

2.2 Dynamik der Lagrange'schen und der Euler'schen Luftpäckchen

Worum geht es?

Die vielen Betrachtungen am Ende des letzten Kapitels zum Thema 'molekulares System als Startpunkt einer Mittelungshierarchie' war natürlich kein Selbstzweck: Nach der Systemanalyse mit dem 'vernichtenden' Resultat absurder Rechenzeiten kommt man fast automatisch auf die Idee, die Differentialgleichungen nicht auf einzelne Luft-Moleküle, sondern auf Zusammenfassungen sehr vieler solcher Moleküle zu ganzen Luftpäckchen anzuwenden. Wählt man Luftpäckchen der Größe von knapp 4 Litern, so kommt man immerhin auf einen Ersparnisfaktor von 10^{23} (d.h., man hat 100 Trilliarden mal weniger 'Objekte' zu berechnen). Und wenn das auch nicht reicht, kann man es ja mit noch größeren - also noch wenigeren - Luftpäckchen versuchen.

Allerdings sind dieser Vergrößerung von Luftpäckchen zum weiteren Einsparen von Rechenzeit Grenzen gesetzt: Wenn wir z.B. mit einer einzigen Differentialgleichung die Temperatur eines ganzen Luftpäckchens ausrechnen wollen, dann geht das natürlich nur, wenn das Luftpäckchen auch nur eine Temperatur *hat*. Näherungsweise kann man Dank des auf Seite 32 erwähnten stabilen lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes davon ausgehen. Dieses Gleichgewicht sorgt dafür, dass die Temperaturen und die anderen thermodynamischen Variablen der Luft sich nicht sprunghaft ändern - weitgehend homogen bleiben - so dass sie in *kleinen* Luftpäckchen als 'fast' konstant angesehen werden können, nicht aber in großen Luftpäckchen.

Wir erarbeiten in diesem Kapitel eine Tabelle unterschiedlich großer Luftpäckchen und müssen leider feststellen, dass man auf akzeptable Rechenzeiten erst dann kommt, wenn das Luftpäckchen als Würfel eine Kantenlänge von gut 20 km hat. Dieser Würfel ragt also etwa doppelt so hoch wie die sogenannte **Troposphäre**, das ist die atmosphärische Schicht, in der sich das Wetter abspielt.

Da sich die thermodynamischen Variablen vertikal wesentlich stärker verändern als horizontal, wählt man nicht die Würfelform für die Luftpäckchen, sondern Quader mit sehr großer Grundfläche und sehr geringer Höhe. z.B. Quader von 1 km Höhe und einer quadratischen Grundfläche von 100 mal 100 km. Also: unsere Wetter- oder Klimamodelle können aus Gründen der Rechenkapazität für ein Raumgebiet von hundert mal hundert Mal einem Kilometer für jede thermodynamische (und hydrodynamische) nur einen einzigen Zahlenwert berechnen! Wie will man also bei einer derart geringen Auflösung Strukturen beschreiben, wie sie in Form von Wolken oder von Tornados vorliegen?

Egal, wie groß man diese Luftpäckchen wählt, sie heißen Lagrange'sche Teilchen, wenn sie mit der Strömung mitschwimmen, und sie heißen Euler'sche Teilchen, wenn

sie immer am gleichen Ort bleiben. Im letzteren Fall sind die Luftpäckchen natürlich 'offen' für einen Massenaustausch, denn sie werden ja 'durchströmt'.

Wie schon vielfach angedeutet, kann man sich die Atmosphäre als eine Ansammlung vieler Luftpäckchen vorstellen, die man nicht ohne Grund auch Luftteilchen nennt. Fachlich korrekt nennt man sie **Lagrange'sche Teilchen**. Stellen Sie sich die gesamte Luftmasse der Atmosphäre vor als eine Ansammlung von würfelähnlichen, dicht an dicht liegenden Luftballons, deren Hüllen entfernt worden sind. In allen atmosphärischen Strömungsformen schwimmen diese würfelförmigen Lagrange-Teilchen mit der **Strömung** mit. Oder besser: Die Bewegung dieser Luftpäckchen *ist* die Strömung! Dabei werden alle Luftpäckchen von ihren Nachbarn **deformiert**, (so dass sie ihre Würfelform verlieren), und sie werden **komprimiert** (zusammengedrückt in konvergenter Strömung, die vergleichbar ist mit den Lichtstrahlen hinter einem Brennglases, einer konvexen Linse), oder sie werden **expandiert** (in divergenter Strömung, vergleichbar mit den Lichtstrahlen hinter einer konkaven Linse).

Die Größe dieser Luftpäckchen ist in gewissem Rahmen frei wählbar, im vorigen Kapitel haben wir 10^{23} Luftteilchen (Atome und Moleküle) gewählt. Bei normalen Werten für den Druck und für die Temperatur in der unteren Atmosphäre nehmen diese 10^{23} Luftmoleküle ein Volumen von knapp 4 Litern ein.

Ein vielversprechender Ausweg aus dem im vorigen Kapitel diskutierten 'zu-viele-Teilchen-Problem' der atmosphärischen Dynamik auf molekularer Ebene wäre es vielleicht, die Bewegungsgleichungen nicht auf die Moleküle der Atmosphäre anzuwenden, sondern auf die **Lagrange'schen Luftpäckchen** selbst. Man bringt ja etwa 10^{23} Moleküle in *einem* solchen Teilchen unter, so dass die ganze Atmosphäre durch entsprechend weniger Gleichungen zu beschreiben wäre. Jedoch: Trotz dieser immensen Reduzierung der Teilchenzahl müssen die Bewegungsgleichungen noch immer auf äußerst viele (nun 'andere') Teilchen angewendet werden - *wie* viele es sind rechne ich Ihnen gleich vor - auch wenn jedes dieser Teilchen 10^{23} , d.h. 100 Trilliarden atomare bzw. molekulare Teilchen bündelt.

Obendrein ist es keine reine Newtonsche Dynamik, die diese Gleichungen verkörpern, sondern es ist die Hydrothermodynamik dieser größeren Teilchen, die sich ja nicht nur bewegen, sondern auch komprimiert und deformiert werden - und die dabei **wärmer** oder **kälter** werden - und die auch Änderungen der **Dichte** und des **Drucks** erleiden. Anders als die Atome und Moleküle haben diese Lagrange'schen Teilchen nicht nur die hydrodynamischen Eigenschaften Ort und Impuls, sondern eben auch die thermodynamischen Eigenschaften **Temperatur**, **Druck** und **Dichte** (→ auch

Kap. 2.3, Seite 72). - Ich streue hier schon einmal vorsichtig ein, dass diese thermodynamischen Variablen zur physikalischen Beschreibung der Lagrange-Teilchen in komplexeren atmosphärischen Modellen nicht mehr ausreichen. Wir werden daher später noch die **Entropie** als vierte thermodynamische Variable benötigen.

Und wie viele solche hydro-thermodynamischen Lagrange'scher Luftpäckchen aus jeweils 10^{23} Molekülen umfasst nun die Atmosphäre? Es sind noch immer 10^{21} , also noch immer eine Trilliarde (\rightarrow nächster Absatz). Die ganze Atmosphäre enthält demnach $10^{21} \cdot 10^{23} = 10^{44}$ Atome / Moleküle, d.h. eine Septillion (wenn ich die '...illionen' und '...illiarden' richtig abgezählt habe). Das verdeutlicht die 'Unmöglichkeit' der molekularen Beschreibung der Atmosphäre noch einmal ganz drastisch. Wir werden noch diskutieren, ob die gewaltige Reduzierung der nötigen Berechnungen durch die Zusammenfassung von jeweils 10^{23} - oder auch mehr - Teilchen zu einem einzigen praxistauglich sein kann. Aber vorher möchte ich beschreiben, wie man auf die Zahl 10^{21} als Gesamtzahl der atmosphärischen Lagrange-Teilchen der gewählten Größe überhaupt kommt, denn dabei stößt man auf Methoden und Informationen, die auch in anderen Zusammenhängen innerhalb unseres Themenkomplexes wichtig sind.

Laut Wikipedia hat die Erdatmosphäre eine Masse von etwa $5 \cdot 10^{18}$ kg. Die Masse eines *jeden* Luftbestandteiles (Sauerstoff, Stickstoff, usw.) ist natürlich proportional zur Anzahl seiner Teilchen. Der Proportionalitätsfaktor ist das Molekulargewicht bzw. das Atomgewicht: z.B. verkörpern 1000 Sauerstoffmoleküle O_2 (Molekulargewicht 32) eine 8 Mal größere Masse als 1000 Heliumatome (Atomgewicht 4)! Nun ersetzen wir die Zahl 1000 durch eine viel größere Zahl, die sogar noch 6 Mal größer ist als die Anzahl 10^{23} der Moleküle in unserem 'Lieblings-Luftpäckchen' (\rightarrow Seite 44). Die Zahl $6 \cdot 10^{23}$ also (genauer $6,02214 \cdot 10^{23}$), nennt man **Avogadro'sche Zahl** - im deutschen Sprachraum auch **Loschmidt'sche Zahl**. Natürlich sind beide Massen nun sehr viel größer, aber ebenso selbstverständlich ist die Sauerstoff-Masse wieder achtmal größer als die Helium-Masse, weil ja schon jedes *einzelne* Sauerstoff-Molekül achtmal schwerer ist als jedes Helium-Atom. Das Massenverhältnis bleibt immer gleich, egal wie viele Teilchen man für beide Massen zusammenfasst. Und warum nimmt man ausgerechnet eine so 'krumme Zahl' $6,02214 \cdot 10^{23}$? Der Grund dafür ist die reine Bequemlichkeit, denn das Besondere an dieser - im wahrsten Sinne des Wortes '*merkwürdigen*' (!) - zahlenmäßigen Ansammlung von Atomen oder Molekülen ist, dass der Zahlenwert der in Gramm ausgedrückten angesammelten Masse dem jeweiligen Molekular- oder Atomgewicht entspricht! Solche Massen-Ansammlungen nennt man molare Massen oder **Molmassen**. Der langen Rede kurzer Sinn: Wenn die Molmasse eines Stoffes m Gramm wiegt, dann ist m das Atom- bzw. das Molekulargewicht

dieses Stoffes. Z.B. wiegen $6,02214 \cdot 10^{23}$ Sauerstoffmoleküle, also ein Mol Sauerstoffmoleküle, genau 32 Gramm!

Da die Molmasse einer Ansammlung von etwa $6 \cdot 10^{23}$ Molekülen bzw. Atomen entspricht, hatten wir als Größe unseres 'Lieblinspäckchens) (auf Seite 45) $1/6$ Molmasse gewählt. Wenn wir also wissen wollen, aus wie vielen solcher Luftpäckchen die Atmosphäre besteht, müssen wir ihre Gesamtmasse von $5 \cdot 10^{18}$ kg = $5 \cdot 10^{21}$ g durch die Anzahl der sechstel Molmassen ausdrücken. Aber wie viel wiegt denn ein Mol Luft? Welches Molekulargewicht hat denn die Luft? Leider ist Luft ein Gemisch aus *verschiedenen* Gasen mit *unterschiedlichen* Atom- und Molekulargewichten, wobei der Anteil von Wasserdampf auch noch stark variiert. Die wichtigsten Bestandteile sind (gerundete Mengenangaben in Volumen-Prozent):

Stickstoffmoleküle N_2 (78%, Molekulargewicht 28)

Sauerstoff O_2 (21%, Molekulargewicht 32)

Argon Ar (1%, Atomgewicht 40)

Kohlendioxid CO_2 (0,04%, Molekulargewicht 44)

Wasserdampf H_2O (0,1bis 4%, im Mittel gut 1% [DGD88], Molekulargewicht 18)

Liebe Leserin, lieber Leser, darf ich den Gedankengang zur Herleitung der Anzahl der Lagrange-Luftpäckchen in der Atmosphäre einmal kurz unterbrechen? Beim Zusammensuchen der obigen Zahlen war ich ziemlich verwirrt, weil drei Fakten offenbar nicht im Geringsten zusammenpassen wollen. (Oder mache ich einen Denkfehler)? Die drei Fakten, die einzeln nicht angezweifelt werden, lauten

- 1) der CO_2 -Gehalt (der den anthropogenen Zuwachs der letzten 150 Jahre bereits enthält) ist mindestens 25 Mal kleiner als der mittlere Gehalt an Wasserdampf (0,04 versus mehr als 1 Volumen-Prozent).
- 2) Wasserdampf ist ein stärkeres Treibhausgas als CO_2 .
- 3) Die Klimaziel-Formel (deren Folgen uns schon viele Milliarden Euro gekostet haben), argumentiert ausschließlich mit dem schwächeren und auch 25 Mal schwächer konzentrierten Treibhausgas CO_2 .

Die Umrechnung von Volumenprozent in massenbezogene Anteile könnte ein Faktor sein, aber wohl kein so großer, dass sich das obige Missverhältnis aufklärt. Wenn man argumentiert, dass der Mensch keinen Einfluss auf die Konzentration von Wasserdampf habe, dass Variationen der Wasserdampf-Konzentration, anders als CO_2 -Variationen, rein natürliche Effekte seien, dann ist diese Aussage erstens fraglich, und zweitens bringt man dadurch zum Ausdruck, dass man von vornherein auf der Suche nach anthropogenen Klimabeeinflussungen ist, aber weniger interessiert ist an

natürlichen Klimabeeinflussungen, und dass man auch weniger interessiert ist am Verhältnis zwischen natürlichen und anthropogenen Klimabeeinflussungen.

Wie dem auch sei, aus der obigen Zusammenstellung der Bestandteile der Atmosphäre ergibt sich ein mittleres Molekulargewicht der Luft von knapp 30, - bei sehr feuchter Luft etwas weniger. Ein Mol Luft wiegt also etwa 30 g, und das von uns so definierte 'Lieblings-Luftpäckchen' mit einem Sechstel Molmasse wiegt 5 g. - Nun ist es nicht mehr schwer: *Die atmosphärische Gesamtmasse von $5 \cdot 10^{21}$ g besteht aus 10^{21} Lagrange-Teilchen von je 5g (also des Volumens von knapp 4 Litern und der Teilchenzahl von 10^{23}).*

Das ist noch immer eine Trilliarde, also nicht gerade wenig! Wie wir ausgerechnet hatten, benötigt der Hamburger Klima-Großrechner mindestens 20 Jahre, um jedem der 10^{23} Moleküle eines *Luftpäckchens* eine einzige Rechenoperation widmen zu können. Und gerade sahen wir, dass die Atmosphäre aus 10^{21} solcher Luftpäckchen besteht. Ich will gar nicht darauf insistieren, dass der Rechner das trilliardenfache dieser 20 Jahre benötigt, um jedem atmosphärischen Luftmolekül eine einzige Rechenoperation widmen zu können, denn das versucht ja niemand. Aber leider erleidet auch unsere Idee einen Dämpfer, die Rechenzeit dadurch zähmen zu können, dass man Gleichungen auf Lagrange'sche Teilchen statt auf Moleküle anwendet: Um jedem dieser 'nur noch' eine Trilliarde Luftpäckchen auch nur eine Rechenoperation zu widmen, wird die Zahl der zu berechnenden 'Objekte', der 'Lieblings-Luftpäckchen' ja nur 100 Mal kleiner als die Zahl der Moleküle *pro* Luftpäckchen. Und diesmal sind nicht nur die Bewegungen der Objekte zu berechnen, sondern zusätzlich die thermodynamischen Variablen. Aber man benötigt noch immer 20 hundertstel Jahre, also fast 2 ½ Monate, um jedem Luftpäckchen eine einzige Rechenoperation zu widmen.

OK, wir kennen *beide* Gleichungstypen noch nicht. Ich hatte nur angedeutet, dass für die Moleküle die **Newton'sche Bewegungsgleichung** zuständig sei - im Falle eines Atmosphären-Modells aus idealem Gas würden sogar wesentlich einfachere sogenannte Stoßgesetze ausreichen - und dass für die Lagrange'schen Luftpäckchen hydro-thermodynamische **Differentialgleichungen** zuständig seien, denn im Gegensatz zu den Atomen und Molekülen sind die Lagrange'schen Teilchen nicht nur kompressibel und deformierbar, sondern sie haben darüber hinaus - eigentlich *deswegen* - thermodynamische Eigenschaften, eine bestimmte **Temperatur**, eine bestimmte **Entropie**, eine bestimmte **Dichte** und einen bestimmten **Druck**. Die hydrodynamischen Eigenschaften der Lagrange-Teilchen ähneln denjenigen der Moleküle, sie kennzeichnen, wie schnell und wohin sie sich bewegen.

Die Lagrange-Teilchen sind letztlich willkürlich definierte Untereinheiten eines durch den Raum strömenden, **kontinuierlich** verteilten Fluids. Buchstäblich an jedem Raumpunkt ist eine **Strömungsgeschwindigkeit** definiert. Entsprechendes gilt auch für die Temperatur, für die ('spezifische', s.u.) Entropie, für die Dichte und für den Druck. Wenn das Fluid atmosphärische Luft ist, dann nennt man die Strömungsgeschwindigkeit auch **Wind** oder **Windgeschwindigkeit**, wobei letzteres manchmal die bessere Wortwahl ist, weil man unter 'Wind' auch gerne nur den **Betrag** - die 'Stärke' - des **Windvektors** versteht.

Wenn man aber von einem **Windfeld** spricht, meint man immer den Betrag *und* die **Richtung** des Windes. M.a.W., die Begriffe 'Windfeld' und 'Windvektorfeld' sind Synonyme. Aber was *sind* eigentlich **Felder**?

Variablen wie die genannten, die an jeden Raumpunkt - und übrigens auch zu jedem Zeitpunkt - unterschiedliche Werte haben können, nennt man **Feldvariable**. So hat die Atmosphäre (mindestens) ein Druck- ein Dichte- ein Temperatur- und ein Windfeld. Die drei ersten Felder sind **Skalarfelder**, weil an jedem Raumzeitpunkt nur *eine* Angabe zu machen ist: man möchte wissen, welche Werte von p , ρ bzw. T 'dort und dann' vorliegen. (p , ρ bzw. T sind die Symbole für Druck, Dichte bzw. Temperatur. Der später auch noch 'mitspielenden' spezifischen **Entropie** werden wir das Symbol s geben). Buchstäblich für jeden Raumpunkt eine Größenangabe für p , ρ bzw. T

Aber das Windfeld ist ein **Vektorfeld**, für das für jeden Ort und für jede Zeit drei Angaben zu machen sind, nämlich für die Stärken der drei Windkomponenten: die Komponente von West nach Ost (Symbol v_x), von Süd nach Nord (Symbol v_y), und von unten nach oben (Symbol v_z). Mit dem Vektor-Symbol \mathbf{v} kann man die *drei* Windkomponenten zu einem einzigen Symbol zusammenfassen. Man kennzeichnet das z.B. in der Form $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Wundern Sie sich also nicht, wenn Sie einmal einen Text lesen wie: "die *sechs* Variablen p , ρ , T und \mathbf{v} des Luftpäckchens ...". Ein anderer sehr häufig auftretende Vektor ist der **Ortsvektor** \mathbf{r} . Wir können ihn gleich einmal anwenden: Einen umständlichen Satz - wie "Die Feldvariablen p , ρ , T und \mathbf{v} haben an jedem Ort und zu jeder Zeit unterschiedliche Werte" - ersetzt wir durch den einfache Satz: *Die Feldvariablen p , ρ , T und \mathbf{v} sind **Funktionen** von \mathbf{r} und t , wobei t das Symbol für die Zeit ist. Das schreibt man - an den Beispielen Druck und Wind demonstriert - in der Form $p = p(\mathbf{r}, t)$ bzw. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Oft verwendet man auch *eigene* Funktions-Symbole, etwa f, g, \dots : $p = f(\mathbf{r}, t)$ bzw. $\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$. Der **Ortsvektor** \mathbf{r} unterscheidet sich von anderen Vektoren dadurch, dass man die Komponenten (meist x, y, z genannt) nicht als Indizes verwendet, wie in $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, sondern direkt: Statt $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ wird also $\mathbf{r} = (x, y, z)$ geschrieben. **Feldfunktionen** wie $p = f(\mathbf{r}, t)$ kann man folglich auch*

mit $p = f(x, y, z, t)$ ansprechen. Die Größen x, y, z, t nennt man **Argumente** der Funktion.

Felder von Druck, Temperatur usw. sind also Variablen, die keine Zustände von einzelnen (diskreten) Luft-Molekülen kennzeichnen. Feldvariablen kennzeichnen vielmehr Zustände von Lagrange'schen Luftpäckchen mit einem frei wählbaren Ausmaß, Luftpäckchen, in denen z.B. 10^{23} Moleküle zusammengefasst worden sind, deren Physik dann nur noch im Mittel beschrieben wird. Aus der Beschreibung des Systems durch molekulare Variablen, die nur an bestimmten Raumpunkten gegeben sind, (nur an denen, wo sich gerade ein Molekül befindet), entsteht so eine Beschreibung, bei der es an *jedem* Raumpunkt einen Feldwert gibt. Diesen Unterschied kennzeichnen wir durch das Begriffspaar *diskret* bzw. *kontinuierlich*, und dieser Unterschied ist auch charakteristisch für den ersten Schritt in der auf Seite 26 aufgelisteten Skalen-Übersicht.

Feldvariable (oder *Feldfunktionen*) sollten eigentlich an jeden Raumpunkt \mathbf{r} und zu jedem Zeitpunkt t unterschiedliche Werte haben. Sie sollten sich also 'von Punkt zu Punkt' verändern können. Das können sie aber nicht, denn innerhalb jedes Luftpäckchens sind die Größen p, ρ, T, s und \mathbf{v} konstant, sie sind ja durch Mittelbildungen über die molekularen Zustände innerhalb des gewählten Volumens erst entstanden. Also ändern sie sich *nicht* 'von Punkt zu Punkt', sondern (z.B. bei 10^{23} Molekülen pro Lagrange-Teilchen) etwa alle 15 cm. Das ist hinreichend 'eng' zur Beschreibung (zur **Modellierung**) etwa der Entstehung eines Tiefdruckwirbels, aber natürlich nicht zur Modellierung der Bildung eines Wolkentropfens.

Diesem Wunsch nach Feldwerten, die sich 'von Punkt zu Punkt' ändern können, aber nicht sprunghaft wie von Luftpäckchen zu Luftpäckchen, müssen wir noch einen weiteren Fachbegriff zuordnen. Es ist der Begriff der **Stetigkeit**. Da umgangssprachlich die Begriffe 'stetig' und 'kontinuierlich' oft als Synonyme behandelt werden, sollten wir die hier verwendete Terminologie noch einmal zusammenfassen. Vielleicht kann man es so sagen: Die Systembeschreibung durch die Angabe von räumlich verteilten Werten der Variablen ist ...

... **diskret**, falls Lücken im Raum und Sprünge zwischen Nachbarwerten auftreten

... **kontinuierlich**, falls keine Raumlücken, aber Sprünge zwischen Nachbarwerten auftreten

... **stetig**, falls weder Raumlücken noch Sprünge zwischen Nachbarwerten auftreten

Da die Unstetigkeit der hydro-thermodynamischen Feldwerte von der endlichen Größe der Luftpäckchen verursacht wird, gibt es 'eigentlich' nur einen Ausweg: man

muss dermaßen kleine Lagrange-Teilchen verwenden, dass die Sprunghaftigkeit der Feldänderungen nicht mehr 'auffällt'. Andererseits dürfen diese Luftpäckchen nicht zu klein sein, denn es müssen so viele Luftmoleküle in ihnen enthalten bleiben, dass man über das Verhalten dieser Moleküle sinnvoll mittel kann. Tatsächlich haben wir hier noch Reserven! Man benötigt 'nicht wirklich' gleich 10^{23} Moleküle, um zuverlässige Mittelwerte bilden zu können.

Aber es ist nützlich, zu begreifen, dass wir einen Kompromiss eingehen müssen: Die Lagrange-Teilchen müssen so klein sein, dass man von einem stetigen Feldverhalten reden kann, aber doch so groß, dass es für zuverlässige (reproduzierbare) Mittelwert-Bildungen noch hinreichend viel Moleküle enthält.

Zum Glück lässt die Natur diesen Kompromiss zu: Die Hydro-Thermodynamik konnte nur deshalb eine erfolgreiche, eine effektive Theorie werden, weil dieser Kompromiss physikalisch möglich ist - durch physikalische Gesetze unterstützt wird. Das Gesetz, welches hier mitspielt, ist das Gesetz vom sogenannten **lokalen thermodynamischen Gleichgewicht**.

Jedoch wird der Jubel über diesen Erfolg gedämpft, wenn wir an das schon beschriebene Problem denken, dass auch für die größten Supercomputer die Zeit zur Berechnung des Verhaltens der 10^{21} Lagrange-Teilchen aus je 10^{23} Molekülen noch viel zu lang ist. Die Lagrange-Teilchen müssten sehr viel *größer* sein, damit es sehr viel *weniger* werden und so eine Berechnung der Veränderungen ihrer Variablen in der Praxis erst ermöglicht wird. Der Konflikt zwischen dem Zwang zur Verwendung sehr großer Lagrange-Teilchen aus computertechnischen Gründen und dem Zwang zur Verwendung möglichst kleiner Lagrange-Teilchen, um auch die zum Teil äußerst wichtigen kleinskaligen Prozesse wie z.B. wolkenphysikalische Details adäquat beschreiben zu können, muss als eines der wichtigsten - ungelösten - Probleme der atmosphärischen Modellierung angesehen werden.

Um das zu konkretisieren und zu veranschaulichen, habe ich die folgende Tabelle verschiedener Lagrange-Teilchen mit ansteigender Größe berechnet. Die ersten drei Spalten geben diese Größen in Würfel- bzw. Quader-Kantenlängen, in Litern und in Vielfachen des Molvolumens an. Die vierte Spalte drückt die Größe der Lagrange-Teilchen aus durch die Zahl der in ihnen gebündelten Moleküle, und die letzte Spalte benennt die Anzahl der entsprechenden Lagrange-Teilchen (LT) in der Atmosphäre. Daher ergeben die Produkte der Zahlenangaben der beiden letzten Spalten in jeder Zeile Werte bei 10^{44} , das ist die Gesamtzahl aller atmosphärischen Moleküle. (Falls Sie weiter mit solchen Zahlen jonglieren wollen, hier ein Tipp: die Zahlen 2, 3, 4 usw., die sich hinter den Namen Billionen, Trillionen, Quadrillionen usw. 'verbergen', sind einfach die Potenzen von einer Million! Beispiele: 1 Billion = (1 Million)² = $(10^6)^2 =$

10^{12} , 1 Trillion = $(1 \text{ Million})^3 = (10^6)^3 = 10^{18}$ usw.. Falls eine Zahl nicht auf '...illionen', sondern '...illiarden' endet, werden am Ende der beschriebenen "Nullenberechnung" noch einmal 3 Nullen addiert).

Die erste Zeile der Tabelle zeigt, dass das kleinste der hier aufgelisteten Luftpäckchen von einem Kubikzentimeter Volumen mit 2,7 Trillionen ($2,7 \cdot 10^{18}$) Molekülen noch immer mehr als genug zur Bildung von Mittelwerten enthielte. Sogar ein Luftwürfel mit der Kantenlänge 0,001 mm (also einem Mikrometer) enthält noch 2,7 Millionen Moleküle.

Hier nun die Tabelle für eine Aufteilung der Atmosphäre in zunehmend *weniger* Luftpäckchen (LP, beginnend mit 37 Quadrillion = $37 \cdot (10^6)^4 = 37 \cdot 10^{24} = 3,7 \cdot 10^{25}$), die dann aber immer mehr Moleküle enthalten (beginnend bei 2,7 Trillionen = $2,7 \cdot 10^{18}$):

Würfel, Kante 1 cm	$\triangleq 10^{-3}$ Liter	$\approx 4,5 \cdot 10^{-5}$ Mol	$\triangleq 2,7 \cdot 10^{18}$ Moleküle	($3,7 \cdot 10^{25}$ LP)
Würfel, Kante 10 cm	$\triangleq 1$ Liter	$= 1/22,4$ Mol	$\triangleq 2,7 \cdot 10^{21}$ Moleküle	($3,7 \cdot 10^{22}$ LP)
Würfel, Kante 15,5 cm	$\triangleq 3,7$ Liter	$= 1/6$ Mol	$\triangleq 10^{23}$ Moleküle	(10^{21} LP)
Würfel, Kante 28,2 cm	$\triangleq 22,4$ Liter	$= 1$ Mol	$\triangleq 6 \cdot 10^{23}$ Moleküle	($1,7 \cdot 10^{20}$ LP)
Würfel, Kante 1m	$\triangleq 1000$ Liter	≈ 40 Mol	$\triangleq 24 \cdot 10^{24}$ Moleküle	($5 \cdot 10^{18}$ LP)
Würfel, Kante 10m	$\triangleq 10^6$ Liter	$\approx 4 \cdot 10^4$ Mol	$\triangleq 24 \cdot 10^{27}$ Moleküle	($5 \cdot 10^{15}$ LP)
Würfel, Kante 100m	$\triangleq 10^9$ Liter	$\approx 4 \cdot 10^7$ Mol	$\triangleq 24 \cdot 10^{30}$ Moleküle	($5 \cdot 10^{12}$ LP)
Würfel, Kante 1km	$\triangleq 10^{12}$ Liter	$\approx 4 \cdot 10^{10}$ Mol	$\triangleq 24 \cdot 10^{33}$ Moleküle	($5 \cdot 10^9$ LP)
Quader 10x10x1 km	$\triangleq 10^{14}$ Liter	$\approx 4 \cdot 10^{12}$ Mol	$\triangleq 24 \cdot 10^{35}$ Moleküle	($5 \cdot 10^7$ LP)
Quader 100x100x1 km	$\triangleq 10^{16}$ Liter	$\approx 4 \cdot 10^{14}$ Mol	$\triangleq 24 \cdot 10^{37}$ Moleküle	($5 \cdot 10^5$ LP)

Widmen wir uns nun dem unteren Ende der Tabelle, wo die Luftpäckchen mehr und mehr Moleküle enthalten, so dass die Anzahl dieser Luftpäckchen immer kleiner wird, und damit auch der Zeitaufwand zur Berechnung der Zustandsänderungen aller atmosphärischen Lagrange-Teilchen. Der heutige technische Stand der Großcomputer-Technologie reicht gerade aus, um Prognosen auf der Basis der allerletzten Zeile der obigen Tabelle durchzuführen. Man kann also mit vertretbarem Aufwand das zeitliche Verhalten von einer halben Million ($5 \cdot 10^5$) Lagrange-Teilchen berechnen, von denen allerdings jedes das mittlere Verhalten von $2,4 \cdot 10^{38}$ Molekülen oder $4 \cdot 10^{14}$ Mol beschreibt. Wollte man diese 10^{16} Liter in einem Würfel unterbringen, hätte dieser eine Kantenlänge von 21,5 km! Er würde so hoch aufragen, dass er fast bis zur Obergrenze der Atmosphäre reichte. Und innerhalb dieser vertikalen Erstreckung gäbe es nicht die geringste Variation der hydro-thermodynamischen Felder, die ja - wir erinnern uns - eigentlich von Punkt zu Punkt variieren sollen. Um wenigstens eine vertikale Differenzierung der Felder im Kilometerabstand zu erlangen, packen wir die

10^{16} Liter Luft nicht in einen Würfel, sondern z.B. in einen Quader von 1 km Höhe, nun allerdings mit fehlender horizontaler Variabilität der Felder in 100x100 km-Quadraten.

Wir haben bisher nur von der **Lagrange'schen Hydrodynamik** gesprochen. Wie der Name schon sagt, bilden die Lagrange'schen Teilchen den Gegenstand der Betrachtung. Aber diese Methode hat einen Nachteil: diese Teilchen sind ja 'ständig woanders', sie 'schwimmen' mit der Strömung mit. Die Wege, die sie dabei zurücklegen, nennt man **Trajektorien**. Wenn man die zeitlichen Veränderungen der hydrothermodynamischen Variablen der Lagrange-Teilchen berechnen will, muss man das in einem Koordinatensystem tun, welches mit den Lagrange'schen Teilchen mitwandert!

Vielleicht haben Sie, liebe Leserin, lieber Leser, schon davon gehört, das man in Wetter- und Klimamodellen die Rechnungen lieber an den festen (unbeweglichen) Punkten eines **Rechengitters** durchführt, was man **Eulersche Hydrodynamik** nennt, statt die Rechnungen in 'mitwandernden' Koordinatensystemen durchzuführen, was man *Lagrange'sche Hydro-Thermodynamik* nennt. Sehr häufig verwendet man als raumfeste Gitterpunkte die Kreuzungspunkte von Längen- und Breitenkreisen in bestimmten Abständen. Einer der Gitterpunkte, z.B. der Schnittpunkt des Null-Meridians mit dem Äquator, wird als Ursprung des ortsfesten Koordinatensystems ausgewählt. Von hier aus weisen dann **Ortsvektoren** zu beliebigen Raumpunkten, wobei die Vektorkomponenten nach Osten, Norden und oben häufig mit x, y und z bezeichnet werden (→ auch Seite 59).

Nun stellen wir uns ein konstantes drei-dimensionales räumliches Gitternetz vor, bei dem der Abstand der Gitterpunkte sowohl in West-Ost-richtung als auch in Süd-Nord-richtung 100 km beträgt, und der Abstand in vertikaler Richtung 1 km. Weiterhin stellen wir uns vor, wir könnten die Strömungsbewegungen unserer quaderförmigen Lagrange-Teilchen der Größe 100km x 100km x 1 km 'per Knopfdruck' anhalten, um sie dann entsprechend diesem festen Raumgitter genau auszurichten. Dabei wollen wir darauf achten, dass die Mittelpunkte der Quader mit den ortsfesten Gitterpunkten übereinstimmen. Offenbar haben die Gitterpunkte in allen drei Dimensionen genau die passenden Abstände dafür, dass die Lagrange-Teilchen den Raum nun wieder lückenlos ausfüllen. Wenn wir nun erneut 'auf den Knopf drücken', setzen sich die quaderförmigen Luftpäckchen wieder in Bewegung, die Strömung geht weiter, als wäre nichts geschehen.

Aber nun kommt der entscheidende Gedanke. Wir können uns ja vor dem zweiten 'Knopfdruck' die augenblickliche **Parzellierung des Raumes** durch diese Quader merken, sie z.B. fotografieren: Wir merken uns einfach die Volumenbereiche, in denen vor dem Wiedereinschalten der Strömung die Lagrange-Teilchen liegen. Diese Volumen-Bereiche bleiben offenbar lückenlos mit Luft gefüllt, und das auch nach

dem Wiedereinschalten der Strömung. Auch diese ortsfesten Volumenbereiche kann man also als Luftpäckchen ansehen! Es sind zwar keine geschlossenen Luftpäckchen wie die fortschwimmenden Lagrange-Teilchen, sondern offene, 'durchströmte' Luftpäckchen. Sie heißen **Euler-Teilchen**. Sie bestehen nicht - wie die *Lagrange-Teilchen* - aus immer den gleichen, sondern aus ständig wechselnden Luftmolekülen.

Es gibt grundsätzlich zwei verschiedenen Methoden, Hydrodynamik zu betreiben, die Lagrange'sche Methode und die Eulersche Methode. **Eulersche Hydrodynamik** betreibt man, wenn man an jedem raumfesten Gitterpunkt - stellvertretend für jedes Euler-Teilchen - die Geschwindigkeit der *gerade vorbeifließenden* Luftströmung misst oder berechnet. **Lagrange'sche Hydrodynamik** betreibt man, wenn man für jedes Lagrange-Teilchen die Geschwindigkeit misst oder berechnet, gleichgültig, an welchem Ort es sich gerade befindet. Und wenn man außerdem die thermodynamischen Variablen misst oder berechnet, dann betreibt man Eulersche bzw. Lagrange'sche Hydro-Thermodynamik.

Für die reine Berechnung von hydro-thermodynamischen Variablen gibt es zwei verschiedene Methoden, eine sogenannte **analytische** und eine sogenannte **numerische** Methode. Für analytische Rechnungen benötigt man kein Rechengitter, denn man erhält als Lösungen von sogenannten **Differentialgleichungen** 'mit Bleistift und Papier' direkt die gesuchten Feldfunktionen $f(x, y, z, t)$ mit der kontinuierlichen Abhängigkeit von den drei Raumkomponenten und von der Zeit. Aber leider kann man nur die allerwenigsten Gleichungen analytisch lösen. Die Gleichungen komplexer Systeme *haben* gar keine analytischen Lösungen, man *muss* sie **numerisch** lösen. Und das bedeutet, dass man statt Differentialgleichung im kontinuierlichen Raum **Differenzgleichung** verwenden muss, deren 'Differenzen' den Gitterabständen entsprechen. Lösungen erhält man nur an den Punkten des Rechengitters, und statt eines kontinuierlichen Zeitablaufs erhält man Rechenergebnisse auch nur für diskrete Zeitpunkte.

Neben dieser **Gittermethode** der numerischen Modellierung gibt es noch die sogenannte **Spektralmethode**. Wie wir später plausibel machen, gestattet diese Methode *zwar* ein Erfassen des Raumkontinuums, also auch der Zwischenwerte zwischen den Gitterpunkten, aber dafür muss man einen anderen Kompromiss eingehen: Die Zahlenwerte der kontinuierlich erfassten Feldvariablen kann man nicht mehr beliebig genau angeben, jedenfalls nicht mehr durch 'beliebig viele Stellen nach dem Komma'. In Kap.3 wird das ausführlich dargestellt, hier vorab nur ein paar Sätze für besonders neugierige Laien: Die Feldvariablen werden in der Spektraldarstellung gebildet aus einer Summe von 'wenigen' Funktionswerten - von Sinus- und Kosinus-Wellenfunktionen, die ihrerseits den Raum zwischen den Gitterpunkten überbrücken. Somit

stehen in Spektralmodellen nur diskrete Zahlenwerte für Werte der Feldvariablen zur Verfügung, allerdings für das ganze Raumkontinuum, während in **Gittermodellen** nur diskrete Raumpunkte zur Verfügung stehen, dafür aber das ganze Zahlenkontinuum zur Bezifferung der Werte der Feldfunktionen.

Den Grund für die Existenz der Gitterabstände überhaupt hat uns ja die Luftpäckchengrößen-Tabelle auf Seite 62 verdeutlicht, deren letzte Spalte angibt, für wie viele Luftpäckchen ein Computer alle Variablenwerte Zeitschritt für Zeitschritt ausrechnen muss, wenn dieses Luftpäckchen die in den vorderen Spalten angegebenen Ausmaße hat. Für die in der Tabelle nach oben kleiner werdenden Luftpäckchen wächst die Anzahl dieser Päckchen geradezu astronomisch an. Obendrein sagt uns das schon auf Seite 28 erläuterte **CFL-Kriterium**, dass die erlaubten Zeitschritte auch immer kleiner werden: Nicht nur muss der schon 'rauchende' Computer bei kleiner werdenden Gitterabständen immer mehr LP pro Zeitschritt berechnen, nun wird der erlaubte Zeitschritt auch noch immer kleiner! Die gleichen Rechnungen, die uns in Kap. 2.1 die astronomischen Rechenzeiten für Molekülbewegungen in Luftpäckchen 'beschernt' hatte, bescheren uns nun, dass die besten aller gegenwärtigen Rechner allenfalls Luftpäckchen aus dem Bereich der beiden untersten Zeilen der Luftpäckchengrößen-Tabelle von Seite 62 in praktikabler Zeit berechnen können. Wenn die Rechner durch fortschreitende Technik noch schneller werden, kann man in der Tabelle noch ein kleines Stückchen höher wandern, d.h. kleinere Luftpäckchen berechnen, d.h. den Gitterabstand noch etwas verringern, d.h. sich dem Raumkontinuum noch etwas nähern.

Und wie äußert sich eine zunehmende Rechenleistung in Spektralmodellen? Hier könnten schnellere Computer in vertretbarer Zeit mehr Wellenfunktionen berechnen, d.h. man käme dem Zahlenkontinuum möglicher Werte der Feldvariablen näher. Das heißt natürlich auch, dass sich dann Gitter- und Spektralmodelle ähnlicher werden.

Wie wir im Verlauf dieses Buches immer deutlicher sehen werden, kommen zu diesen notwendigen Vereinfachungen durch Diskretisierung - entweder der Orte der Berechnung oder der Werte der Berechnung - noch viele weitere hinzu, auch solche, die man mit noch mehr Computertechnologie nicht verringern könnte, auch dann nicht, wenn auch die Messtechnologie einen 'quasi-unendlichen' Fortschritt machen könnte. Neben der Beschränkung durch diese beiden Technologien gibt es nämlich noch eine dritte Beschränkung, und das ist unser durchaus beschränktes Wissen um die Physik der Atmosphäre. Alles zusammen zwingt uns dazu, in der Beschreibung der Atmosphäre so manche atmosphärische Variable nur 'grob' zu berücksichtigen - durch **Parametrisierung** dieser Variablen - statt sie mit einer (meist unbekannt) Differential- oder Differenzgleichung errechnen zu können. Sehr viele Variable

werden auch *überhaupt nicht* berücksichtigt, ganz sicher auch solche, von deren Existenz man heute noch gar nichts weiß.

Jede mathematische Beschreibung der Atmosphäre ist also eine Vereinfachung, und jede Vereinfachung von irgendwelchen Sachverhalten ist eine Abkehr von der Realität. Sie führt nicht zur Wirklichkeit, sondern 'nur' zu **Modellen** der Wirklichkeit. Auch eine Spielzeug-Eisenbahn ist ja einfacher als die wirkliche Eisenbahn - sie ist also eine 'Modellbahn'. Und bei der mathematischen Beschreibung eines Systems muss man - wie gesehen - ebenfalls vereinfachen, also **mathematisch modellieren**. Und da in komplexen Systemen analytische mathematische Lösungen nicht zu haben sind, spricht man von **numerischen Modellen** (→ vgl. auch mit den entsprechenden 'Blitzantworten' auf Laienfragen von Seite 14).

Auch das Ignorieren ganzer Bereiche von Zwischenskalen auf der 'Körnungs-Leiter' bis hin zu den Klimaskalen begründen Vereinfachungen der numerisch modellierten Atmosphäre gegenüber der realen Atmosphäre. Mit anderen Worten, die (berechenbare) zeitliche Entwicklung des Modells wird immer verschieden sein von der (nicht berechenbaren) zeitlichen Entwicklung der wirklichen Atmosphäre.

Bis hier war die Aussage durchaus trivial. Aber nun denken wir einen Schritt weiter: Was wäre nötig, was müssten wir 'hypothetisch' tun, um statt der Modell-Atmosphäre die wirkliche Atmosphäre zu berechnen? Man müsste Veränderungen und Ergänzungen einbauen, die wir nicht kennen. Und wenn wir trotz dieser Unkenntnisse Modell-Ergänzungen vornähmen, z.B. weil wir unsere Unkenntnis nicht öffentlich zugeben wollen, dann könnte ja diese 'ad hoc' - Maßnahmen *rein zufällig* die richtigen sein! Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit dafür praktisch null, denn es wären unzählig viele andere Maßnahmen aus dem Stegreif möglich, und natürlich sind noch nicht einmal sämtliche grundsätzlich möglichen Maßnahmen in unseren Stegreif-Pool enthalten, denn viele sind uns noch unbekannt. Aber nur eine dieser astronomisch vielen, schon bekannten oder noch unbekanntenen Möglichkeiten entspricht der Realität. Wir stellen also fest:

Die Differenz zwischen einer Modell-Atmosphäre, die den aktuellen Wissensstand voll berücksichtigt, und der wirklichen Atmosphäre ist der reine Zufall!

Wie gesagt ist 'Zufall' nur ein anderes Wort für **Stochastik**. Fast ist dieses Wort ja auch ein Synonym für 'Nichtwissen'. *Fazit: Das stochastische Chaos ist es, was die 'richtige' Modell-Prognose von einer Prognose der Wirklichkeit trennt!* - Dies ist ein erster Schritt in meiner Argumentationskette dafür, dass an erster Stelle nicht das erst seit wenigen Jahrzehnten bekannte deterministische Chaos verantwortlich ist für die Nichtvorhersagbarkeit des Klimas, sondern vor allem das altbekannte stochasti-

sche Chaos. Nun bleibt noch die Frage zu diskutieren, *wie weit* dieses stochastische Chaos die Modellprognose von der unbekannte wahre Prognose verschiebt. Wissen werden wir das nie, einfach weil wir gar nicht wissen, was wir *noch* nicht wissen und was wir *nie* wissen werden. Man kann aber auch hier mit Wahrscheinlichkeiten arbeiten, sich etwa fragen, wie stark die Trajektorie eines **Lagrange-Teilchens** (→ Seite 63) durch Zufallsprozesse vom ungestörten Weg abweichen könnte. Schon bei dieser Frage müssten eigentlich ungute Gefühle aufkommen, wenn man die derzeitige Klimadiskussion verfolgt und z.B. auf Meldungen trifft wie: "Die wissenschaftlichen Klimaprognosen sind Fakt, Widersprüche sind Leugnungen". Aber dieses ungute Gefühl steigert sich noch einmal, wenn man **Trajektorien** nicht mehr von physikalischen Objekten betrachtet, sondern von Systemzuständen - verschlüsselt durch Punkte im **Phasenraum** (auch **Zustandsraum** genannt), wie wir es in Kap.5 tun werden.

Diese Trajektorien im Zustandsraum markieren nämlich nicht mehr den Weg eines einzelnen - wenn auch mit anderen vernetzten - Lagrange-Teilchens im **Orts-Raum**, sondern den Entwicklungsweg, (die **Evolution**, wie man auch sagt), des gesamten Systems! Daher gibt es in diesem Zustandsraum nicht mehr viele Trajektorien für die vielen Lagrange-Teilchen, sondern nur *eine einzige* Trajektorie, die nicht nur die Bewegungen *aller* Einzelobjekte des Systems beschreibt, sondern auch die sonstigen, z.B. thermodynamischen Veränderungen aller Objekte. Es kann ja auch nur eine Zustandstrajektorie geben, weil es ja auch nur *eine* physikalische Evolution des Systems gibt! Für die Atmosphäre heißt das: *Die Trajektorie im atmosphärischen Phasenraum beschreibt die physikalische Evolution der gesamten Atmosphäre, also die Veränderungen aller ihrer Variablen.* Wenn sich über einer Nordsee-Insel eine Wolke auflöst, dann ist das in der wahrlich komplexen Zustands-Trajektorie ebenso enthalten wie ein Sandsturm in der Sahara oder Nebel in Australien. Das wird dadurch ermöglicht, dass die Koordinaten dieses Phasenraumes gerade diese Variablen *sind!*

Liebe Leserin, lieber Leser, lassen Sie sich in Kap. 5 davon überraschen, dass die Idee hinter diesem sogenannten **systemtheoretischen** Konzept gar nicht schwer zu verstehen ist. Oder haben Sie es jetzt schon verstanden? Hoffentlich nicht, denn dann haben Sie mich ja fast arbeitslos gemacht!

Nun aber zurück zu unserem Fluid im Ortsraum. Wenn man zu einem festen Zeitpunkt die Geschwindigkeits-Vektoren an allen raumfesten Gitterpunkten zu einem Gesamtbild zusammenfügen möchte, und das Rechengitter möglichst engmaschig ist, dann fügen sich die in der Bewegungsrichtung benachbarten Vektoren zu 'Vektorlinien' zusammen, die in ihrer Gesamtheit ein Linienfeld ergeben. Es ist das Euler-

sche **Stromlinienfeld**. Um den Unterschied zum **Trajektorienfeld** der Lagrange'schen Hydrodynamik zu verstehen, betrachten wir aus beiden Feldern nur eine Linie. Eine einzige Trajektorie beschreibt ja den Weg eines einzigen, aus immer den gleichen Molekülen bestehenden Luftpäckchens während eines Zeitabschnittes. Eine einzige Stromlinie hingegen bezieht sich nicht auf ein Zeitintervall, sondern auf nur einen einzigen Zeitpunkt. Dafür beschreibt sie aber nicht nur ein Luftpäckchen, sondern alle Luftpäckchen, die sich zu diesem Zeitpunkt gerade auf der Stromlinie liegen. Merkregel:

Eine Trajektorie: Ein Teilchen, viele Zeitpunkte

Eine Stromlinie: Ein Zeitpunkt, viele Teilchen

Ein vorgegebener Gitterpunkt wird zu einem gegebenen Zeitpunkt von nur einer einzigen Stromlinie des gesamten Stromlinienfeldes durchquert. Aber diese Stromlinie kann sich - wie alle anderen auch - im Zeitverlauf ändern. Wenn das der Fall ist, es ist eigentlich der Normalfall der **Instationarität** (so der Fachbegriff, wird natürlich auch der vorgegebene Gitterpunkt zu unterschiedlichen Zeitpunkten von unterschiedlichen Stromlinien getroffen. Im **stationären** Fall hingegen durchqueren auch im Zeitverlauf immer gleiche Stromlinien die gleichen Gitterpunkte. Das kann aber nur dann funktionieren, wenn sich auch das Trajektorienfeld nicht ändert, wenn es stationär ist, und wenn es mit dem Stromlinienfeld identisch ist:

Bei Stationarität sind Stromlinien und Trajektorien identisch

Auf den strengen Beweis für diese Behauptung möchte ich in diesem populärwissenschaftlichen Buch verzichten, denn sie ist ja - so hoffe ich - durch die vorausgegangenen Sätze 'irgendwie' anschaulich geworden. Dennoch können besonders eifrige Leserinnen und Leser durchaus versuchen, den strengen Beweis in [Lan02] auf Seite 139 (bzw. auf [www.hajolange.de / Kap.03 Atmosphärische Gleichungen.pdf](http://www.hajolange.de/Kap.03%20Atmosph%C3%A4rische%20Gleichungen.pdf)) nachzuvollziehen. Diese Merkregeln werden uns im nächsten Kapitel sehr hilfreich sein.

Zusammenfassungen - Verdichtungen - Ergänzungen

Lagrange'sche Luftteilchen sind dicht an dicht liegende, ursprünglich als Würfel gedachte Luftballons ohne Hülle. Diese Würfel werden im Verlauf der Luftströmung volumeninvariant deformiert und forminvariant komprimiert bzw. expandiert. Ferner gibt es auch einen Wärmeaustausch, besser: einen mit T multiplizierten **Entropie-austausch** zwischen den Luftpäckchen (\rightarrow Kapitel 2.7). Ähnlich kann die Kompressions- bzw. Expansions-Arbeit von einem zum anderen Luftpäckchen als mit dem Druck multiplizierter Volumenaustausch formuliert werden.

Da ein Lagrange'sches Teilchen z.B. 10^{23} Moleküle enthält, spart man extrem viel Rechenzeit, wenn man nicht Molekül-Zustände berechnet - also ihre Orte und Geschwindigkeiten - sondern nur den einen Ort und den einen Impuls dieses Luftpäckchens, allerdings auch noch die Werte seiner Variablen Dichte ρ (oder spezifisches Volumen $v=1/\rho$), Druck p , Temperatur T und spezifische Entropie s , die zusammengenommen den Zustand des Luftpäckchens ausmachen. Zwar enthält die gesamte Atmosphäre noch immer 10^{21} solcher Lagrange'scher Teilchen, aber man kann (man *muss* sogar) die Atmosphäre auch in noch weniger Teilchen mit entsprechend noch mehr Molekülen pro Luftpäckchen aufspalten.

Die Variablen (Orte und Geschwindigkeiten) der *Moleküle* berechnet man mithilfe der Newton'schen Bewegungsgleichung, diejenigen der *Lagrange-Teilchen* mithilfe hydro-thermodynamischer Gleichungen. Das sind Gleichungen, die nicht das Verhalten diskreter Massenpunkte beschreiben, sondern das Verhalten einer kontinuierlichen Massenverteilung, des sogenannten Massenfeldes, dessen Variablen sich 'eigentlich' von Punkt zu Punkt des Raumes stetig verändern sollten.

Sprachen wir bei den Molekülen noch von diskreten Trajektorien und Geschwindigkeiten der Moleküle als punktartige Einzelmassen, so handelt es sich in der hydrothermodynamischen Skala um Verteilungen der Größen ρ , T , v und s im Raum: Es sind *Felder*, die sich eigentlich 'von Raumpunkt zu Raumpunkt' ändern sollten, denn das ist der Sinn von 'stetig'. Andererseits sind ρ , T , v und s auch Variable der Lagrange'schen Luftpäckchen, die bei 10^{23} Molekülen ein Volumen von jeweils 3,7 Liter ausmachen. Das verheißt natürlich *keine* stetigen Verhältnisse. Wollte man die Felder wirklich kontinuierlich auflösen, müsste man noch viel kleinere Luftpäckchen verwenden. Aber die Rechenleistung heutiger Großrechner erfordert das Gegenteil, nämlich die Verwendung *wesentlich* größerer Luftpäckchen, um in ihnen wesentlich mehr Moleküle zu binden. Neben der Lagrange'schen gibt es auch eine **Eulersche Hydrodynamik**. Während die Lagrange-Teilchen mit der Strömung mitwandern, aber immer aus den gleichen Molekülen gebildet werden, sind die Eulerschen Luftteilchen ortsfest, bestehen aber *nicht* aus stets den gleichen

Molekülen, sondern sie werden von Luft durchströmt. Dennoch birgt dieser Weg Vorteile, hauptsächlich dadurch, dass man die Berechnungen immer am gleichen Ort vornehmen kann.

Die ortsfesten Luftpäckchen der Eulerschen Hydrodynamik wurden 'erfunden', um in atmosphärischen Modellen trotz der nun einmal unvermeidlichen Bewegung des strömenden Fluids am festen Ort rechnen zu können. Aber das konnte nur mit einem 'Durchströmen' der Eulerschen Luftpäckchen erkaufte werden, und mit dem damit verbundenen Verlust der Konstanz ihrer Massenbestandteile.

Da man die Gleichungen komplexer Systeme nicht direkt (analytisch) lösen kann - nicht 'mit Bleistift und Papier' - muss man sie 'mit Computern' numerisch lösen. Das erzwingt auch eine Vereinfachung der Beschreibung des Raum-Zeit-Kontinuums (der Beschreibung der Felder an *allen* Raum- und Zeitpunkten) auf eine Berechnung nur an *diskreten* Raum- und Zeitpunkten. Der so erzwungene Verzicht auf Variablenwerte an unendlich vielen Raum- und Zeitpunkten ist natürlich eine Vereinfachung. Aber durch *jede* Vereinfachung irgendwelcher Sachverhalte ersetzt man den Blick auf die Wirklichkeit durch einem Blick auf ein **Modell** der Wirklichkeit. Auch eine Spielzeug-Eisenbahn ist einfacher als die wirkliche Eisenbahn. Sie ist also eine 'Modellbahn'. Eine Vereinfachung - eine **Modellierung** - eines physikalischen Systems kann man auch dadurch bewirken, dass man in einer mathematischen Beschreibung dieses Systems Vereinfachungen vornimmt. Und da man diese nie vermeiden kann, spricht man hier von **numerischen Modellen**.

Die Größe der Eulerschen Luftpäckchen und die Abstände der Gitterpunkte bei der numerischen Modellierung bedingen sich gegenseitig. Beide sollten möglichst klein sein zur Minimierung der Diskretisierung der 'eigentlich' stetigen Felder, aber beide müssen groß genug sein zur Verhinderung 'astronomischer' Rechenzeiten, wie im oben angesprochenen 'Dilemma' schon einmal erwähnt.

Es gibt aber neben den Gittermodellen noch sogenannte Spektralmodelle, die in Kap.3 beschrieben werden. Sie tauschen den Nachteil, Zustandswerte des modellierten Systems nur an diskreten Orten angeben zu können, gegen den Nachteil ein, für die Angabe der Zustandswerte nur einen diskreten Zahlenvorrat zur Verfügung zu haben, der durch die Addition einer begrenzten Anzahl von Wellenfunktionen entsteht. Diesmal ist *diese* Begrenzung die Ursache einer Vermeidung 'astronomischer' Rechenzeiten. Auch Spektralmodelle liefern keine Lösung, sondern nur eine Verlagerung der Probleme.