

## 2.3 *Mittelungs-Mathematik unter physikalischen Bedingungen*

### Worum geht es?

Bisher haben wir nur den ersten Schritt  $a \rightarrow b$  auf der 'Körnungsleiter' ( $\rightarrow$  Seite 26) besprochen, also den Schritt von den Molekülen zu den hydro-thermodynamischen Feldern. Das geschah im vorigen Kapitel 2.2. Den nächsten Schritt von den hydro-thermodynamischen Feldern zum Wetter besprechen wir erst in Kapitel 2.5, wo wir auch noch einen Ausblick auf den letzten Schritt vom Wetter zum Klima geben wollen.

Hier in Kapitel 2.3 (und auch im nachfolgenden Kapitel 2.4) wollen wir uns näher mit dem mathematischen und physikalischen Umfeld befassen, das bei solchen Schritten auf der Körnungsleiter zu beachten ist. Wir hatten uns gefragt, ob man durch die Bereitstellung von Modellgleichungen, die das Verhalten von Luftpäckchen aus *vielen* Molekülen beschreiben, und nicht mehr das Verhalten der Einzelmoleküle wie noch in Kapitel 2.1, die hoffnungslose Überforderung der verfügbaren Computer überwinden kann. Dabei hatten wir jedoch fast nur die 'quantitativen' Aspekte dieses Vorhabens diskutiert.

Im aktuellen Kapitel geht es nun um die qualitativen Aspekte, also z.B. nicht mehr darum, wie viel Rechenzeit man einsparen kann, wenn man die Berechnungen der molekularen Bewegungen ersetzt durch Berechnungen der Dichte, des Druckes und der Temperatur der Luftpäckchen aus *sehr viele* Molekülen, sondern es geht darum, wie man überhaupt den Übergang von den diskreten molekularen Orten und Impulsen der Moleküle zu den soeben genannten thermodynamischen Feldgrößen schaffen kann. Wir werden finden, dass dieser Übergang von der Molekülphysik zur Thermodynamik keinesfalls 'nur' durch eine reine Mittelungs-Mathematik vermittelt wird, sondern dass hier *physikalische* Argumentationen im Spiel sein müssen. Dieser Umstand wird beim nächsten Schritt auf der Körnungsleiter - von der Hydro-Thermodynamik zum Wettergeschehen - noch dringender sein, wenn dieser Schritt zu einer effektiven grobkörnigen Theorie führen soll. Und für den 'letzten' Schritt vom Wetter zum Klima gilt nichts anderes. Dieser Erkenntnis entspricht jedoch nicht die gängige Praxis der Klimamodellierungen. Vielmehr wird in Klimadiskussionen und sonstigen öffentlichen Informationsquellen der Eindruck vermittelt, Klima sei nichts anderes als gemitteltes Wetter.

Mit der Beschreibung der Dynamik der Luftpäckchen im vorigen Kapitel hatten wir bereits den ersten von drei Schritten auf der auf Seite 26 beschriebenen vierstufigen Körnungsleiter zu immer größeren Skalen geschafft, wenn auch unter Vernachlässigung der auf Seite 30 beschriebenen Komplikationen. Jede der vier Stufen repräsentiert eine bestimmte Sichtweise auf immer ein und dasselbe System, nämlich das System Atmosphäre. Die erste Sichtweise erkennt die Atmosphäre als eine Ansammlung von  $10^{44}$  Molekülen. Behandelt man diese Moleküle mathematisch mehr oder weniger wie elastische Billardkugeln, was für **ideales Gas** nicht einmal so falsch ist, so kann man im Prinzip das atmosphärische Verhalten mit den Gesetzen des elastischen Stoßes modellieren. Allerdings wären die schnellsten der heutigen Supercomputer, die pro Sekunde immerhin hunderte von Billionen arithmetischer Operationen vollbringen, mit der Berechnung eines einzigen Zeitschrittes noch lange, lange nicht fertig, auch wenn sie direkt beim Urknall mit dem Rechnen begonnen hätten, → Seite 45.

Fazit: Diese erste Leitersprosse ist wirklich 'ungenießbar'. Aber was nützte es uns auch, wenn wir genau wüssten, wie schnell und wohin jedes atmosphärische Molekül zu jedem Zeitpunkt gerade fliegt? Was wir haben wollen, sind **statistische Effekte** dieses molekularen Chaos. Sie bieten eine zweite Sichtweise auf die Atmosphäre.

Diese äußern sich in sogenannten **Feldern** von **Dichte, Temperatur, Druck** der aus Molekülen bestehenden Luft. Die Dichte ist ein Maß dafür, wie viele Moleküle *im Mittel* in einem handlichen Volumen enthalten sind. Die Tabelle auf Seite 62 liefert eine Auswahl solcher Volumina. Der Druck ist ein Maß dafür, welche Kraft *im Mittel* die auf eine Einheits-Kontrollfläche prasselnden und dort reflektierten Moleküle ausüben, die Temperatur hat etwas mit der *mittleren* Geschwindigkeit der Moleküle zu tun. Und die Entropie  $S$  (oder die spezifische Entropie  $s$ ) - bisher kennen wir praktisch nur die Ankündigung, dass auch sie eine thermodynamische Variable sei - ist von vornherein eine statistische Größe.

Vorläufig sind für uns nur die Dichte  $\rho$ , der Druck  $p$  und die Temperatur  $T$  mathematisch-statistische Aussagen, z.B. über die Zustände von  $10^{23}$  Molekülen, falls wir Luftpäckchen der Größe  $1/6$  Mol wählen. Auf Seite 45 hatten wir ja berichtet, dass man sich die Atmosphäre als Ansammlung von  $10^{21}$  solcher Luftpäckchen vorstellen kann. Natürlich sind auch Ansammlungen von weniger Luftpäckchen mit noch mehr Molekülen oder Ansammlungen von noch mehr Luftpäckchen mit jeweils weniger Molekülen möglich, wie die Tabelle auf Seite 62 auflistet.

Nun muss man sich entscheiden, wie groß denn die Luftpäckchen sein sollen, über die man die Dichte, den Druck oder die Temperatur als statistische Aussagen - als zweite Sichtweise auf die Atmosphäre - gewinnen möchte. Oder haben wir hier gar

keine Freiheit der Wahl? Als wir auf den Seiten 26 und 30 von der 'Körnungsleiter' gesprochen haben, haben wir ja auch erfahren, dass sich die Atmosphäre in unterschiedlichen Größenskalen auch physikalisch unterschiedlich organisiert! Offenbar benötigen wir nicht nur zwei, sondern mehrere skalenabhängige Sichtweisen auf die Atmosphäre. Rufen wir uns aus Bequemlichkeit die Körnungsleiter von Seite 26 hier noch einmal in Erinnerung, so haben wir mit leichten Umformulierungen und ohne die Komplikationen von Seite 30:

- a) die Skala der Molekularbewegung ('molekulares Chaos')
- b) die Skala der hydro-thermodynamischen Felder (laminar oder mikroturbulent)
- c) die Skala der täglichen atmosphärischen Veränderungen des Wetters
- d) die Skala der klimatologischen Veränderungen

Die drei möglichen Schritte auf dieser Leiter entsprechen also drei möglichen Sprüngen von Skala zu Skala (von 'Körnung zu Körnung'):

- 1) a→b: Molekulares System → Hydro-thermodynamisches System der Felder
- 2) b→c: Hydro-thermodynamisches System der Felder → Wettersystem
- 3) c→d: Wettersystem → Klimasystem

Beginnen wir mit der **Dichte**  $\rho$ . Die Dichte eines Fluids (oder eines sonstigen Stoffes) ist das Verhältnis der in einem Volumen (Symbol  $V$ ) enthaltenen Masse (Symbol  $m$ ) zu eben diesem Volumen:

$$\rho = m/V$$

Die Gesamtmasse  $m$  der  $10^{23}$  Moleküle unseres so gewählten Lagrange-Teilchens wird in der oberen Atmosphäre ein größeres Volumen  $V$  einnehmen als in der unteren Atmosphäre (für die übrigens die in der Tabelle von Seite 62 angegebenen 3,7 Liter gelten): Unten ist ja der Luftdruck größer als oben, also wird ein Luftpäckchen aus gleich vielen Molekülen unten auf ein kleineres Volumen zusammengedrückt als oben. In der Formel  $\rho = m/V$  ist also  $V$  oben größer als unten! Die Masse  $m$  ist beide Male gleich groß, also muss die Dichte  $\rho$  oben *kleiner* sein als unten. Dass die Luft nach oben 'dünner' wird (sprich 'weniger dicht'), weiß ja auch jeder Bergsteiger. Aber weder oben noch unten ist der Abstand zwischen allen Molekülen im jeweiligen Luftpäckchen gleich. Sie sind sich mal näher, mal weiter auseinander, und manchmal kollidieren sie sogar. Aber diese wahnsinnig komplizierten Einzelheiten sollten uns nicht weiter interessieren. (Wie unvorstellbar lange es dauern würde, diese Einzelheiten *auszurechnen*, haben wir ja 'spaßeshalber' in Kapitel 2.1 ausgerechnet).

Uns sollte es ausreichen, mit einem **Mittelwert** all dieser Abstände zu arbeiten - und nichts anderes tun wir ja, wenn wir in  $m$  alle  $10^{23}$  Molekülmassen zusammenfassen

und die Summe aller Zwischenräume zwischen ihnen durch das Volumen  $V$  ausdrücken. Vor dieser Mittelung änderte sich die Dichte ja extrem sprunghaft. Dort, wo sich ein Molekül aufhielt, war sie extrem hoch, an allen anderen Stellen war sie Null. Durch das Mitteln ist dieses abstruse 'Dichtefeld' geglättet worden. Aber es enthält noch Sprünge 'von Luftpäckchen zu Luftpäckchen', da sich innerhalb der z.B. 3,7 Liter-Volumina nichts ändert. In der harten Praxis, in der ja die Rechenpunkte noch viel weiter auseinander liegen müssen, sind die 'Sprünge' zwar seltener, dafür aber größer!

Die computertechnischen Voraussetzungen, z.B. des Hamburger Klimarechners mit seinen 150 Billionen arithmetischen Operationen pro Sekunde sind ungeheuer beeindruckend, aber dennoch ist die Natur noch beeindruckender. Sie zwingt uns zurzeit, die praktische Arbeit am untere Ende der Tabelle von Seite 62 zu verrichten. Zwar ist die entsprechende Technologie noch nicht am Ende ihrer Möglichkeiten angekommen, zwar wird man in dieser Tabelle noch ein Stückchen nach oben wandern können, das Ziel einer nahezu infinitesimalen Rasterung mit der Möglichkeit, kontinuierliche thermodynamische Feldverteilungen ausrechnen zu können, wird man jedoch nie erreichen.

Aber das scheint auf den ersten Blick auch nicht nötig zu sein: Ebenso wie es zur Beschreibung der hydro-thermodynamischen Felder unwichtig ist, wohin und wie schnell sich jedes Gasmolekül bewegt, muss man zur Physik des Wetters nicht wissen, wie der Wind an dieser oder jener Hauskante weht. Allerdings wären Details des Strömungsfeldes doch wichtig, wenn man z.B. die hydrodynamischen Strömungen in einem Tornado-Rüssel beurteilen wollte. Gelegentlich möchte man eben doch die Masse  $m$  und die Volumengröße  $V$  in der Formel  $\rho = m/V$  sehr klein halten, am besten nahezu **infinitesimal** (quasi unendlich) klein, um ein 'glattes' Dichtefeld  $\rho(\mathbf{r},t)$  'ohne Sprünge' zu erhalten. Mathematisch kennzeichnet man das dadurch, dass man die Symbole  $m$  und  $V$  für die Masse und das Volumen der Luftpäckchen durch die Symbole  $dm$  bzw.  $dV$  ersetzt:

$$\rho = dm/dV$$

wobei  $dm$  und  $dV$  tatsächlich **infinitesimale Größen** sind, die hier auch **Differential** genannt werden können. Fast klingt es wie ein Widerspruch, innerhalb der 'infinitesimal kleinen' Luftpäckchen noch immer über hinreichend viele Moleküle zu verfügen, so dass man überhaupt noch mitteln kann. Ermöglicht wird das aber von einem physikalischen Gesetz, dem Gesetz vom sogenannten **lokalen thermodynamischen Gleichgewicht** ( $\rightarrow$  auch Seite 32). Ohne dieses Gesetz wäre der Schritt 1),  $a \rightarrow b$ , auf der obigen Körnungsleiter unmöglich! Eine rein mathematische Mittelung ohne phy-

sikalische Unterstützung führt zwar zu einer 'Theorie der Würfel-Mittelwerte', aber nicht zu einer hydro-thermodynamischen Theorie der Molekül-Mittelwerte. In der Atmosphäre muss schon beim ersten Schritt auf der Körnungsleiter das rein mathematische Mittel physikalisch unterstützt werden!

Dennoch suggeriert unser Beispiel zur Bildung der hydro-thermodynamischen Variablen 'Dichte  $\rho$ ', dass zumindest dieser erste Schritt ganz leicht zu gehen sei: Offenbar muss man nur über die feinkörnige (hier sogar mikroskalige) Variable 'molekulare Massenpunkte' mitteln, und schon hat man die richtige Variable für das (relativ zur Mikroskala) grobkörnigen hydro-thermodynamischen System gefunden! Diese 'Erkenntnis' verlockt dazu, auch beim letzten Schritt 3) vom Wetter zum Klima so vorzugehen: Man spricht von '**Erderwärmung**' und meint damit einen Anstieg der 'ganz normalen' Temperatur, die über den Globus gemittelt wurde. Aber es ist noch immer die gleiche Temperatur wie die beim Wetter, und es ist offenbar sogar auch noch die Variable, die wir uns in Schritt 1) von den Molekülen zu den Feldern der Hydro-Thermodynamik verschafft haben.

Bei der Gewinnung der thermodynamischen Dichte in Schritt 1) kann man vielleicht noch sagen, dass wir einfach Glück gehabt haben, weil es das lokale thermodynamische Gleichgewicht zur Rechtfertigung unserer 'ganz normalen' mathematischen Mittelung gibt. Jedoch werden wir noch sehen, dass man zur Herleitung anderer thermodynamischer Variablen (der Temperatur und der Entropie) dieses Gesetz bei der Mittelung *aktiv* verwenden muss. Dabei *verändern* sich auch die im grobkörnigen Bereich geltenden Variablen, sie sind dann nicht mehr durch 'ganz normale' rein mathematische Mittelungen entstanden.

Ein Molekül hat zwar noch eine **Massendichte**, und in seiner Bewegung übt es gewissermaßen auch einen **Druck** aus (bei Kollisionen). Aber ein Molekül hat bei bestem Willen keine **Temperatur** (und, wie vorerst nur behauptet, auch keine **Entropie**). Diese Variablen enthalten also Gesetzmäßigkeiten, die es auf der kleineren Skala noch gar nicht gibt. Mit anderen Worten, erst *vieler* Moleküle können eine Temperatur und eine Entropie haben. - Aber schauen wir uns erst einmal die 'Entstehung' des Druckes beim Schritt 1) an. Druck ist, so haben wir schon in der Schule gelernt, der Quotient Kraft/Fläche, symbolisch:

$$p=F/A$$

(F steht für engl. Force). Das F im Zähler ist also nicht etwa die Fläche (*dafür* steht A, für engl. Area). Nehmen wir ein (etwas martialisches) Beispiel: Stellen Sie sich vor, Sie drücken einmal mit einem Löffel und einmal - *mit gleicher Kraft* - mit einer Gabel auf eine (eigene oder fremde) Hautstelle. Wieso verursacht die Gabel mehr Schmer-

zen als der Löffel, obwohl Sie doch beide Male die gleiche Kraft aufgewendet haben? Und wieso tut es noch mehr weh, wenn Sie (bitte vorsichtig experimentieren) das Experiment mit einer Nadel wiederholen, wieder mit der gleichen Kraft? Weil die Gabel spitzer ist als der Löffel, und weil die Nadel spitzer als die Gabel, werden Sie sagen. Das stimmt, denn 'spitzer' heißt nichts anderes als 'kleinere Berührungs-Fläche'! Die gleichbleibende Kraft konzentriert sich in der Reihenfolge Löffel - Gabel - Nadel auf eine immer kleinere Fläche! Die Größe 'Kraft *pro* Fläche = Druck',  $F/A = p$ , wird also immer größer, weil der Nenner immer kleiner wird! Diese Größe ist folglich nicht nur in der Hydro-Thermodynamik, Meteorologie und Klimatologie eine wichtige Variable, sondern sie ist auch eine technisch wichtige Größe für Scheren, Bohrer, Messer usw.

Liebe Leserin, lieber Leser, ich vermute, dass die Versuchung groß ist, nun zu denken "statt das Klima zu erklären, erklärt Herr Lange lieber, dass es weh tut, wenn man sich mit einer Nadel piekt". Aber glauben Sie nicht auch, dass dieses Pieken eine sehr 'anschauliche' Erinnerung daran ist, unter welchen Bedingungen der *Druck* sehr groß werden kann, und dass einfache Systeme *deswegen* einfach und auch vorhersagbar sind, weil man sie mit physikalischen Begriffen erklären kann, die so anschaulich und handfest sind wie der Schmerz beim Nadelstich? In komplexeren Systemen ist das nämlich nicht so - *hier ist auch die Wirkung von Nadelstichen nicht mehr vorhersagbar!*

Wenn Sie z.B. bei der Meinung bleiben, dass der Druck durch Nadelstiche schlecht erklärt wurde, dann ist das ja - unabhängig davon, ob Sie Recht haben oder nicht - ebenfalls ein kleiner Nadelstich, diesmal aber ein komplexer. Folglich können Sie *nicht vorhersagen*, ob mich dieser Nadelstich schmerzt oder ob nicht. - Na ja, zugegeben, ganz so leicht ist es wohl nicht, diese Metapher von Komplexität auf die Nichtvorhersagbarkeit des komplexen Klimasystems zu übertragen. Aber wir haben ja in diesem Buch noch viele Seiten vor uns, auch für weniger schräge Vergleiche, und daher sind wir auf dieses ironisierende Argument nicht angewiesen. (Aber Spaß hat es gemacht).

Zurück zum Druck als Ergebnis des Schrittes 1)  $a \rightarrow b$  auf der Körnungsleiter vom molekularen System zum hydro-thermodynamischen System der Felder. Wir wollten die Frage beantworten, ob dieser Druck  $p$ , ebenso wie die Dichte  $\rho$ , eine direkte Mittelung einer Größe ist, die auch schon vor diesem Skalen-Sprung 'da war'.

Ein bestimmter Zustand des idealen Gases 'trockene Luft' wird aus molekularer Sichtweise ausschließlich bestimmt durch die Orte und die Geschwindigkeiten sämtlicher Moleküle. Das sind die Variablen des feinkörnigen Systems! Die Orte dieser Moleküle (genauer der Moleküle und Atome *der trockenen Luft*) werden durch Ortsvektoren

ren  $\mathbf{r}$  beschrieben, ihre Geschwindigkeiten durch Vektoren  $\mathbf{v}$ . In diesen Variablen ist offenbar zunächst noch kein Druck zu erkennen, über den nur noch gemittelt werden müsste, um so den Schritt 1)  $a \rightarrow b$  gehen zu können. Den richtigen Hinweis zur Lösung dieses Problems liefert uns **Newtons Bewegungsgleichung**, wie wir sie auf Seite 43 formuliert haben:

*Masse mal Beschleunigung = Kraft.*

**Beschleunigungen** sind ja Änderungen der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  pro Zeit, (so wie Geschwindigkeiten Änderungen des Ortes  $\mathbf{r}$  pro Zeit sind). Man kann Newtons Bewegungsgesetz also auch so formulieren:

*Masse  $m$  mal Änderungen der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  pro Zeit = Kraft*

Eine Kraft haben wir also immerhin, wenn wir die Beschleunigung der Moleküle mit ihrer Masse multiplizieren. Im molekularen Modell des **idealen Gases** werden aber die Moleküle *nicht* beschleunigt, außer bei Kollisionen untereinander oder an Begrenzungs-Wänden des Gases. Daher sprachen wir in ähnlichen Zusammenhängen auch schon von **Stoßgesetzen**. - Die Newton-Gleichung kann man schließlich auch so formulieren (bitte verwechseln Sie nicht den Impulsvektor  $\mathbf{p}$  mit dem nicht-vektoriellen, dem sogenannten **skalaren** Symbol  $p$  für den Druck):

*Änderungen des Impulses  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  pro Zeit = Kraft*

denn der **Impuls  $\mathbf{p}$**  ist nichts anderes als das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, und der 'm-Anteil' des Impulses ist von der 'Aufforderung' zur Änderung in dieser verbalen Formel nicht betroffen: Masse ändert sich zeitlich *nicht* (außer lt. Relativitätstheorie in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit. Derartig schnell ist aber kein atmosphärisches Molekül, es sei denn, es verirrt sich in den Teilchenbeschleuniger in Genf).

Bei Molekül-Kollisionen untereinander oder mit einer Begrenzungsfläche des Volumens kommt es aber dennoch zu heftigen Beschleunigungen, also zu **Impulsänderungen**, also zu ('diskret' auftretenden) Kräften.

Kraft ist zwar noch nicht Druck, aber Kraft pro Fläche *ist* Druck. Diskrete Krafteinwirkungen (bei Kollisionen) pro Fläche - klingt das nicht wie diskrete Massenansammlungen pro Volumen? Genauso ist es, wir haben wieder ein Mittelungs-Konzept gefunden. So wie wir vorher diskrete Massenansammlungen in vorgegebenen Volumina gemittelt haben, um die thermodynamische Variable Dichte zu erhalten, so mitteln wir nun über die diskreten Kollisionskräfte auf vorgegebene Kontroll-Flächen, um die thermodynamische Variable Druck zu erhalten.

Und wieder erhalten wir einen zwar nicht mehr diskreten, 'lückenhaften', aber doch noch sprunghaften räumlichen Verlauf des Druckes. Ebenso, wie wir von den sprunghaften Dichtesprüngen zu den 'glatten' Dichtefeldern gefunden haben, nämlich durch Ersetzung der Mittelungsformel  $\rho = m/V$  durch  $\rho = dm/dV$  mit den 'kleinen' Differentialen  $dm$  und  $dV$ , so finden wir nun zu den glatten Druckfeldern durch Ersetzung der Mittelungsformel  $p = F/A$  durch  $p = dF/dA$  mit den 'kleinen' Differentialen  $dF$  und  $dA$ .

Kommen wir schließlich zur Temperatur. Vielleicht haben Sie ja schon eine Vorstellung, dass die Temperatur irgendetwas mit der mittleren Geschwindigkeit der Luftmoleküle zu tun haben sollte, so dass auch die Temperatur  $T$  - ebenso wie die Dichte  $\rho$  und der Druck  $p$  - ein Mittelwert einer Größe des molekularen Systems wäre, also einer Größe, die schon vor dem ersten Mittelungsschritt existierte: So wie  $\rho$  ein Mittelwert über die molekularen Massenbeiträge ist, und so wie  $p$  ein Mittelwert über die molekularen Impulsänderungen ist, so könnte ja  $T$  ein Mittelwert über die molekularen Geschwindigkeiten sein. Da die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ein Vektor ist, die Temperatur  $T$  aber ein Skalar, ist zu vermuten, dass  $T$  ein Mittelwert über die *Beträge*  $v$  der Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  sein könnte. Obwohl diese Vermutung anschaulich ist, ist sie falsch!

Richtig ist, dass  $T$  etwas mit den Geschwindigkeitsbeträgen 'zu tun' hat, sogar etwas mit der Statistik dieser Geschwindigkeitsbeträge, dass  $T$  aber nicht deren Mittelwert ist. Auch ist sie nicht der Mittelwert etwa der kinetischen Energie der Moleküle. Sie ist *gar kein* Mittelwert, sondern ein Parameter der **Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung**. Das ist eine sogenannte **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** über die molekularen Geschwindigkeiten. Oder einfacher gesagt, die Temperatur ist keine gemittelte Größe der Molekularphysik, sondern ein Hilfsparameter für Wahrscheinlichkeitsaussagen über Molekülgeschwindigkeits-Beträge. Und diese Aussagen können nicht rein mathematisch, sondern nur unter physikalischen Voraussetzungen gemacht werden.

Machen wir uns das folgendermaßen klar: Die Anzahl der Moleküle im Lagrange-Teilchen sei  $N$ . Jedes dieser  $N$  Moleküle hat seine 'eigene' Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ . (Wie gesagt, interessiert uns an dieser Stelle nur der Betrag  $v$  des Geschwindigkeits-Vektors  $\mathbf{v}$ , nicht seine Richtung). Nun greifen wir zwei Geschwindigkeitswerte heraus, sagen wir einen bestimmten Wert  $v$  und einen Wert  $v+dv$ . Sie haben richtig geraten,  $dv$  ist wieder eine infinitesimale Größe, die man hier auch **Differential** der Geschwindigkeit nennen darf. Es kann aber durchaus mehrere Moleküle geben, deren Geschwindigkeiten zufällig innerhalb dieses kleinen Intervalls zwischen  $v$  und  $v+dv$

liegen. Wir fragen nun, *wie viele* Moleküle diese 'passende' Geschwindigkeit haben könnten. Wir bezeichnen diese Anzahl mit dem plausiblen Symbol  $dN$ . Natürlich ist  $dN$  unbekannt, aber immerhin können wir annehmen, dass  $dN$  umso größer ist, je größer  $N$  ist. (Wenn *insgesamt* mehr Moleküle  $N$  da sind, wird wohl auch eine größere Anzahl  $dN$  von ihnen die passende Geschwindigkeit zwischen  $v$  und  $v+dv$  haben). Weiterhin wird der Anteil  $dN$  von  $N$  auch dann größer bzw. kleiner sein, wenn das Geschwindigkeitsintervall  $dv$  *selbst* größer bzw. kleiner ist. Also sollte  $dN$  sowohl zu  $N$  als auch zu  $dv$  proportional sein, symbolisch:

$$dN \sim N dv$$

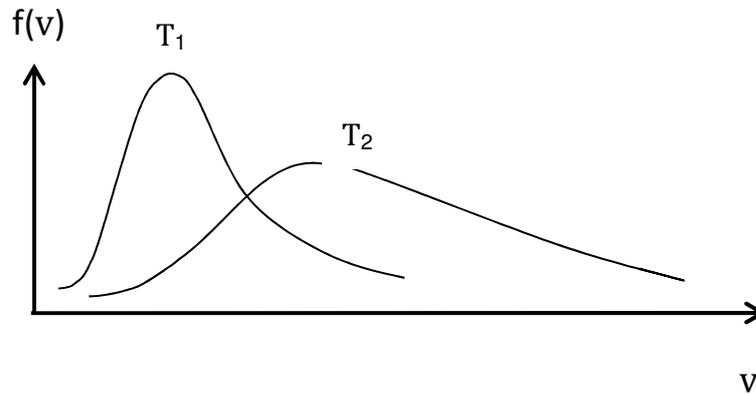
Brauchen wir also nur noch einen Proportionalitätsfaktor zur Bestimmung von  $dN$ ? Die Antwort lautet Nein! Genau hier haben wir den Punkt erreicht, wo die reine *Mathematik* nicht mehr ausreicht, wo *physikalische Bedingungen* in die weiteren Überlegungen aufgenommen werden *müssen*. Und erst diese physikalischen Bedingungen bringen die Temperatur  $T$  ins Spiel!

Rein *mathematisch* könnte man die obige Frage dann mit 'Ja' beantworten, wenn jede Geschwindigkeit eines Moleküls mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten würde! Denn *dann* könnte man an jeder Stelle ein Intervall von  $v$  bis  $v+dv$  auswählen, und der Anteil  $dN$  der  $N$  Moleküle, die dort hineinpassen, wäre überall gleich (gleichbleibende Werte von  $dv$  natürlich vorausgesetzt). Vergrößert man  $N$  und/oder  $dv$ , dann fallen auch mehr Moleküle  $dN$  in das Intervall. Dann könnten wir den Proportionalitätsfaktor z.B.  $a$  nennen, und wir hätten die Gleichung  $dN = a \cdot N dv$ . Und warum gilt diese Formel *nicht*? Weil eben *nicht* jede Geschwindigkeit eines Moleküls mit der gleichen *Wahrscheinlichkeit* auftritt:

*Es gibt keine Gleichverteilung für die Wahrscheinlichkeiten der möglichen molekularen Geschwindigkeitswerte!*

Es *gibt* jedoch eine Wahrscheinlichkeits-Gleichverteilung für die **Aufenthalts-Orte** der Moleküle innerhalb eines horizontal ausgebreiteten, 'flachen' Lagrange'schen Luftpäckchens: Es gibt wegen des 'mischenden' Charakters des molekularen Chaos keinen Grund, an bestimmten Orten innerhalb des Molvolumens eine andere Aufenthalts-Wahrscheinlichkeit anzutreffen als an anderen Orten, d.h. die *horizontale Orts-Wahrscheinlichkeitsverteilung* ist eine Gleichverteilung. Dass es jedoch keine vertikale Gleichverteilung der molekularen Orts-Aufenthaltswahrscheinlichkeiten geben kann, folgt schon aus der auf Seite 73 beschriebenen vertikalen Dichteänderung der Luft, die jeder Bergsteiger kennt. Der Fokus unserer aktuellen Überlegung ist aber, dass es auch keine gleichverteilte **Geschwindigkeits-Wahrscheinlichkeit** gibt. Viel-

mehr ist hier die sogenannte **Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung** zuständig. Und wie sieht diese Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus? Sie ist für unterschiedliche Temperaturen unterschiedlich! In der folgenden Freihand-Skizze habe ich diese Funktionen  $f(v)$  für zwei Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  (mit  $T_1 < T_2$ ) dargestellt:



Dieses Bild können wir folgendermaßen interpretieren. Offenbar ist es bei der außer-gewöhnlich chaotischen molekularen Physik, mit fünf Milliarden Kollisionen pro Molekül und pro Sekunde, extrem unwahrscheinlich, dass ein beliebiges herausgegriffenes Molekül die Geschwindigkeit Null oder fast Null hat. Und dass sich dieses Molekül mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, ist nach der Relativitätstheorie nicht 'nur' äußerst unwahrscheinlich, sondern physikalisch sogar unmöglich. Dass es auch keine 'Fast-Lichtgeschwindigkeiten' gibt, begründen wir folgendermaßen: Die sogenannte **innere Energie** des Luftpäckchens, zu der auch die Bewegungs-Energie seiner Moleküle gehört, (die dann auch **thermische Energie** heißt), ist physikalisch begrenzt, so dass *auch hohe Unterlichtgeschwindigkeiten* für die Moleküle ausgeschlossen werden, weil die dafür erforderliche Energie einfach nicht vorhanden ist. Wenn aber die Wahrscheinlichkeiten für sehr kleine und für sehr große Geschwindigkeiten nahezu Null sind, müssen sie im Bereich mittlerer Geschwindigkeit größer sein und irgendwo ein Maximum haben, so wie in jeder der beiden obigen Kurven! Dort wo das Maximum liegt, haben wir die **wahrscheinlichste Geschwindigkeit** bei der jeweiligen Temperatur. Bei einer Gleich-Verteilung gäbe es ja kein solches Maximum. Wir haben also **aus physikalischen Gründen** (relativistische Physik, Physik der Energieerhaltung) keine Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche molekulare Geschwindigkeiten. Und nun - endlich - kann ich Ihnen erklären, was das alles mit der **Temperatur** zu tun hat:

*Die Temperatur bestimmt, welcher Geschwindigkeitsbetrag  $v$  in der Maxwellschen Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f(v)$  der wahrscheinlichste ist, und wie hoch dieses Maximum ist.*

Bei der geringeren Temperatur  $T_1$  ist der wahrscheinlichste Geschwindigkeitsbetrag  $v$  kleiner als bei der höheren Temperatur  $T_2$ . Das ist durchaus anschaulich. Man erkennt aber auch, dass die maximale Wahrscheinlichkeit für diesen kleineren  $v$ -Wert größer ist als die maximale Wahrscheinlichkeit bei der höheren Temperatur, dass aber 'dafür' bei  $T_1$  ein kleinerer  $v$ -Bereich mit noch beträchtlichen Wahrscheinlichkeitswerten vorhanden ist als bei  $T_2$ . Für alle Temperaturwerte - so auch für die beiden hier dargestellten - ist außerdem der Anstieg zum jeweiligen Wahrscheinlichkeits-Maximum steiler als der Abstieg danach.

Diese Unsymmetrie der Verteilungskurve bringt es mit sich, dass bei jeder Temperatur die **wahrscheinlichste Geschwindigkeit** immer etwas kleiner ist als die **mittlere Geschwindigkeit**, wie wir am Ende dieses Kapitels auch explizit ausrechnen können. Wir halten also fest, dass die Temperatur zwar eine statistische Aussage über die Geschwindigkeiten der Moleküle macht, *aber sie ist nicht identisch mit dem statistischen Mittelwert der molekularen Geschwindigkeiten!* Das allein ist schon ein Hinweis darauf, dass zu einem effektiven Übergang zu einer grobkörnigeren Theorie mehr gehört als eine rein mathematische, physikalisch unreflektierte Mittelung über die feinkörnigen Variablen, wie man es aber tut, wenn man eine Klimatemperatur als globales Mittel von lokalen Temperaturen definiert, wenn man also Mittelwerte über Parameter bildet, die die Formen von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bestimmen. Das ist offenbar ein weit hergeholter und ein schwer zu interpretierender Mittelwert. Wenn man also behauptet, man hätte eine 'valide und gültige' Klimaformel gefunden, [Schell-tv1], dann behauptet man, man hätte eine derartig kryptische Größe aus vorgegebenen  $\text{CO}_2$ -Werten berechnet.

Dennoch kann man mit der obigen Formel  $dN = a \cdot N dv$ , in der  $a$  ein *konstanter* Proportionalitätsfaktor war, noch etwas 'anfangen'. Diese Formel sagte ja, dass die Zahl  $dN$  der in das Geschwindigkeitsintervall der Größe  $dv$  fallenden Moleküle umso größer ist, je mehr Moleküle  $N$  sich überhaupt um das Intervall 'bewerben', und je größer das Intervall  $dv$  ist. Diese Aussage als solche gilt natürlich nach wie vor! Wir sprachen von dem Intervall von  $v$  bis  $v+dv$ . Der einzige Unterschied ist der, dass sich nun bei unterschiedlichen  $v$ -Werten auch unterschiedlich viele Moleküle um einen Platz im Intervall  $dv$  'bewerben', denn wir haben ja keine Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten für alle Geschwindigkeiten, sondern eben die Maxwellsche Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f(v)$ . Diese Funktion ist es, und nicht mehr der für Gleichverteilungen geeignete konstante Proportionalitätsfaktor  $a$ , welche angibt, wie viele geschwindigkeitsabhängige 'Bewerber' es für jedes Intervall gibt. Wir müssen also einfach den Faktor  $a$  in  $dN = a \cdot N dv$  durch die Funktion  $f(v)$  ersetzen:

$$dN = f(v) \cdot N dv \quad \text{oder auch} \quad dN/N = f(v) \cdot dv$$

Die zweite Form dieser Formel ist gut geeignet, den schon erwähnten Begriff '**Wahrscheinlichkeitsdichte**' zu veranschaulichen. Auch der Begriff **Wahrscheinlichkeit** selbst ist von uns zwar oft verwendet, aber noch nicht definiert worden. Warum ist denn eigentlich die Wahrscheinlichkeit, mit einem idealen Würfel eine bestimmte Zahl zu würfeln, gerade 1/6? Man definiert die Wahrscheinlichkeit so:

$$\text{Wahrscheinlichkeit } W = \text{Zahl der günstigen Fälle} / \text{Zahl der möglichen Fälle}$$

6 Fälle sind möglich, aber nur einer ist günstig! Wenn man aber in einem Würfelspiel eine 5 *oder* eine 6 gebrauchen kann, dann hat man 2 günstige Fälle, und deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, eine 5 *oder* eine 6 zu würfeln, durch  $W = 2/6 = 1/3$  gegeben. Eine andere Frage ist die, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass man bei *zweimaligem* Würfeln *beide Male* die '6' bekommt. Hierzu gibt es die folgenden 36 möglichen Fälle: 1-1, 1-2, ..., 1-6, 2-1, ..., 2-6, 3-1, ..., 3-6, ..., 6-1, ..., 6-6, aber 'günstig' ist nur der *eine* Fall 6-6! Also ist  $W=1/36$ . So haben wir uns auf die Schnelle schon die beiden wichtigsten Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung erarbeitet:

- 1) *Die Wahrscheinlichkeit, in einem Würfelexperiment eines von zwei möglichen Ergebnissen zu bekommen, ist die Summe der Einzel-Wahrscheinlichkeiten*  
(Unser Beispiel:  $1/3 = 1/6 + 1/6$ )
- 2) *Die Wahrscheinlichkeit, in zwei Würfelexperimenten jedes Mal ein gleiches Ergebnis zu bekommen, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten*  
(Unser Beispiel:  $1/36 = 1/6 \cdot 1/6$ )

Diese Regeln gelten nicht nur bei Würfelexperimenten. Machen wir ein Gedankenexperiment: Wir stellen uns ein Gas aus nur 6 Molekülen vor, und diese 6 Moleküle bewegen sich alle mit verschiedenen Geschwindigkeiten, und zwar mit je einer der Geschwindigkeiten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 km/h. Das zufällige Herausgreifen eines Moleküls entspricht also einem Würfelexperiment. Wenn ich 2 der 6 Moleküle herausgreife, (aber das Herausgegriffene gleich wieder zurücklege), 'würfele' ich 2 Mal. In der Hoffnung, eines der beiden schnellsten zu erwischen, (also das 5 *oder* 6 km/h schnelle Molekül), habe ich wieder 2 günstige und 6 mögliche Fälle, und für die Wahrscheinlichkeit gilt die gleiche Formel. Das formulieren wir so:

Die Wahrscheinlichkeit, das gewünschte *Geschwindigkeits-Intervall* zwischen 5 und 5+1km/h zu erreichen, ist  $p=1/3$ . Sie merken schon, diese einfache Berechnungsformel gilt nur deshalb, weil wir unseren 6 'Modell-Molekülen' eine Geschwindigkeits-Gleichverteilung verordnet haben. Die Wahrscheinlichkeit beim Herausgreifen ergibt

für jede Geschwindigkeit die gleiche Wahrscheinlichkeit  $1/6$ . Wir verbessern dieses 'Molekül-Modell', indem wir 'eine Art' Maxwell-Verteilung der Geschwindigkeiten vorgeben. Das entspricht einem Würfel, der so gezinkt ist, dass die Wahrscheinlichkeiten  $p$  ( $\rightarrow$  auch Seite 10) nicht mehr für alle Würfelergebnisse gleich sind, sondern dass die mittleren Zahlen 3 und 4 häufiger gewürfelt werden als die anderen, und dass das Maximum der Wahrscheinlichkeiten eher bei 3 als bei 4 liegt, so dass der Anstieg zum Wahrscheinlichkeits-Maximum steiler ist als der Abstieg danach. Bei nur 6 Molekülen ist das nicht so einfach zu erfüllen. Ein Würfel -auch Hexaeder genannt - ist aber nur einer von insgesamt 5 regulären Körpern (auch platonische Körper genannt). Die anderen sind Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder, sie haben 4, 8, 12 bzw. 20 Flächen. Mit ihnen kann man ebenfalls würfeln wie mit dem Hexaeder. Ich schlage vor, wir würfeln mit dem Dodekaeder, weil er gerade die doppelte Flächenzahl vom 'normalen' Würfel hat.

Wir haben nun also 12 mögliche Fälle. Wenn wir auf *zwei* der 12 Flächen eine '1' anbringen, auf zwei andere Flächen eine '2' usw., dann kann man mit dem Dodekaeder haargenau so würfeln wie mit dem Hexaeder. Die Wahrscheinlichkeit  $1/6$  für die '6' ergibt sich nur nicht mehr als Ergebnis von 1 günstigem Fall / 6 mögliche Fälle, sondern als Ergebnis von 2 günstige Fälle / 12 mögliche Fälle. Ein Vorteil des Dodekaeders ist aber, dass wir ihn (etwas) einfacher zinken können, so dass aus der Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten eine Verteilung der Wahrscheinlichkeiten wird, die der Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilung ähnelt, die wir ja modellieren wollen. Das entsprechende Zinken erreichen wir dadurch, dass wir nicht mehr jede Zahl 1 bis 6 auf jeweils 2 Flächen anbringen, sondern das wir folgendes Arrangement treffen (ich hoffe, dass Sie mit diesem Vorschlag einverstanden sind):

'1' kommt auf eine der 12 Flächen	$\rightarrow p_1 = 1/12$
'2' kommt auf 2 der 12 Flächen	$\rightarrow p_2 = 2/12 = 1/6$
'3' kommt auf 4 der 12 Flächen	$\rightarrow p_3 = 4/12 = 1/3$
'4' kommt auf 3 der 12 Flächen	$\rightarrow p_4 = 3/12 = 1/4$
'5' kommt auf eine der 12 Flächen	$\rightarrow p_5 = 1/12$
'6' kommt auf eine der 12 Flächen	$\rightarrow p_6 = 1/12$

Die letzte Spalte dieser Tabelle, die die **Wahrscheinlichkeiten**  $p_1$  bis  $p_6$  für die jeweiligen 6 Geschwindigkeiten auflistet, zeigt eine 'gewisse' Ähnlichkeit mit der Maxwellschen Verteilung der Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Geschwindigkeiten des idealen Gases: Die mittleren Zahlen 3 und 4 werden tatsächlich häufiger gewürfelt als die anderen, das Maximum der Wahrscheinlichkeiten,  $W = 1/3$ , liegt aber 'eher' bei 3 als bei 4, und der Anstieg zu diesem Maximum ist steiler ist als der Abstieg danach.

Und nun kommt unser letzter (klimarelevanter!) gedanklicher Schritt im Zusammenhang mit diesem Würfel, in den die physikalisch begründete Maxwellverteilung 'eingebaut' wurde. Um mit Hilfe der schon mehrfach angesprochenen Würfel-Analogie die AGW-Theorie zu 'beweisen', [Lat04] und [Lat-in], ist es nicht einfach damit getan, durch Zinken eine vorgegebene Wahrscheinlichkeits-Gleichverteilung in die 'gewünschte' Richtung zu verstellen, sondern man muss diesem Würfel erst einmal den geschilderten asymmetrischen Abfall der Wahrscheinlichkeiten von einem Maximum ausgehend 'einprägen' und dann erst diese 'Prägung' zinken. Wir aber haben den Würfel zuvor nicht in Richtung eines so vermuteten anthropogen beeinflussten Klimamodells 'gezinkt', sondern in Richtung der 'natürlichen' Physik der Moleküle.

Wenn auch durch diese Maßnahme der unermessliche Komplexitäts-Abstand zwischen dem Klimawürfel und dem realen Klimasystem kaum meßbar verringert wurde, ist diese Maßnahme - diese extrem einfache Simulation einer Maxwell-ähnlichen Geschwindigkeitsverteilung - doch lehrreich, denn nun können wir sehr einfach durch Rechnen feststellen, ob die wahrscheinlichste Temperatur ein Mittel über die *Beträge*  $v$  der Geschwindigkeiten  $v$  ist oder nicht. Die Formel zur Berechnung solcher Mittelwerte haben wir schon auf Seite 10 kennen gelernt. Sie lautete:

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot p_5 + 6 \cdot p_6 = \text{Mittelwert bei gezinkten Wahrscheinlichkeiten } p_i$$

Einsetzen der für das 'Maxwell-Zinken' vorbereiteten Wahrscheinlichkeiten ergibt also:

$$1 \cdot (1/12) + 2 \cdot (2/12) + 3 \cdot (4/12) + 4 \cdot (3/12)p_4 + 5 \cdot (1/12) + 6 \cdot (1/12) = \\ (1 + 4 + 12 + 12 + 5 + 6) / 12 = 40/12 = 10/3 = 3,333... = 3 \frac{1}{3},$$

also mehr als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit '3'. Die Klimarelevanz dieser Aussage ergibt sich daraus, dass 'Klima' - als letzter Schritt unserer (stark vereinfachten) Körnungsleiter - definiert ist als die Wissenschaft von gemittelten atmosphärischen Variablen. Nun sehen wir, dass schon beim ersten Schritt auf dieser Leiter, beim Übergang von der feinkörnigen Molekülphysik zur grobkörnigen Physik der hydro-thermodynamischen Felder, zumindest die Temperatur *nicht* der Mittelwert von molekularen Geschwindigkeiten oder von irgendwelchen anderen molekularen Größen ist. Auch beim zweiten Schritt auf der vereinfachten Körnungsleiter - von der dann feinkörnigen Hydro-Thermodynamik zum Wetter - werden wir Entsprechendes vorfinden: Ein über 1000 km ausgedehnter Hochdruck- oder Tiefdruckwirbel ist auch nicht das Ergebnis einer bloßen Mittelung über hydrodynamische Wirbel.

Übrigens unterscheiden sich die Variablen eines feinkörnigen Systems von denen des grobkörnigen Systems nicht nur in den räumlichen, sondern auch in den zeit-

lichen Strukturen. Z.B. haben räumlich große Strukturen i.A. auch eine längere Lebensdauer als kleine Strukturen: Ein Tiefdruckwirbel 'lebt' länger als ein Staubwirbel. Oft kann man also zeitliche Skalen als charakteristische Lebensdauer einer räumlichen Skala auffassen. Für die Atmosphäre gibt es jedoch eine größte räumliche Skala (die globale Skala), aber keine größte zeitliche Skala! Es gibt zeitliche Skalen, die über 'Lebensdauern' räumlicher atmosphärischer Strukturen hinausgehen. Insbesondere längere Klimaskalen kann man nicht mehr als charakteristische Lebensdauern irgendwelcher inner-atmosphärischer Prozesse interpretieren. Allerdings gilt das nicht für atmosphärisch-externe Prozesse, die das Klima ebenfalls beeinflussen. Klimatologische Zeitdimensionen erreichen ozeanische Prozesse, Prozesse im Inneren der Erde, sowie astronomische Einflüsse. Es gibt also nicht nur eine, sondern viele Klimaskalen!

Prominent auf *sehr* großen Zeitskalen ist z.B. die sogenannte Plattentektonik, das von A. Wegener 1929 gefundene Wandern der Kontinente, [Weg29], verursacht von konvektionsähnlichen Strömungen des zähflüssigen **Erdmantels** unterhalb der festen Erdkruste (was Wegener allerdings noch nicht wusste). Auch Änderungen des **Erdmagnetfeldes**, ausgelöst von einem Dynamo-Effekt in Verbindung mit zeitlich variierenden Konvektions-Strömungen im flüssigen (äußeren) Bereich des **Erdkerns**, beeinflussen das Klima, ferner auch astronomische Gegebenheiten wie die veränderliche Erdbahn um die Sonne, aber auch - wesentlich komplexer - veränderliche Abstände unseres Sonnensystems von Bereichen in unserer Milchstraße, in denen Supernova-Explosionen gehäuft auftreten. Diese Bereiche beeinflussen die Dichte der hier ankommenden kosmischen Strahlen, die ihrerseits Kondensationskerne für kühlende Wolken bilden können. Auch das Magnetfeld der Sonne ist hiermit vernetzt, denn es beeinflusst die Sonnenflecken und den Sonnenwind, der seinerseits *den* Anteil der kosmischen Strahlen zurückdrängen kann, welcher in die tieferen atmosphärischen Schichten eindringt und dort zur Wolkenbildung beitragen kann, [SC08]. Schließlich können Sonnen- und Mondfinsternisse wiederum den Sonnenwind beeinflussen [Fett08], und das ebenfalls zeitlichen Variationen unterworfenen irdischen Magnetfeld kann das auch. Das alles sind keine wild ausgedachten Wechselwirkungen, sondern Zusammenhänge, welche Messergebnisse erklären könnten.

Liebe Leserin, lieber Leser, Sie merken spätestens jetzt, dass Komplexität nicht nur ein Merkmal der Atmosphäre ist, sondern auch ihrer Umgebungs-Systeme unterhalb und oberhalb der Atmosphäre. Dabei hatten wir in der obigen Aufzählung die veränderlichen Abstände der Erde von der Sonne und die veränderliche Schrägstellung der Erdachse mit ihren direkten thermischen Auswirkungen durch sich verändernde Solarstrahlung, die die Erde erreicht, noch gar nicht erwähnt, und auch nicht die Auswirkungen von Vulkanismus und Erdbeben.

## Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

Wir hatten auf Seite 62 gefunden, dass aus computertechnischen Gründen die Lagrange-Teilchen - oder die gegen sie austauschbaren ortsfesten Euler-Teilchen - so groß sein müssen, dass von räumlich stetigen hydro-thermodynamischen Feldern kaum die Rede sein kann. Es war dennoch erst einmal richtig, den ersten Schritt in Richtung Grobkörnigkeit zu vollziehen, denn es gelingt dabei, die Bewegungsgleichungen für die diskreten Moleküle zu ersetzen durch die hydro-thermodynamischen Gleichungen für Felder der Dichte, des Druckes und der Temperatur. Das sind sogar Gleichungen, die bereits notwendige *physikalische* Stabilisierungsbedingungen für die neue, größere Skala 'in sich' tragen. Allein die Verwendung dieser 'anderen' Gleichungen bedeutet schon die Vermeidung eines durch alleinige *mathematische* Mittelung vollzogenen Übergangs von der Fein- zur Grobkörnigkeit. Bei jedem Schritt auf der 'Körnungsleiter' kann die jeweils grobkörnige Skala der Phänomene nur dann 'effektiv' beschrieben werden, wenn man sich auch eine physikalische Stabilisierung der auf der höheren Skala entstehenden Strukturen erreicht. Manchmal (wie bei der Dichte) garantieren die physikalischen Gesetze 'nur', dass die Mittelungs-Ergebnisse stabil sind, manchmal (wie bei der Temperatur und der Entropie) wirken diese physikalischen Gesetze aber auch 'aktiv' mit und bewirken, dass die grobkörnigen Gleichungen Variablen enthalten, die es in feinkörniger Form noch gar nicht gab. Diese Gleichungen sind dann Ausdruck der Tatsache, dass sich auf den jeweils höheren Skalen auch jeweils andere, nur für diese geltende Physik offenbart. Diese Erfahrung widerspricht vollkommen dem Denken der sogenannten reduktionistischen Physik, aber auch der in der Klimamodellierung gängigen Praxis und den meisten Äußerungen in Klimadiskussionen: Klima wird dort als gemitteltes Wetter geradezu *definiert!*

Wären die Schritte auf der Körnungsleiter durch physikfreies, mathematisches Mitteln zu gehen, dann müssten trivialerweise die in der jeweils höheren Skala auftretenden Variablen auch Mittelwerte über Variablen sein, die es schon in der niedrigeren Skala gab. In diesem Kapitel haben wir ausführlich gezeigt, dass das schon beim ersten Schritt  $a \rightarrow b$  auf der 'Körnungsleiter' nicht der Fall ist. Am ehesten kann man noch die Massendichte als gemittelte molekulare Dichte ansehen. Moleküle haben zwar keinen Druck, aber man kann auch im Druck immerhin noch einen Mittelwert erkennen, zwar nicht über entsprechende direkte molekulare **Größen**, aber über molekulare **Prozesse**: Der Druck ist ein Mittelwert über alle Impulsänderungen - das sind mit der Masse multiplizierte Geschwindigkeitsänderungen - die bei molekularen Kollisionen stattfinden.

Bei der Temperatur (und bei der Entropie, die erst später genauer erläutert wird) ist noch nicht einmal eine solche Rückführung auf gemittelte Molekülphysik möglich. Die gängige Vorstellung, dass die Temperatur eine mittlere Geschwindigkeit der Moleküle

darstellt, ist falsch. Die Temperatur ist überhaupt kein Mittelwert über irgendwelche molekulare Größen oder Prozesse, sie ist nichts anderes als ein Parameter für Wahrscheinlichkeiten, mit der bestimmte molekulare Geschwindigkeiten auftreten. Zwar ist bei höherer Temperatur die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Moleküle höher als bei niedrigerer Temperatur, aber die wahrscheinlichste und die mittlere Geschwindigkeit sind *unterschiedliche* Größen, wie wir im Haupttext mithilfe eines präparierten Dodekaeder-Würfels direkt ausrechnen konnten.

Fazit: Ein einzelnes Molekül 'hat' weder eine Temperatur noch eine Entropie: Die Variablen der zweiten Stufe der Körnungsleiter, also die hydro-thermodynamischen Variablen wie z.B. Temperatur oder Entropie, können also nicht einfach Mittelwerte über die Variablen der ersten, molekularen Stufe der Körnungsleiter sein. Es gibt z.B. keine Molekül-Temperatur, deren Mittelwert die hydro-thermodynamische Temperatur wäre. Dies ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass auch auf den höheren Stufen ein Aufsteigen zu jeweiligen grobkörnigeren Strukturen nicht dadurch zu erledigen ist, dass man über die feinkörnigen Strukturen einfach mathematische Mittelwerte bildet - wie man es aber auf der Stufe vom Wetter zum Klima tut. Die Dichte und der Druck als hydro-thermodynamische Variablen sind hingegen schon eher als Ergebnisse von Mittelungs-Prozessen über molekulares Verhalten zu verstehen, die Entropie jedoch ganz und gar nicht. Aber das ist ein 'Zukunftsthema' noch dieses Buches.

PS: Erst nach der Fertigstellung und Veröffentlichung der ersten Version dieses Textes in meiner Homepage [www.hajolange.de](http://www.hajolange.de) las ich im Heft 1/2014 der Mitteilungen der DMG (Deutsche Meteorologische Gesellschaft) dass der Deutsche Wetterdienst einen neuen Großrechner in Betrieb nimmt, dessen Spitzenleistung 'in zwei Stufen bis zu 2x550 Multiplikationen pro Sekunde' gesteigert werden soll. Wenn das gelingt, ist der Rechner etwa 7 Mal schneller als der Hamburger Klimarechner, dessen Leistungsfähigkeit gerade ausreicht, eine Gitter-Auflösung der Atmosphäre entsprechend dem unteren Ende der Tabelle von Seite 62 zu erreichen, so dass z.B., ein Quader von 1 km Höhe und der Breite 100x100 km die höchste direkt durch Differentialgleichungen erreichbare Detaillierung darstellen würden. Der neue Rechner könnte nun diese Auflösung auf Zellen der Größe 1x38x38 km verbessern. M.a.W., Wolken und vieles mehr könnten weiterhin *nicht* berechnet werden, diese klima-entscheidenden Einflüsse müssten weiterhin parametrisiert werden, also durch algebraische Beziehungen in Zeitabhängigkeiten von auflösbaren Freiheitsgraden gebracht - versklavt - werden. Dennoch hieß es im zitierten Heft: "Durch mehr [Rechen-]Leistung können künftig neue und deutlich komplexere Vorhersagemodelle eingesetzt werden ... [die] auch genauere Berechnungen des zukünftigen Klimas ermöglichen". Die Bewunderung der kaum fassbaren Rechenleistung teile ich ebenfalls, die Schlussfolgerungen aber nicht.