfahren leicht als untauglich einschätzen kann: zwar haben Korrelationen physikalische Ursachen, aber sie sind das Ergebnis eines 'unendlich' dicht verwobenen Netzes von Wechselwirkungen zwischen 'unendlich' vielen Variablen, so dass es abwegig ist, sie als Beweis einer monokausalen Verknüpfung zwischen nur zwei Variablen anzusehen.

Das Fortak'sche vierfach gemittelte Gleichungssystem am Ende des aktuellen Kapitels 2.4 wird kein Laie - wohl auch kein fortgeschrittener Laie - im üblichen Sinne 'verstehen', und es spielt auch keine Rolle, dass es sich hier gar nicht um ein dynamisches Gleichungssystem handelt (sondern um ein energetisches), und dass gewogene statt gewöhnliche Mittelungen angewendet werden. Einem Laien reicht die Information *darüber* aus, dass all die vielen hier erscheinenden gemittelten Produkte neue unbekannte Korrelationen sind, für die 'eigentlich' weitere neue Gleichungen hergeleitet werden müssten, die ihrerseits *noch einmal* neue unbekannte Korrelationen enthalten würden, und die Gleichungen für diese *ebenfalls*. Das ist das sogenannte Schließungs-Problem, welches das ungelöste Turbulenzproblem in der Praxis *unlösbar* macht. Allein das sollte die Leserinnen und Leser dieses Buches in die Lage versetzen, den in Klima-Diskussionen hervorgebrachten Behauptungen einer durch 'Modellrechnungen bestätigten' AGW-Theorie kritisch zu begegnen.

Dass man heute 'Klimaschutz' mit der Zunahme von 'erneuerbaren Energien' identifiziert, ist eines der größten Rätsel unserer Zeit. Dass die Energie als Erhaltungsgröße gar nicht erneuerbar *ist*, meine ich dabei nicht, dass ist nur eine peinlich-falsche Wortwahl. Dass aber das bei Verbrennungen frei werdende CO_2 in einer unvorstellbar komplexen Klima-Berechnung die einzige relevante Variable sein soll - das ist ja die Voraussetzung für die Gleichheit von Klima- und Energiepolitik - ist für mich unfassbar.